

Следует отметить, что в случае, когда модули упругости двух слоев равны между собой ($E_1 = E_2$), полученная зависимость между результирующей нагрузкой Q и углом θ_0 , характеризующем величину зоны контакта, тождественно совпадает с аналогичной зависимостью для однослойного упругого покрытия твердого цилиндра [2].

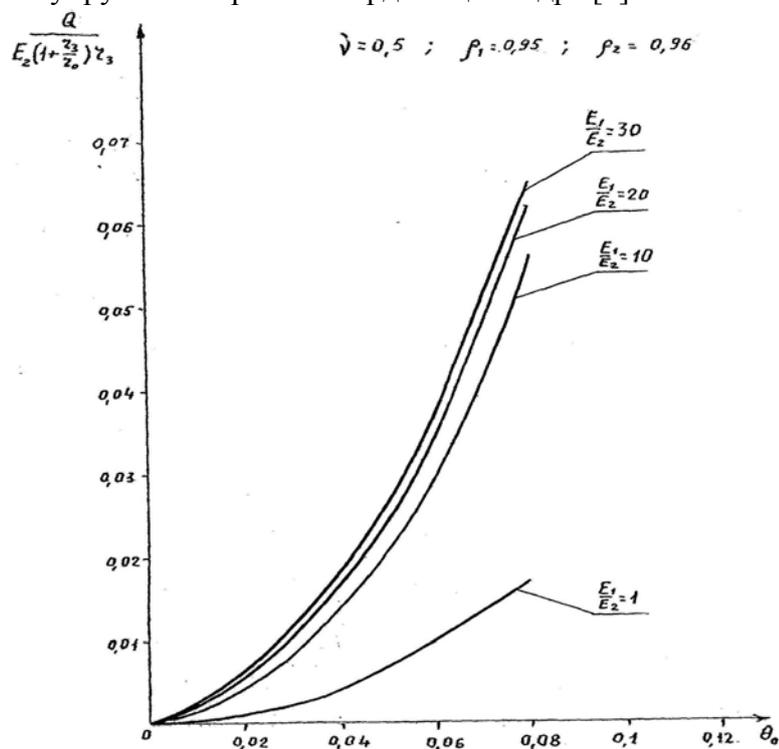


Рисунок 2 – Зависимость между результирующей нагрузкой Q и углом θ_0

Литература

1. Божкова Л.В., Рябов В.Г., Норицина Г.И. Смешанная плоская задача теории упругости для двухслойной кольцевой области // Известия МГТУ «МАМИ». М.: МАМИ, 2011, №1, - С.217-221
2. Божкова Л.В., Чебанюк А.М. Взаимодействия кольца, жестко насаженного на абсолютно твердое цилиндрическое тело, с жестким основанием. // Известия вузов. Машиностроение. – 1977., №8, с.16-22.

Значение именно точных решений уравнений движения вязкой жидкости Навье-Стокса

к.т.н. Выскребцов В.Г.
МГТУ «МАМИ»
(495) 223-05-23, доб. 1465

Аннотация. Исследованы решения уравнений Слэзкина Н.А. установившегося движения в ламинарном режиме вязкой несжимаемой жидкости при осесимметричном течении. На основании точного решения уравнения Слэзкина (типа Риккати) показана множественность решения этого уравнения, причём физический смысл имеет лишь небольшое число решений. Рассмотрен простейший случай безвихревых решений, для которых линиями тока могут быть окружности, эллипсы, параболы, гиперболы и прямые. Эти течения неструйные.

Ключевые слова: вязкая жидкость, уравнения Навье-Стокса, уравнение Риккати, точные решения.

Если движения твёрдых тел количественно описываются уравнением И. Ньютона достаточно непротиворечиво и точно в согласии с наблюдениями физических явлений, то поведение вязкой жидкости описывается, как считается, гораздо более позже выведенными уравнениями Навье-Стокса. Эти уравнения были впервые получены Л.Навье (1821г.) как уточнение уравнений Л.Эйлера (1751 г.) для невязкой жидкости и – в окончательной формулировке – Дж. Стоксом (1845 г.) [1]. С этого времени эти уравнения уже не претерпевали уточнений. Вопрос о единственности решения этих уравнений в частных производных в общем виде до сих пор не решён, если не считать исследования единственности для установившихся течений несжимаемой жидкости. Из этих исследований следует, что существует лишь небольшое число траекторий линий тока (окружности, прямые линии, а также траектории, вдоль которых вихрь скорости постоянен), удовлетворяющих указанным уравнениям движения жидкости (или более обще – уравнениям движения сплошной среды, обладающей ньютоновской вязкостью, или, как ещё говорят, уравнениям движения ньютоновских жидкостей).

В первом исследовании [2] как метод получения точных решений уравнений Навье-Стокса (или просто Стокса) применены методы дифференциальной геометрии и, как дополнительное уравнение, свойство гладкости ортогональных сетей, линиями которых служат линии тока установившегося движения частиц несжимаемой вязкой среды и ортогональными к ним линии центробежных ускорений. Во втором – используется аппарат тензорного анализа [3]. При первом подходе свойство гладкости приводит к появлению дополнительного дифференциального уравнения в частных производных относительно радиусов кривизн линий траекторий, а при втором подходе – к требованию того, чтобы тензор Римана в области течения среды был равен нулю. При этом условие гладкости сетей трактуется как движение частиц среды по траектории без ударов и скачков. Кроме того используется как существенное условие конечность (ограниченность) скоростей движения и их градиентов. Выполнение этих, представляющихся очевидными требований оказывается достаточно для однозначного решения уравнений Навье-Стокса. Эти уравнения с учётом безударности движения и ограниченных, конечных значений скоростей течения не требуют никаких дополнительных условий для однозначного решения уравнений Стокса.

Траектории течений жидкости, соответствующих нескольким из точных решений уравнений Навье-Стокса, давно наблюдались в опытах. Это ламинарное течения в прямых трубах (течение Пуазейля) и движение по окружностям между коаксиальными цилиндрами (течение Куэтта).

Наблюдение других течений, соответствующих точным решениям, из литературы не известно, хотя широко известны мнения, например, о том, что «... общая картина наблюдающихся в действительности ламинарных движений и многие их детали достаточно хорошо описывались решениями уравнений Стокса при соответствующих, также «регулярных», начальных и граничных условиях. Можно, например, вспомнить ламинарное движение вязкой жидкости в круглой трубе, соответствие теоретически рассчитанных характеристик которого (парабола распределения скоростей, формулы расхода и сопротивления) опытными данными уже блестяще подтверждено. То же относится к многочисленным другим примерам ламинарных движений вязкой жидкости: движению смазки в узких зазорах между валом и цапфой подшипника, вполне удовлетворительно описываемому гидродинамической теорией смазки подшипников, движениями в ламинарных пограничных слоях, с достаточной точностью рассчитываемых по теории...

Отмеченное совпадение результатов расчётов ламинарных течений Стокса и их применимости для теоретического описания движений вязкой жидкости... в действительности наблюдаются только те из решений уравнений Стокса, которые являются устойчивыми по отношению к возможным возмущениям. В устойчивых движениях возникшие случайно или введённые по воле исследователя в поток малые возмущения не развиваются с течением времени, а, наоборот, затухают. В противоположность этому, в неустойчивых движениях ма-

лые вначале возмущения растут, способствуя его переходу либо к новому устойчивому движению, если таковое имеется среди возможных решений уравнений Стокса, либо к некоторому хаотическому, образованному нерегулярно движущимися и взаимодействующими между собой жидкими массами. Процессы возникновения и развития такого рода движений... носят случайный характер и не поддаются строгому теоретическому анализу, требуя для своего изучения своеобразных статистических подходов.

Эта форма движений вязкой жидкости, широко распространённая природе и технических устройствах, носит название турбулентных движений» [1].

В данной работе принципиально различаются течения жидкости, описываемые точными решениями уравнений Стокса и описываемые так называемыми приближёнными решениями (с всегда неизвестной степенью приближённости), которые отождествляются с действительными течениями, такими как движение смазки в узких зазорах, течение в ламинарном пограничном слое и др.

Более того, автор считает, что именно сравнение фактических траекторий и других особенностей наблюдаемых течений и траекторий течений, определяемых из точных решений уравнений Навье-Стокса, позволяет судить о том, насколько точно описывают эти уравнения свойства жидкостей, обладающих так называемой ньютоновской вязкостью (называемых ещё ньютоновскими жидкостями).

Основания для некоторых сомнений в достаточной идентичности уравнений Стокса как количественной модели ньютоновских жидкостей известны давно, т.к. при выводе уравнений Стокса используется несколько допущений, справедливость которых неочевидна и должна быть проверена справедливостью следствий из этих допущений путём сравнения теоретических и опытных данных. В качестве первого такого неочевидного допущения отметим, что при введении понятия давления в движущейся вязкой среде используется допущение что «... в ньютоновской несжимаемой вязкой жидкости взятое с обратным знаком среднее арифметическое трёх нормальных напряжений, приложенных к взаимно перпендикулярным площадкам в данной точке среды, представляет давление в этой точке... P . Сказанное предположение является дополнительной гипотезой к обобщённому закону Ньютона, так как, исходя из общих гидродинамических соображений, нельзя доказать, что определённая таким образом инвариантная скалярная величина P будет той самой термодинамической характеристикой жидкости или газа, которая, например, в случае совершенного газа будет связана с другими термодинамическими характеристиками – плотностью и температурой – формулой Клайперона» [1].

В качестве другого небесспорного допущения, используемого при выводе уравнений равновесия частицы сплошной среды, является пренебрежение скручивающими эту частицу моментами внешних сил. Поясним эту ситуацию словами учебника [4]: «Предположим, что силы, приходящиеся на площадь S , статически эквивалентны силе R , приложенной к точке Q , и некоторой паре G . Если мы будем каким-то образом непрерывно уменьшать площадь S , оставляя всё время точку Q внутри её, то сила R и пара G будут стремиться к нулю, а направление силы – к некоторому предельному направлению (l,m,n) . Мы предположим, что число R/S , полученное путём деления числа единиц силы в силе R на число единиц площади в площади S , стремится к нулю к некоторому пределу F , а отношение G/S стремится к нулю». Таким образом, отсюда следует, что при рассмотрении равновесия отдельной твёрдой частицы момент кручения от действия внешних сил и соответственное угловое ускорение согласно теоретической механике должно учитываться и учитывается, а вот при рассмотрении жидкой частицы – нет, не учитывается. Возможно, что обстоятельство может служить признаком того, что уравнения Стокса, как и уравнения теории упругости сплошной среды, могут описывать лишь незакрученные движения и поля напряжений, т.е. только плоские и осесимметричные.

Только сравнением теоретических, соответствующих точным решениям уравнений

Стокса и фактических, физически наблюдаемых течений может быть определена справедливость вышеуказанных допущений. Затруднением здесь служило то, что уравнения Стокса представляют собой нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных, теория которых недостаточно разработана. Однако с учётом того, что уравнения Стокса прежде всего должны рассматриваться с позиций уравнений движения физической частицы, а не с позиций чисто математических выражений и поэтому с учётом условия движения частиц среды без ударов и скачков и, кроме того, с использованием как существенного условия конечности (ограниченности) скоростей движения и градиентов скорости в [2, 3], удалось получить описание траекторий всех точных решений уравнений Стокса. Подчеркнём, что различными математическими методами был получен один и тот же результат, правда, при следующих ограничениях: движение установившееся, среда несжимаемая. Некоторая неясность оставалась только для осесимметричных течений.

Согласно популярным в 60-е годы и переиздаваемом до сих пор учебнике «Фейнмановские лекции по физике» [5] уравнения Навье-Стокса характеризуются следующим образом: «...наши уравнения для Солнца, например, представляющие его как водородный шар, описывают Солнце без солнечных пятен, без зернистой структуры его поверхности, без неровностей и короны. Тем не менее, всё это действительно находится в уравнениях, только у нас ещё нет способа вытащить их оттуда... сегодня мы не можем увидеть в уравнениях потока воды такие вещи, как спиральное строение турбулентности, которую мы видим между вращающимися цилиндрами. Сегодня мы не можем сказать с уверенностью, содержит ли уравнение Шредингера и лягушек, и композиторов, и даже мораль или там ничего похожего и быть не может. Мы не можем сказать, требуется ли что-либо сверх уравнения, вроде каких-то богов, или нет...».

Таким образом, американские авторы «Фейнмановских лекций» склоняются к мысли, что в уравнениях Навье-Стокса «всё есть», но «нет ещё способа вытащить». Сказанное объясняет интерес к именно точным решениям уравнений Стокса и соответствующим им реальным течениям.

Поскольку плоские течения уже рассмотрены достаточно подробно (кроме случая постоянства вихря скорости) в [2, 3], то в данной работе рассмотрены автомодельные, то есть подобные, установившиеся течения вязкой несжимаемой среды, в некотором смысле переходные от плоских к пространственным.

Уравнения Стокса для установившихся автомодельных осесимметричных движений несжимаемой среды, как показано было впервые Н.А.Слѣзкиным (1934 г.) [6], записанные в сферической системе координат, с учётом осесимметрии сводятся к одному обыкновенному, с одной независимой переменной, дифференциальному уравнению первого порядка типа Риккати относительно некоей функции $f(\eta)$, которая пропорциональна функции тока:

$$2(1 - \eta^2) f^1(\eta) - f^2(\eta) + 4\eta f(\eta) + C_1 \eta^2 + C_2 \eta + C_3 = 0. \quad (1)$$

В этом уравнении C_1, C_2, C_3 – постоянные интегрирования, которые, возможно, должны определяться граничными условиями. Решение дифференциального уравнения первого порядка Риккати общего вида:

$$f^1 \eta = P(\eta) f^2(\eta) + Q(\eta) f(\eta) + R(\eta),$$

как показал Лиувилль, за исключением очень немногочисленных частных случаев, не сводится к квадратурам и не может быть выражено в конечном виде через элементарные функции [7]. Подстановкой

$$f(\eta) = -Y^1 \eta / (Y(\eta) P(\eta)) = -2(1 - \eta^2) Y^1 \eta / Y(\eta), \quad (2)$$

где: $P(\eta)$ – коэффициент при квадратичном члене уравнения Риккати позволяет привести исходное уравнение (1) к однородному линейному уравнению второго порядка. Для рассматриваемого уравнения (1) это позволяет перейти к уравнению второго порядка с переменными коэффициентами вида:

$$(1 - \eta^2)^2 Y'' - (C_1 \eta^2 + C_2 \eta + C_3) Y(\eta)/4 = 0. \quad (3)$$

Получив уравнение (1) Слэзкин не решал его, а ограничился указанием, что выведенное им уравнение «можно исследовать» [6]. Впоследствии уравнение (1) многократно [1, 8 и др.] выводилось разными авторами. Изложенный далее вывод предложен Лойцяньским [1].

В соответствии с теорией подобия из анализа размерности следует, что для автомодельных течений вязкой среды поле скоростей и давлений может быть представлено в осесимметричной сферической системе координат $(R, \eta = \cos \theta)$, где R – расстояние от начала координат, а θ – угол между радиус-вектором рассматриваемой точки среды и осью течения, в форме:

$$V_R = -v f^I(\eta)/R, \quad V_\theta = -v f(\eta)/(R \sqrt{1 - \eta^2}). \quad (4)$$

Течение с такими проекциями скоростей будет безвихревое, если: $f^{II}(\eta) = 0$. Определив функцию $f(\cos \theta = \eta)$ из уравнения (1), можно согласно (4) найти составляющие скорости течения V_R и V_θ и затем траекторию течения как [7]:

$$dR/V_R = R d\theta / V_\theta. \quad (5)$$

Отсюда в соответствии с представлением (4) получим дифференциальное уравнение, которое легко интегрируется:

$$R = C_0/f(\eta). \quad (6)$$

Здесь C_0 – постоянная интегрирования, $\cos \theta = \eta$. Таким образом, для наблюдений и экспериментов определяющим является решение уравнения (1) в виде функции $f(\eta)$. Первое точное решение этого уравнения было указано для случая $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ Ландау [1, 9], который обосновал выбор неопределённых постоянных тем, что при этом получается нетривиальное аналитическое решение. Действительно, при этом допущении уравнение (1) является уравнением типа Бернулли и решается известными способами [7]. Уравнение (3) приобретает при этом вид: $Y'' = 0$. Отсюда согласно (2) получим

$$f_1(\eta) = 2(1 - \eta^2)/(A + 1 - \eta), \quad (7)$$

где: A – постоянная интегрирования. Как считали Ладау и Лойцяньский [1,7] постоянная A зависит от величины проекции на ось течения полного импульса потока, «включающего количество движения, давление и вязкие напряжения».

Впоследствии выяснилось, что помимо решения Ландау уравнение Слэзкина допускает ряд других точных решений при различных частных значениях постоянных, указанных Седовым [10]. Дело в том, что уравнение (3) меняет свой тип в зависимости от частных значений неопределённых постоянных C_1, C_2 и C_3 . Седовым указаны случаи:

$$1^0. (1 + \eta)^2 Y'' - C_1 Y(\eta)/4 = 0 \text{ при } C_2 = -2 C_1, C_3 = C_1; \quad (3a)$$

$$2^0. (1 - \eta)^2 Y'' - C_1 Y(\eta)/4 = 0 \text{ при } C_2 = 2 C_1, C_3 = C_1; \quad (3б)$$

$$3^0. (1 - \eta^2) Y'' + C_1 Y(\eta)/4 = 0 \text{ при } C_2 = 0, C_3 = -C_1. \quad (3в)$$

Уравнение (3a) представляет собой уравнение Эйлера и сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами заменой $1 + \eta = \exp(t)$. Аналогичной заменой $1 - \eta = \exp(t)$ решается и уравнение (3б). Уравнение (3в) имеет простое решение, а именно: $Y(\eta) = a(1 - \eta^2)$, где $a = \text{const}, C = \delta$.

Таким образом, варьируя значения постоянных в исходном уравнении (1), можно получать точные решения уравнения Слэзкина разного аналитического вида. Докажем теперь более общее утверждение: уравнение Слэзкина, являющееся частным случаем уравнений Навье-Стокса при осесимметричном движении вязкой несжимаемой жидкости, имеет бесконечно много точных линейно независимых аналитических решений.

Для доказательства, как и ранее [11], будем искать решения уравнения (3) в виде многочлена с постоянными коэффициентами степени N , мотивируя это тем, что поскольку уравнение (3) линейно и имеет коэффициентами многочлены, то и решение может иметь вид

многочлена, т.е.

$$Y(\eta) = a_0 + a_1 \eta + a_2 \eta^2 + \dots + a_N \eta^N, \text{ здесь } N = 1, 2, 3, 4, 5 \dots$$

Дифференцируя это выражение дважды и подставляя его в (3), получим многочлен ($N+2$) степени, коэффициенты которого должны быть равны нулю. Это даёт $N+3$ уравнения для определения $N+1$ коэффициентов a_i при трёх произвольных постоянных C_1, C_2, C_3 , т.е. всего $N+4$ неизвестных постоянных. Одна из постоянных (например, a_N) остаётся неопределённой и играет роль общего множителя. Однако поскольку для определения функции $f(\eta)$ согласно (3) требуется отношение производной $Y(\eta)$ и самой функции, то общий множитель a_N при этом сократится. Неопределённым останется только степень многочлена.

Для иллюстрации этого будем искать значение $Y(\eta)$ в виде многочлена, например, третьей степени, а именно в виде: $Y(\eta) = a_0 + a_1 \eta + a_2 \eta^2 + a_3 \eta^3$. Тогда вторая производная окажется равной: $Y''(\eta) = 2a_2 + 6a_3\eta$. Подставляя указанные значения в уравнение (3) и приравнявая к нулю коэффициенты при равных степенях, получим следующую систему уравнений:

$$\text{Коэффициент при } \eta^5: 24 a_3 - C_1 a_3 = 0;$$

$$\text{Коэффициент при } \eta^4: 8 a_2 - C_1 a_1 - C_2 a_3 = 0;$$

$$\text{Коэффициент при } \eta^3: -48 a_3 - C_1 a_1 - C_2 a_2 - C_3 a_3 = 0;$$

$$\text{Коэффициент при } \eta^2: -16 a_2 - C_1 a_0 - C_2 a_1 - C_3 a_2 = 0;$$

$$\text{Коэффициент при } \eta: 24 a_3 - C_2 a_0 - C_3 a_1 = 0;$$

$$\text{Коэффициент при } \eta^0: 8 a_2 - C_3 a_0 = 0.$$

Из первого уравнения, которое можно записать в виде $a_3(24 - C_1) = 0$, следует вывод, что поскольку по смыслу поиска решения как многочлена третьей степени $a_3 \neq 0$, то $C_1 = 24$. Если же решение искать в виде многочлена N -й степени, то из тех же соображений получим для $C_1 = 4N(N-1)$, N - целое. Поэтому в зависимости от выбранной степени многочлена $Y(\eta)$ получим возрастающие значения коэффициента:

$C_1 = 0; 8; 24; 48; 80$ и т.д.

Подставляя в приведённую выше систему оставшихся пяти уравнений $C_1 = 24$ получим новое точное решение уравнение Слэзкина (а с ним и системы уравнений Навье-Стокса) в виде:

$$Y(\eta) = a_3 (\eta^3 - \eta); \quad (8)$$

$$f_2(\eta) = 2(3\eta^2 - 1)/\eta. \quad (9)$$

Очевидно, что подобных точных решений уравнений Стокса указанным методом можно найти неопределённо много. Причём чем больше степень многочлена $Y(\eta)$, тем более точное, казалось бы, можно получить решение.

Определённость может внести то обстоятельство, что решения уравнений Стокса должны не только удовлетворять этим уравнениям только с формальной, чисто математической стороны, но и соответствовать картине некоторого реального течения, наблюдаемого в опытах. Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим ранее уже исследованное автором осесимметричное течение, для которого [11]:

$$f_3(\eta) = E_1(m + \eta). \text{ Здесь: } E_1, m = \text{const}. \quad (10)$$

Для этого решения уравнения Слэзкина оказывается, что: $Y(\eta) = C(1 - \eta^2)^E$, где C - неопределённая постоянная, здесь $E = E_1(1 - m)/4$. Решение (9) безвихревое, т.к. вторая производная от $f_3(\eta)$ равна нулю.

Траектории течения, которому соответствует решение вида (8), будут выражаться согласно (5) как

$$R = C/[E_1(m + \eta)]. \quad (11)$$

Переходя к декартовой системе координат заменой: $x^2 + y^2 = R^2$, $\cos \theta = \eta = y/R$, получим следующее выражение для уравнения траекторий:

$$x^2 + y^2 = (C_0 - x/m)^2. \quad (12)$$

Здесь $C_0 = C/(E_1 m)$ – новая постоянная. При $m^2 = 1$ уравнение (12) представляет собой уравнение семейства парабол, пересекающих ось симметрии и пересекающих ось симметрии в точке $2 C_0$:

$$y^2 = 2 C_0 (C_0/2 - x). \quad (13)$$

Если же $m^2 \neq 1$, то уравнение (12) может быть преобразовано и представлено в виде:

$$\frac{[x + C_0 m / (m^2 - 1)]^2}{C_0^2 m^4 / (m^2 - 1)^2} + \frac{y^2}{C_0^2 m^2 / (m^2 - 1)} = 1. \quad (14)$$

Согласно [14] траектории течения, соответствующие решению (9) представляют собой в зависимости от значения m либо семейство эллипсов (при $m^2 > 1$), либо семейство гипербол (при $m^2 < 1$). В любом из этих случаев все траектории пересекают ось симметрии и поэтому могут быть интерпретированы как линии тока при течении между пространством с жидкостью или газа и пористой боковой поверхностью трубки, ось которой совпадает с осью координат. При $m^2 > 1$ уместно рассматривать как линии тока в виде эллипсов при вытекании из боковой поверхности пористой трубки слева, и втекания справа, как на рисунке 1. Параболические траектории (при $m^2 = 1$) можно интерпретировать с учётом знаков для V_R и V_θ как линии тока вытекания из боковой поверхности центральной пористой трубки в окружающую жидкость. Коэффициент C_0 играет роль масштабного фактора. Чем больше C_0 , тем на большем удалении от начала координат расположена траектория течения.

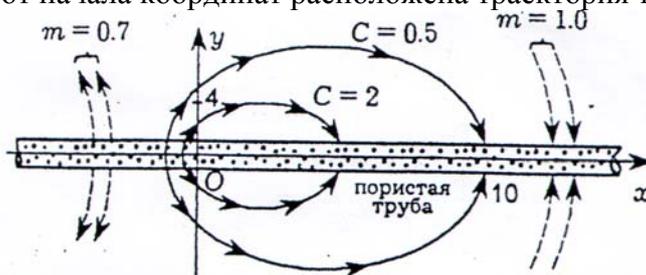


Рисунок 1 – Схема линий тока, соответствующих линейному точному решению уравнения Слэзкина Н.А. для осесимметричных течений при разных значениях параметра m . Траектории имеют форму парабол при $m = 1$, эллипсов при $m > 1$, гипербол при $m < 1$

Оказывается, что при такой трактовке линии тока втекания и вытекания вязкой жидкости имеют различные траектории, т.е. движение вязкой среды оказывается необратимым. В виду новизны полученных результатов автор пытался найти в литературе описание соответствующих опытов, однако сведений о таких опытах найти не удалось. Поэтому была проведена серия опытов по наблюдению характера течения воды как между соосными пористыми цилиндрами с центральной пористой трубкой, которая была заглушена с одного конца, а из другого конца закачивалась или отбиралась вода. В целом опыты проводились так, что обеспечивали предполагаемое течение воды согласно схеме рисунка 1. Достаточно подробное описание постановки опытов и их результатов содержится в ряде публикаций [3, 11, 12, 13].

Результаты опытов показали (помимо фотографий и зарисовок течений результаты фиксировались видеоклипами), что характер течения воды из окружающего пространства в пористую боковую поверхность трубки, по крайней мере качественно, соответствует схеме рисунка 1 при всех достигнутых в опытах скоростях течения. Однако ламинарное истечение из боковой поверхности трубки в окружающую воду при любых, даже самых малых, скоро-

стях оказалось неосуществимым, т.к. наблюдаемое истечение воды всегда приобретало только беспорядочный, турбулентный режим. Так, например, при «проталкивании пробки» с окрашенной водой через трубку уже при малых, «ползучих» скоростях наблюдалось неравномерное, звёздчатое втекание окрашенной жидкости в окружающую прозрачную воду (фото на рисунке 2) с последующим беспорядочным перемешиванием. В то же время при внесении окрашенных капель в окружающую трубку воду в режиме всасывания через неё воды наблюдалась явная ламиниризация течения (фото рисунок 3).

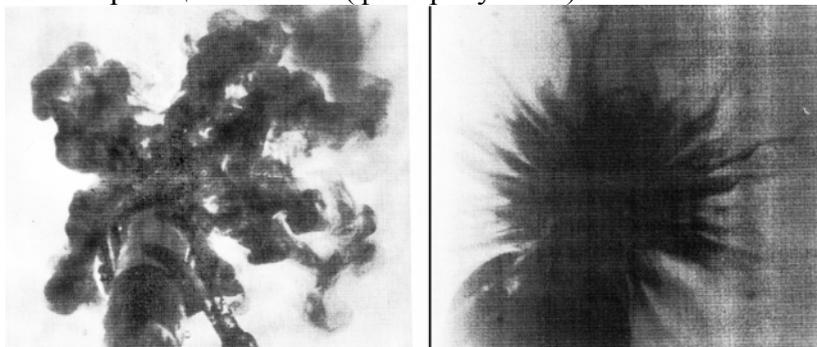


Рисунок 2 – Фотография истечения подкрашенной воды из боковой поверхности пористой трубки в окружающую неподвижную прозрачную воду

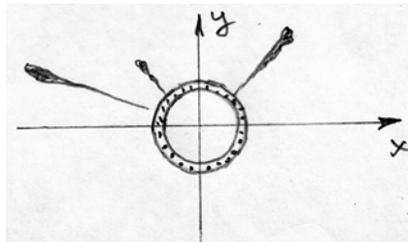


Рисунок 3 – Картина течения окрашенных капель воды, внесённых в прозрачную воду, в режиме всасывания воды через боковую поверхность пористой трубки

В целом итоги опытов однозначно свидетельствуют о том, что реальные течения при сходящихся траекториях ламинарны, а при расходящихся – беспорядочны, турбулентны. Точнее, ламинарное движение вязкой жидкости по расходящимся траекториям невозможно. Реальные траектории однозначно соответствуют не схеме рисунка 1, а только схеме рисунка 4. Втекание воды в боковую пористую поверхность трубки происходит всегда в ламинарном режиме, но вытекание при той же скорости – только в турбулентном.

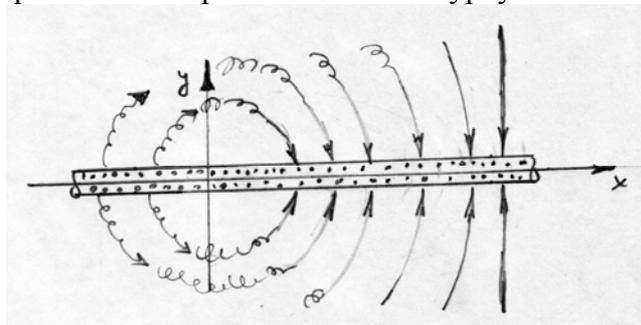


Рисунок 4 – Схема фактических линий тока реальных течений при осесимметричном течении согласно рисунку 1. Ламинарный режим течения наблюдается только в режиме всасывания

Другими словами, течение жидкости ламинируется при ускоренном движении жидких частиц аналогично, например, течению воды в реках и ручьях в суженных местах.

Опыты также показали, что в окружающей трубку воде практически всегда (если только время отстаивания не превышало суток или более) сохранялись следы завихрённости, ко-

торая искривляла траектории втекающей воды. Однако траектории втекающей воды «выпрямлялись» перед поступлением в боковую поверхность трубки или цилиндра и становились приблизительно перпендикулярными этой поверхности.

Явление длительного сохранения слабой остаточной завихрённости в объёме залитой в ёмкость воды известно давно, хотя и необъяснено. Так, Шиллер [14] указывает, что, несмотря на, казалось бы, слабую остаточную завихрённость, значение числа Рейнольдса в круглой трубе, вода в которую поступает из ёмкости достаточно большого размера, сильно зависит от времени отстаивания воды в ёмкости. Значение критического числа Рейнольдса может меняться примерно от $Re = 950$ для свежезалитой воды и примерно до $Re = 25\ 000$, причём последнее значение наблюдается при отстаивании воды в течение трёх суток и более. Таким образом, один из важнейших критериев современной гидравлики может меняться при прочих равных условиях более чем в 25 раз. Заметно уменьшить влияние остаточных вихрей при наполнении ёмкости можно использованием капельного метода, когда вода в ёмкость заливается не струёй, а по каплям, с помощью лейки в виде душа. Однако этот способ заполнения сильно удлиняет проведение опытов.

Описанная существенная разница в характере траекторий втекающей и вытекающей через пористую цилиндрическую боковую поверхность воды должна иметь теоретическое обоснование. И оно находится, если принять во внимание закон сохранения энергии для жидкой частицы, в форме Бернулли [1].

Действительно, рассмотрим течение в боковую поверхность (или из боковой поверхности) трубки согласно схеме рисунка 1 на удалении от начала координат, где линии тока как эллиптического типа, так и параболического или гиперболического типов можно считать прямыми. Тогда течение, рассматриваемое в поперечном сечении, будет соответствовать классическим линиям тока или источника [1] в виде пересекающихся в одной точке прямых линий (лучей, выходящих из начала координат). Рассмотрим на одной из линий тока две точки - M_1 и M_2 . Обозначим скорости движения жидкости в точках соответственно через V_1 и V_2 , а давления – соответственно через P_1 и P_2 (рисунок 5).

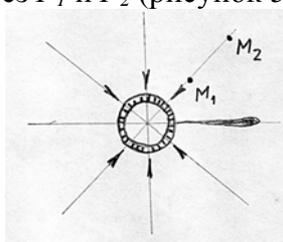


Рисунок 5 – Характер линий тока при всасывании воды в боковую пористую поверхность цилиндра. Линии тока соответствуют линиям плоского точечного стока

При движении жидкости вдоль прямолинейных, пересекающихся в одной точке траекторий, движение среды происходит аналогично картине движения плоского безвихревого течения при так называемой идеальной (не имеющей вязкости) жидкости. Такое течение называют источником (стоком) [1]. Поэтому можно считать, что для этого течения применим интеграл Бернулли, смыслом которого является равенство суммы кинетических и потенциальных энергий жидкой частицы при движении по траектории. Отсюда, считая жидкость однородной, плотностью ρ и считая, что движение происходит на одном уровне, т.е. пренебрегая изменением потенциальной энергии положения, получим согласно [1]:

$$V_1^2/2 + P_1/\rho = V_2^2/2 + P_2/\rho = \text{const.} \quad (15)$$

Пусть точка M_2 неопределённо удалена от начала координат, а точка M_1 – близка (рисунок 5). Тогда, считая по-прежнему жидкость несжимаемой, получим, что V_2 на удалении близка к нулю, а давление P_2 близко к некоторому постоянному значению P_0 . Пренебрегая в силу малости V_2 по сравнению с V_1 , получим из предыдущего выражения:

$$(P_1 - P_2)/\rho = -V_1^2/2 < 0. \quad (16)$$

Отсюда очевидно, что в любой точке траекторий указанного течения $P_1 < P_2$.

Таким образом, давление вблизи начала координат при движении по расходящимся прямым лучам всегда должно быть меньше, чем на удалении. Поэтому жидкость согласно Бернулли может только всасываться, но не вытекать из боковой пористой поверхности трубки в окружающую среду, если рассматривать условие ламинарности течения. И это имеет место при любых скоростях, при любых числах Рейнольдса, достаточно обоснованное значение которого подсчитать оказывается для данного течения невозможно, так как силы вязкости для этого течения согласно теории равны нулю, что было бы интересно подтвердить опытными данными о потерях энергии на подобное движение.

Становится ясно, что учёт того, что уравнение Слѣзкина, как и система уравнений Стокса, представляют собой описание физического явления со всеми сопутствующими ограничениями, вносит заметные коррективы. С учётом этого продолжим исследование уравнения Слѣзкина, разделив возможные решения этого уравнения на два типа. К первому типу отнесём такие, которые могут быть истолкованы как траектории течения между боковой поверхностью пористой трубки на оси течения и окружающей жидкостью. Ко второму типу отнесём такие, которые могут быть истолкованы как струйные. Для траекторий струйного типа при малых углах θ траектории должны быть направлены под малым углом к оси течения, а для траекторий первого типа – наоборот, под прямым углом. Выражая это аналитически, получим:

$$\operatorname{tg} \varphi = V \theta / V_R = f(\eta) (1 - \eta)^{-1/2} / f^1(\eta) \rightarrow 0 \text{ при: } \eta \rightarrow 1; \theta \rightarrow 0.$$

С учётом выражения (2) для $f(\eta)$, выражая $f(\eta)$ через многочлены $Y(\eta)$, а также с учётом того, что $Y(\eta)$ – многочлен степени выше первой, придѐм к выводу, что это условие всегда выполняется для многочленов $Y(\eta)$ любой степени. Напротив, если рассмотреть значение $f(\eta)$ в виде линейной функции (9), то окажется, что при $\eta \rightarrow 1 \operatorname{tg} \varphi \rightarrow \infty$. Другими словами, только линейное выражение для функции $f(\eta)$ даёт непротиворечивую возможность истолковать траектории течения в качестве траектории течения жидкости между боковой поверхностью пористой трубки на оси течения и окружающей жидкостью (или поверхностями пористыми коаксиальными цилиндрами). Отметим также, что только линейное выражение для f даёт ещё нулевое значение вихря скорости в полном соответствии с общей теорией [3].

Теперь рассмотрим расход жидкости в области, ограниченной сферой с центром в начале координат и радиусом, равным R . Очевидно, что расход жидкости, который создаѐтся струѐй, расположенной в начале координат, должен быть конечен. Этот расход Q можно определить как сумму элементарных расходов dq , определяемых произведением V_R на площадь $dS = 2\pi R^2 d\theta$ дифференциально-малого шарового пояса (рисунок 6): С учётом (4) получим:

$$dq = V_R dS = \{-v f^1(\eta)/R\} \times (2\pi R) \times R d\theta.$$

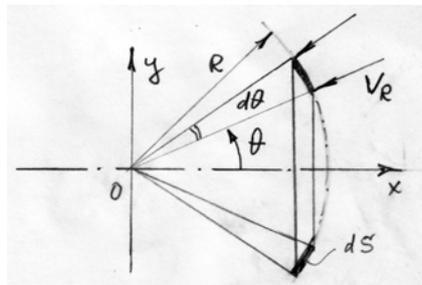


Рисунок 6 – К определению расхода через малый шаровой пояс площадью dS при осесимметричном автомоделльном течении

Таким образом, расход оказывается пропорциональным радиусу удаления от начала

координат R . Это вызывало с самого начала появления первого решения уравнения Слэскина, понимаемого как для струйного течения, некоторое затруднение. Сам Слэскин трактовал указанный результат как «случай импульсного источника, т.е. такого течения, при котором поток радиальной компоненты вектора импульса через все сечения элементарного конуса с вершиной в начале координат остаётся постоянным» [15].

Это объяснение не отменяет того противоречивого факта, что расход жидкости от струйного источника неограниченно растёт с удалением от начала координат. Именно в силу внутренней противоречивости «струйных» точных решений следует считать, что их наблюдение в опытах не осуществимо, и они не зафиксированы в экспериментальных работах.

Теперь применим «расходный» критерий к неструйным осесимметричным течениям согласно [11]. Расход жидкости dq на длине dR центральной тонкой трубки (рисунок 7) постоянным радиусом $R \sin \theta$ при малых углах θ равен:

$$dq = 2 \pi R \sin \theta \times V_{\theta} dR = -2 \pi \nu E_1 (m + 1) dR.$$

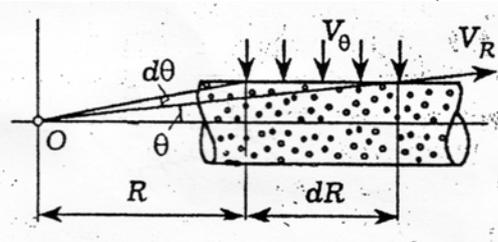


Рисунок 7 – К вычислению расхода жидкости, всасываемой боковой поверхностью трубки с равномерной пористостью стенки

Таким образом, коэффициент E_1 может быть истолкован как величина, пропорциональная удельному линейному расходу dq/dR через стенки центрально расположенной трубки с пористой стенкой. Общий расход из боковых стенок пористой трубки на её длине R будет равен: $Q_1 = -2 \pi \nu E_1 (m + 1)R$.

Если провести сферу с центром в начале координат с центром радиусом R , то расход жидкости Q_2 через эту сферу будет равен произведению радиальной составляющей скорости V_R (которая для неструйного решения не зависит от полярного угла θ) и площади сферы при любом значении m :

$$Q_2 = -4 \pi R^2 V_R = -4 \pi \nu E_1 R. \quad (17)$$

Таким образом, для параболических траекторий (при $m = 1$) получим: $Q_1 = Q_2$. Коэффициент E_1 можно истолковать как величину, пропорциональную удельному расходу истекающей из центральной оси среды, либо как величину, пропорциональную расходу через поверхность единичного шара, имеющего центр в начале координат при течении жидкости по параболическим траекториям. Поскольку физические величины (плотность, объём и т.д.) обычно считают положительными, то и расход Q должен быть больше нуля, а тогда для параболического течения ($m = 1$) должно быть $E_1 < 0$.

Для случая $m \neq 1$ описанная трактовка усложняется, т.к., например, для эллиптических траекторий центральных «трубок» уже две, причем, когда через боковую поверхность одной из них происходит втекание среды, то через вторую – вытекание. Если провести в пространстве сферу радиуса R с центром в начале координат, то для случая эллиптического течения (для траекторий течения вдоль линий эллиптического типа) получим прежнее значение расхода жидкости (17) через поверхность сферы.

Однако точка разделения зоны вытекания из боковой поверхности теоретически бесконечно тонкой «трубки» и втекания в боковую поверхность центральной «трубки» внутри шара радиуса R (рисунок 1) лежит не в центре координат, а в точке, удалённой от него на расстояние $C m / (m^2 - 1)$. Поэтому внутри шара происходит как вытекание жидкости из боковой поверхности дифференциально-тонкой «трубки», так и втекание в эту поверхность. Если принять, что центр эллиптических траекторий смещён вправо от начала координат, то $C m <$

0.

Пусть радиус воображаемого шара мал и, кроме того, $R < C m / (m^2 - 1)$. Для рассматриваемого эллиптического типа течения скорость истечения из боковой поверхности «трубки» справа и слева от начала координат будет различаться вследствие изменения знака переменной $\eta = \cos \theta$. Если же радиус воображаемой сферы больше указанного, то часть эллиптических траекторий будет располагаться целиком внутри воображаемого шара, а расход через поверхность шара будет меньше расхода через боковую поверхность «трубки». Однако и в этом случае расход через боковые поверхности «трубки» справа и слева от начала координат пропорционален их длине, в свою очередь пропорциональной радиусу воображаемого шара с центром в начале координат. Таким образом, как течение по эллипсам, так и по параболам допускает непротиворечивое представление при условии, что «дифференциально-тонкая центральная трубка» в действительности заменяется трубкой с конечным диаметром. При такой аналогии решение, не имеющее бесконечных значений своих характеристик, не приходится рассматривать в бесконечно большой области. Бесконечные значения параметров течения, например, скорости) теоретически могут быть только в конечном числе областей, которые можно изолировать в ограниченной области. Только тогда течение физически реализуемо.

Для случая гиперболических траекторий (наблюдается только втекание в центральную ось течения) приходится считать, что имеется наличие зоны по длине «трубки», в которой истечение вообще отсутствует.

Как уже отмечалось, для физически реализуемых течений требования интеграла Бернулли исключают возможность для ламинарных течений из «трубки», оставляя такую возможность лишь для течений, направленных через боковую поверхность «трубки» в сторону центральной оси, т.е. оставляет для ламинарного режима возможность реализовать только течения втекания, при которых скорость движения жидких частиц растёт вплоть до встречи с «поверхностью трубки», роль которой в действительности играет цилиндр с пористой стенкой.

Таким образом, рассмотренное точное решение уравнения Слэзкина, которое является частным случаем системы уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости Навье-Стокса, допускает возможность описания осесимметричного движения вязкой среды, например, между коаксиальными цилиндрами с пористыми стенками. Вместе с тем существует бесконечно большое число аналитически точных решений уравнения Слэзкина, которые, однако, при попытке идентифицировать их как модель течения реальной жидкости, оказываются внутренне противоречивыми.

Особо отметим невозможность получить из уравнения Слэзкина шарового течения, хотя такое течение должно быть не только осесимметричным, но для такого течения скорость движения жидкой частицы вообще не должна зависеть от её углового положения относительно осей координат. Поэтому для такого течения должно быть $dV/d\theta = 0$, т.е. $dV/d\eta = 0$. Но тогда в соответствии с (4) должно быть $f(\eta) = 0$. Отсюда и V_R , пропорциональное производной от $f(\eta)$, тоже равно нулю. Другими словами, ненулевого автомодельного решения уравнения Навье-Стокса не существует, несмотря на то, что, казалось бы, шаровые течения должны являться образцами подобия.

Экспериментальные наблюдения за формой пульсирующих кавитационных пузырьков показывают, что эти пузырьки не имеют строго шаровидной формы. Форма их пульсирующей поверхности, согласно кадрам видеозаписей, представляет собой, скорее, что-то промежуточное между шаром и кубом, т.к. форма пузырьков хотя и напоминает сферу, но одновременно явно просматриваются уплощённые симметричные участки. Опыты автора с твёрдыми шарами (с неизменной шаровой поверхностью) позволили обнаружить новые неожиданные виды движения [16]. К сожалению, это явление недостаточно изучено.

Таким образом, уверенность американских авторов «Феймановских лекций» в том, что в уравнениях Навье-Стокса «всё есть», но «нет ещё способа вытащить», недостаточно обосновано. Вместе с тем давно наблюдаются течения, которые по всем основаниям можно рассматривать как осесимметричные, но которые не описываются уравнением Слэзкина. В качестве примера приведём течение, возникающее при вытекании жидкости из резервуара в трубу (рисунок 8). Такое течение имеет место, например, при выполнении опыта Рейнольдса для определения критической скорости перехода режима течения в трубе из ламинарного в турбулентный [14]. Очевидно, что это течение не может быть автомодельным хотя бы вследствие того, что значения скоростей движения частиц и полярного радиуса различны при одном и том же значении полярного угла θ (рисунок 8). Т.е. сферическая система координат не может соответствующим образом описывать подобные течения.

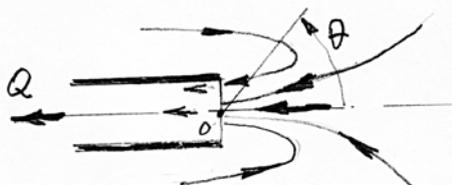


Рисунок 8 – Линии тока при ламинарном втекании жидкости из резервуара в круглую трубу

У автора при знакомстве с опытным материалом по траекториям течений сложилось впечатление, что если какое-нибудь явление не имеет теоретического объяснения, то его как бы не существует в природе. Так, в литературе практически не обсуждается существование так называемых вихрей Гертлера (рисунок 9), имеющих плоскость вращения, перпендикулярную обычно наблюдаемым вихрям. И это несмотря на то, что наблюдение за обтеканием воздуха цилиндра показывает наличие интенсивного и периодического закручивания вихрями воздуха вдоль оси цилиндра, в результате чего коэффициент сопротивления цилиндра периодически меняется примерно вдвое (согласно опытам ЦАГИ) вдоль оси цилиндра вплоть до скоростей, достигающих 0,5 скорости звука [17].

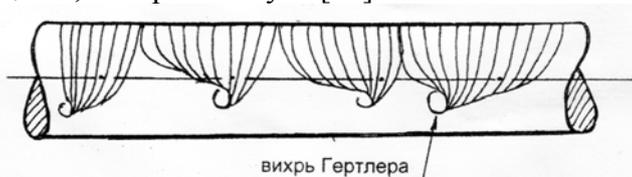


Рисунок 9 – Вихри Гертлера, обнаруживаемые по отклонению шелковинок при продувке цилиндра в аэродинамической трубе. Зарисовка положения шелковинок, приклеенных на цилиндре. С фотографий в опытах ЦАГИ [17]

В качестве другого подобного явления можно указать на плоское течение в «яме» или «каверне» (рисунок 10). Это течение вызывало интерес около полувека вследствие того, что подобное течение вязкой жидкости имеет место в так называемых лабиринтных уплотнениях, широко встречающихся в технике. Вследствие отсутствия точного решения применяемые численные методы приводят, в зависимости от автора и метода, к различию количественных характеристик такого течения в несколько раз и также к качественным различиям. Так, например, траектории течения в каверне согласно [1] выходят за границы каверны (рисунок 11), а согласно другим авторам - нет [2, 18]. Можно также отметить, что со временем траектории течения в каверне меняются даже у одного и того же автора [1 и 19]. Фактическое же течение жидкости в каверне (рисунок 12) имеет, согласно опытам автора, принципиально периодический характер, причём волнообразование на границе каверны и потока жидкости из щели имеет место уже при самых малых скоростях (при значениях числа Рейнольдса в щели

гораздо меньше, чем в круглой трубе). Кроме того, оно имеет неплоскостный характер. Более подробное описание этого течения не даётся, т.к., к сожалению, экспериментальных наблюдений других авторов для сравнения результатов найти не удалось.

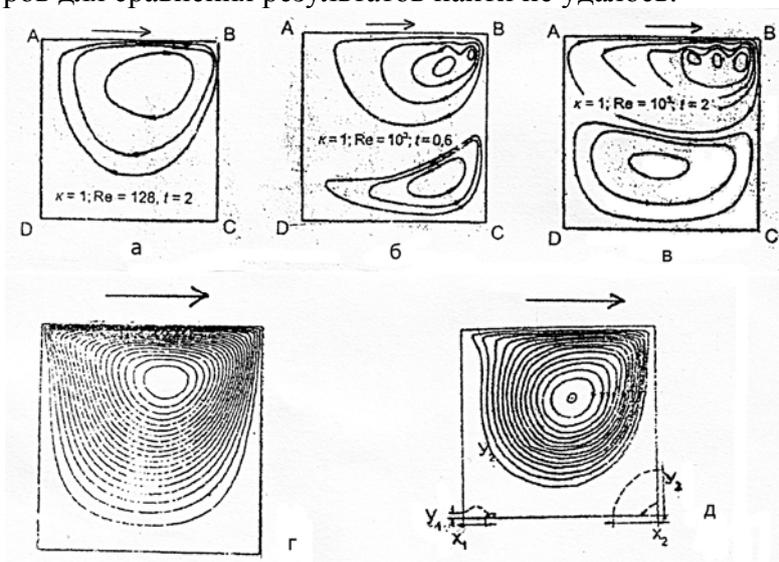


Рисунок 10 – Линии тока жидкости, увлекаемой верхней стенкой в каверне: по Симуни: при а – $Re = 128$, б – $Re = 1000$, в – $Re = 1000$ (1965 г), г – по Р.Темам при разбиении области течения на 512 треугольников (1981г), д – по Полежаеву, $Re = 400$ (1987г) расчёт на ЭВМ при различном числе шагов разбиения интервалов интегрирования методом конечных разностей

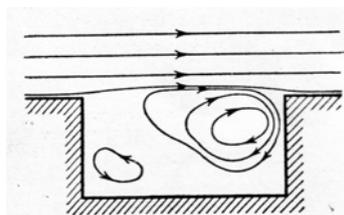


Рисунок 11 – Расчётные линии тока в каверне согласно [1]

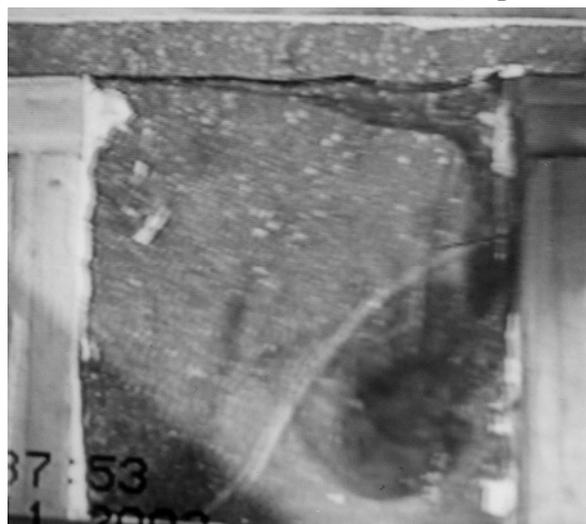


Рисунок 12 – Фотография подкрашенного потока, вытекающего из щели в каверну. Колебания границы подкрашенного потока начинаются с самых малых скоростей при ламинарности движения в каверне. Усиление колебаний при увеличении скорости течения происходит вплоть до полной турбулизации течения. Часть подкрашенного потока после контакта с вертикальной стенкой медленно опускается вниз

Можно ещё отметить, что попытки наблюдать струйное движение в ламинарном режиме при самых малых, «ползучих», скоростях при истечении подкрашенной воды из отверстия иглы, помещённой в протекающую между двумя пористыми цилиндрами воду (режим так называемого «спутной струи»), выявили периодичность такого истечения с образованием траектории истечения, которую можно считать и ламинарной и неустановившейся одновременно (рисунок 13).



Рисунок 13 – Характер автоколебательного течения окрашенной струйки толщиной около 0,7 мм, вводимой из медицинской иглы в воду, находящуюся вокруг пористого цилиндра, при всасывании этой воды через боковую стенку цилиндра. Вода движется слева направо, и струйка всасывается вместе с водой

В итоге всего можно сделать заключение, что проведённая работа позволила выявить, что трактовка решений уравнения Слэзкина для осесимметричных установившихся течений вязкой жидкости как траекторий струйных течений несправедлива. Выявлено также, что, несмотря на бесконечное множество аналитических точных решений уравнения Слэзкина, являющегося частным случаем для автомодельных осесимметричных течений системы уравнений Навье-Стокса, физически реализуемым аналитическим решением оказывается только одно, и оно описывает лишь движение жидкости между стенками центральной трубки с пористыми стенками и окружающей трубку жидкостью.

В качестве другого вывода можно указать на то, что аналитические решения, получаемые из уравнений движения Навье-Стокса, можно идентифицировать с реальными течениями только с учётом дополнительных условий, в том числе, с уравнением сохранения энергии Бернулли.

Наконец, можно отметить, что, ввиду малого перечня возможных траекторий течения вязких несжимаемых сред в подавляющем большинстве случаев (при заданных граничных условиях), имеет место только неустановившийся режим течений, причём пространственный. Плоские течения возможны буквально в единичных случаях.

Сказанное позволяет сделать вывод о том, что имеются основания для того, чтобы считать, что при описании движений сплошных сред уравнения Навье-Стокса для некоторых видов течений (вдоль прямых линий, по концентрическим окружностям, при втекании в пористую боковую поверхность трубы) довольно точно, по крайней мере, качественно верно описывают явления, а в других случаях (обтекание шара, цилиндра и др.) не являются достаточно точной математической моделью движения, т.к. они не учитывают некоторые неизвестные особенности движущейся сплошной среды, обладающей свойствами ньютоновской вязкости.

Литература

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М, Изд-во «Наука», 1986.
2. Выскребцов В.Г. Гидромеханика в новом изложении. М, Изд-во «Спутник+», 2001.
3. Su T.C. Obtaining the exact solutions of the Navie – Stokes equations. International journal of non-linear mechanics. Vol 20, N1, G. Britain, 1985, pp. 9 – 19.
4. Ляв А. Математическая теория упругости. М.-Л., 1935.
5. Фейнман Ф., Лейтон Р., Сэндс Н. Фейнмановские лекции по физике, т.7, Физика сплошных сред, М, 1966.
6. Слэзкин Н.А. Об одном случае интегрируемости полных дифференциальных уравнений вязкой жидкости. «Учёные записки МГУ». 1934, вып.2.

7. Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике. Изд-во «Наукова думка», Киев, 1974.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидромеханика. М. Изд-во «Наука», 1986.
9. Ландау Л.Д. Новое точное решение уравнений Навье-Стокса. «Доклады АН СССР». 1944, том 44, стр. 311 – 314.
10. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М, Изд-во «Наука», 1977.
11. Выскребцов В.Г. Новые точные решения уравнений Навье-Стокса для осесимметричных автомодельных течений жидкости. «Математические методы и физико-математические поля», Львов, Изд-во Национальной АН Украины, Том 41, №3, 1998, стр. 44 – 51.
12. Выскребцов В.Г. Неустойчивость расходящихся и устойчивость сходящихся течений потоков воды, Сборник докладов: «Системные проблемы качества, математического моделирования, информационных и электронных технологий», часть 3, Секция №5, Москва-Сочи, М, МГТУ «МАМИ», 2005, стр. 36 – 40.
13. Выскребцов В.Г. Неустойчивость расходящихся и устойчивость сходящихся течений потоков воды. Экспериментальные наблюдения. Материалы XIII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г.Горшкова, избранные доклады, Москва, изд-во МАИ, 2007, стр. 87 – 92.
14. Шиллер Л. Движение жидкости в трубах. ОНТИ НКТП СССР, М-Л, 1936.
15. Слѣзкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. Гос. изд.-во техн.-технич. литературы, М, 1955.
16. Выскребцов В.Г. Влияет ли вращение Земли на спиральное движение воздушных пузырьков в воде. Материалы Международной конференции и Российской научной школы, «Системные проблемы качества, математического моделирования, информационных и электронных технологий», Часть 3, секция №5 «Системные концепции в экономике, науке, технике и экологии», Москва-Сочи, М, Изд –во МГТУ «МАМИ», 2009г.
17. Короткин А.И. О трёхмерном характере обтекания кругового цилиндра. «Учёные записки ЦАГИ», 1973, том IV, №4.
18. Полежаев В.И., Простомолотов А.И., Федосеев А.И. «Метод конечных элементов в механике жидкости» в «Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа». М, 1987.
19. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Учебник для ВУЗов. 7 издание. Изд.-во «Дрофа», М, 2003.

Флаттер пластины переменной толщины

к.ф.-м.н. доц. Кудрявцев Б.Ю.
МГТУ «МАМИ»

8 (495) 223-05-23, buk77777@tochka.ru

Аннотация. С использованием линейной поршневой теории исследована устойчивость прямоугольной пластины переменной толщины, находящейся в сверхзвуковом потоке газа. Найдена критическая скорость потока, решена задача оптимизации распределения толщины.

Ключевые слова: флаттер, сверхзвуковой поток газа, пластина переменной толщины, устойчивость.

Задача о флаттере пластины постоянной толщины изучена достаточно подробно как с использованием линейной поршневой теории [1,2], так и в случае некоторых других новых постановок [3-7]. При этом работ, где исследовалась бы устойчивость в потоке газа пластины переменной толщины или жесткости, довольно мало [8-11], и рассмотрена в них только бесконечная полоса. В предлагаемой статье представлен вариант решения задачи линейного флаттера прямоугольной пластины переменной толщины,