7. Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике. Изд-во «Наукова думка», Киев, 1974.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидромеханика. М. Изд-во «Наука», 1986.
9. Ландау Л.Д. Новое точное решение уравнений Навье-Стокса. «Доклады АН СССР». 1944, том 44, стр. 311 – 314.
10. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М, Изд-во «Наука», 1977.
11. Выскребцов В.Г. Новые точные решения уравнений Навье-Стокса для осесимметричных автомодельных течений жидкости. «Математические методы и физико-математические поля», Львов, Изд-во Национальной АН Украины, Том 41, №3, 1998, стр. 44 – 51.
12. Выскребцов В.Г. Неустойчивость расходящихся и устойчивость сходящихся течений потоков воды, Сборник докладов: «Системные проблемы качества, математического моделирования, информационных и электронных технологий», часть 3, Секция №5, Москва-Сочи, М, МГТУ «МАМИ», 2005, стр. 36 – 40.
13. Выскребцов В.Г. Неустойчивость расходящихся и устойчивость сходящихся течений потоков воды. Экспериментальные наблюдения. Материалы XIII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г.Горшкова, избранные доклады, Москва, изд-во МАИ, 2007, стр. 87 – 92.
14. Шиллер Л. Движение жидкости в трубах. ОНТИ НКТП СССР, М-Л, 1936.
15. Слёзкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. Гос. изд.-во техн.-технич. литературы, М, 1955.
16. Выскребцов В.Г. Влияет ли вращение Земли на спиральное движение воздушных пузырьков в воде. Материалы Международной конференции и Российской научной школы, «Системные проблемы качества, математического моделирования, информационных и электронных технологий», Часть 3, секция №5 «Системные концепции в экономике, науке, технике и экологии», Москва- Сочи, М, Изд –во МГТУ «МАМИ», 2009г.
17. Короткин А.И. О трёхмерном характере обтекания кругового цилиндра. «Учёные записки ЦАГИ», 1973, том IV, №4.
18. Полежаев В.И., Простомолотов А.И., Федосеев А.И. «Метод конечных элементов в механике жидкости» в «Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа». М, 1987.
19. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Учебник для ВУЗов. 7 издание. Изд.-во «Дрофа», М, 2003.

Флаттер пластины переменной толщины

к.ф.-м.н. доц. Кудрявцев Б.Ю.
МГТУ «МАМИ»
8 (495) 223-05-23, buk77777@tochka.ru

Аннотация. С использованием линейной поршневой теории исследована устойчивость прямоугольной пластины переменной толщины, находящейся в сверхзвуковом потоке газа. Найдена критическая скорость потока, решена задача оптимизации распределения толщины.

Ключевые слова: флаттер, сверхзвуковой поток газа, пластина переменной толщины, устойчивость.

Задача о флаттере пластины постоянной толщины изучена достаточно подробно как с использованием линейной поршневой теории [1,2], так и в случае некоторых других новых постановок [3-7]. При этом работ, где исследовалась бы устойчивость в потоке газа пластины переменной толщины или жесткости, довольно мало [8-11], и рассмотрена в них только бесконечная полоса. В предлагаемой статье представлен вариант решения задачи линейного флаттера прямоугольной пластины переменной толщины, Рассмотрим прямоугольную пластину длины l_1 и ширины l_2 с шарнирно опертыми краями. В прямоугольной системе координат пластина занимает область $\{0 \le x \le 1/s, 0 \le y \le 1\}$, ось OX направлена по стороне длины l_1. Пластина обтекается сверхзвуковым потоком газа. Вектор скорости потока лежит в плоскости пластины, угол между ним и осью OX обозначим через θ. Согласно [4] линейное уравнение колебаний будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(f^3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right)+2(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(f^3\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(f^3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right)+$$

$$\frac{\kappa p l_2^3}{D_0}\left(\frac{l_2}{c_0}\frac{\partial w}{\partial t}+M\cos\theta\frac{\partial w}{\partial x}+M\sin\theta\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\rho h l_2^4}{D_0}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$$

с соответствующими граничными условиями,
где: p и c_0 – давление и скорость звука в покоящемся газе, w - прогибы пластины,

$h = h_0 \cdot f(x,y)$ - ее толщина, ρ - плотность материала,

κ - показатель политропы, $D_0 = \dfrac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)}$, E – модуль Юнга,

ν - коэффициент Пуассона, v – скорость потока, $M = \dfrac{v}{c_0}$ - число Маха.

Решения будем искать в виде

$$w = \exp(\omega t)(c_1 \sin \pi s x \sin \pi y + c_2 \sin \pi s x \sin 2\pi y + c_3 \sin 2\pi s x \sin \pi y + c_4 \sin 2\pi s x \sin 2\pi y),$$

$$c_1, c_2, c_3, c_4 \in R.$$

Проведя процедуру Бубнова-Галеркина, получим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Приравняв определитель системы к нулю, будем искать критическую скорость потока $v_{кр}$ как наименьшую скорость v, при которой комплексная частота ω переходит в правую полуплоскость.

В качестве примера рассмотрим стальную пластину, находящуюся в потоке воздуха, при следующих значениях параметров:

$$p = 10^5 \, па, \kappa = 1{,}4, c_0 = 330 м/с, E = 2\cdot 10^{11} па, \rho = 8\cdot 10^3 кг/м^3, \nu = 0{,}3,$$

$$h_0 = 0{,}001 м, l_2/h_0 = 250.$$

В таблицах 1 и 3 приведены значения $M_{кр} = v_{кр}/c_0$ для квадратной, а в таблицах 2 и 4 – для удлиненной ($s = 2/3$) пластины при различных углах θ.

Возьмем сначала функцию f в виде:

$$f = 1 + \varepsilon_1 \cos 2\pi s x + \varepsilon_2 \cos 2\pi y.$$

При таком выборе материал будет концентрироваться либо к середине пластины, либо к соответствующим кромкам в зависимости от знака ε_i (таблицы 1 и 2).

Из таблиц видно, что утолщение к центру увеличивает критическую скорость, а к краям – понижает устойчивость. Наибольшую и наименьшую величину критическая скорость во всех случаях достигает при одинаковых минимальных и максимальных значениях ε_1 и ε_2 соответственно. Изменение концентрации материала пластины вдоль стороны, перпендикулярной потоку, играет большую роль, чем вдоль параллельной к нему. Удлинение пластины поперек потока усиливает эффект изменения толщины, а вдоль – смягчает. Неравномерное распределение материала вдоль одной стороны не оказывает заметного влияния на зависимость критической скорости от изменения толщины вдоль другой стороны. Для квадратной пластины изменение направления потока относительно кромок сохраняет вышеуказанные эффекты, при этом максимальное значение критическая скорость принимает при $\theta = 45^{\circ}$ [5].

Рассмотрим теперь несимметричное распределение толщины – утолщение от одного края к противоположному. Зададим функцию f:

$$f = 1 + \varepsilon_1 (2sx - 1) + \varepsilon_2 (2y - 1).$$

Таблица 1.

	0^0	30^0	45^0
$\varepsilon_1=0,\ \varepsilon_2=0$	3,23	3,52	3,69
$\varepsilon_1=0,\ \varepsilon_2=-0,01$	3,25	3,55	3,73
$\varepsilon_1=0,\ \varepsilon_2=0,01$	3,20	3,49	3,66
$\varepsilon_1=-0,01,\ \varepsilon_2=-0,01$	3,26	3,56	3,74
$\varepsilon_1=-0,01,\ \varepsilon_2=0$	3,24	3,53	3,73
$\varepsilon_1=-0,01,\ \varepsilon_2=0,01$	3,21	3,50	3,68
$\varepsilon_1=0,01,\ \varepsilon_2=-0,01$	3,25	3,53	3,68
$\varepsilon_1=0,01,\ \varepsilon_2=0$	3,22	3,50	3,66
$\varepsilon_1=0,01,\ \varepsilon_2=0,01$	3,19	3,47	3,64

Таблица 2.

	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
$\varepsilon_1=0,\ \varepsilon_2=0$	1,32	1.49	1.75	2,19	2,72
$\varepsilon_1=0,\ \varepsilon_2=-0,03$	1,34	1,51	1.78	2,11	2,74
$\varepsilon_1=0,\ \varepsilon_2=0,03$	1,30	1,47	1,73	2,16	2,70
$\varepsilon_1=-0,03,\ \varepsilon_2=-0,03$	1,35	1.53	1,81	2,28	2,84
$\varepsilon_1=-0,03,\ \varepsilon_2=0$	1,33	1,50	1,78	2,25	2,82
$\varepsilon_1=-0,03,\ \varepsilon_2=0,03$	1,31	1,48	1,76	2,22	2,80
$\varepsilon_1=0,03,\ \varepsilon_2=-0,03$	1,33	1,50	1,76	2,16	2,64
$\varepsilon_1=0,03,\ \varepsilon_2=0$	1,31	1,48	1,73	2,13	2,62
$\varepsilon_1=0,03,\ \varepsilon_2=0,03$	1,29	1,46	1,71	2,11	2,61

Таблица 3.

	0^0	45^0
$\varepsilon_1=0,\ \varepsilon_2=0$	3,23	3,69
$\varepsilon_1=0,\ \varepsilon_2=-0,05$	3,22	3,69
$\varepsilon_1=0,\ \varepsilon_2=0,05$	3,22	3,69
$\varepsilon_1=-0,05,\ \varepsilon_2=-0,05$	3,23	3,68
$\varepsilon_1=-0,05,\ \varepsilon_2=0$	3,24	3,69
$\varepsilon_1=-0,05,\ \varepsilon_2=0,05$	3,23	3,70
$\varepsilon_1=0,05,\ \varepsilon_2=-0,05$	3,23	3,70
$\varepsilon_1=0,05,\ \varepsilon_2=0$	3.24	3,69
$\varepsilon_1=0,05,\ \varepsilon_2=0,05$	3,23	3,68

Таблица 4.

	0^0	45^0	90^0
$\varepsilon_1=0,\ \varepsilon_2=0$	1,32	1,75	2,72
$\varepsilon_1=0,\ \varepsilon_2=-0,1$	1,31	1,74	2,74
$\varepsilon_1=0\ ,\ \varepsilon_2=0,1$	1,31	1,74	2,74
$\varepsilon_1=-0,1,\ \varepsilon_2=-0,1$	1,33	1,77	2,59
$\varepsilon_1=-0,1,\ \varepsilon_2=0$	1,33	1,77	2,56
$\varepsilon_1=-0,1\ ,\ \varepsilon_2=0,1$	1,33	1,77	2,59
$\varepsilon_1=0,1\ ,\ \varepsilon_2=-0,1$	1,33	1,76	2,59
$\varepsilon_1=0,1\ ,\ \varepsilon_2=0$	1,33	1,77	2,56
$\varepsilon_1=0,1\ ,\ \varepsilon_2=0,1$	1,33	1,76	2,59

Из результатов вычислений (таблицы 3 и 4) можно сделать следующие выводы. Для квадратной пластины при направлении потока, параллельном кромкам ($\theta = 0^\circ$), утолщение пластины вдоль потока в любую сторону (отклонение ε_1 от нулевого значения) способствует стабилизации, а поперек (отклонение ε_2 от нуля) – наоборот, уменьшению критической скорости. При $\theta = 45^\circ$ неравномерное распределение толщины вдоль потока (ε_1 и ε_2 одного знака) снижает устойчивость, а в перпендикулярном направлении (ε_1 и ε_2 разных знаков) – увеличивает критическую скорость, то есть «стреловидность» меняет эффект концентрации материала на противоположный. Для удлиненной пластины определяющую роль играет изменение толщины в направлении потока.

Для сравнения можно рассмотреть квадратную алюминиевую пластину ($E = 6{,}7 \cdot 10^{10}\,па, \rho = 2{,}7 \cdot 10^3\,кг/м^3, \nu = 0{,}36$, $h_0 = 0{,}00125м, l_2/h_0 = 200$) , взяв функцию f в виде :

$$f = 1 + \varepsilon_1 \cos 2\pi s x + \varepsilon_2 \cos 2\pi y\ .$$

Таблица 5.

	0^0	30^0	45^0
$\varepsilon_1=0,\ \varepsilon_2=0$	2,32	2,54	2,66
$\varepsilon_1=0,\ \varepsilon_2=-0,01$	2,35	2,56	2,69
$\varepsilon_1=0,\ \varepsilon_2=-0,01$	2,30	2,51	2,64
$\varepsilon_1=-0,01,\ \varepsilon_2=-0,01$	2,35	2,57	2,71
$\varepsilon_1=-0,01,\ \varepsilon_2=0$	2,33	2,55	2,69
$\varepsilon_1=-0,01\ \varepsilon_2=0,01$	2,31	2,52	2,66
$\varepsilon_1=0,01,\ \varepsilon_2=-0,01$	2,34	2,55	2,66
$\varepsilon_1=0,01,\ \varepsilon_2=0$	2,32	2,53	2,64
$\varepsilon_1=0,01,\ \varepsilon_2=-0,01$	2,30	2,50	2,62

Результаты вычислений $M_{кр}$ содержатся в таблице 5. Характер поведения критической скорости остается тем же, что и для стальной пластины. Таким образом, в данном случае не прослеживается принципиальная зависимость изменения критической скорости от коэффициента Пуассона , как это было для бесконечной полосы [8].

Перейдем теперь к несколько иной постановке задачи. Пусть два противоположных края пластины длины l_2 шарнирно оперты, третий и четвертый либо тоже свободно оперты, либо жестко заделаны. Толщина пластины будет переменной величиной $h = h_0 + \delta \cdot f(y)$, где $f(y)$ - дважды непрерывно дифференцируемая функция, а δ -малый параметр. Тогда цилиндрическую жёсткость с точностью до малых высшего порядка можно записать так:

$$D \approx \frac{E}{12(1-\nu^2)}(h_0^3 + 3h_0^2\delta f(y)) = D_0(1+\varepsilon f(y)) \text{, где } D_0 = \frac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)},\ \varepsilon = \frac{3\delta}{h_0}.$$

Согласно [4] линейное уравнение колебаний будет следующим:

$$(1+\varepsilon f(y))\Delta^2 w + 2\varepsilon f'(y)\frac{\partial}{\partial y}\Delta w + f''(y)\varepsilon\Delta w - (1-\nu)f''(y)\varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} +$$

$$+ M\frac{\kappa p l_2^3}{D_0}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta\right) + \frac{\kappa p l_2^4}{D_0 c_0}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\rho h l_2^4}{D_0}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Решения будем искать в виде

$$w = \exp(\omega t)(c_1 u_{m1}(sx)\sin\pi y + c_2 u_{m2}(sx)\sin\pi y),\ c_1, c_2 \in R,$$

где: u_{mj} - балочные функции, соответствующие различным способам закреплениям кромок и собственным частотам.

При нахождении критической скорости будем использовать, как и выше, метод Бубнова-Галеркина.

Для примера возьмем стальную пластину, находящуюся в потоке воздуха , выбрав функцию f в виде:

$$f(y) = \cos 2\pi y.$$

В таблице 6 приведены значения $M_{кр}$ для пластины с различными способами закрепления кромок. В первой строке содержатся результаты для пластины с четыремя шарнирно опертыми краями, во второй – с тремя, в третьей – с двумя.

Таблица 6.

	$s = 2/3, \theta = \pi/2$			$s = 1, \theta = 0$			$s = 2/3, \theta = 0$		
	$\delta = -10^{-5}$	$\delta = 0$	$\delta = 10^{-5}$	$\delta = -10^{-5}$	$\delta = 0$	$\delta = 10^{-5}$	$\delta = -3\cdot10^{-5}$	$\delta = 0$	$\delta = 3\cdot10^{-5}$
1	2,75	2,72	2,68	3,26	3,23	3,20	1,34	1,32	1,30
2	2,82	2,78	2,75	3,41	3,38	3,35	1,45	1,42	1,39
3	2,86	2,82	2,77	3,51	3,46	3,40	1,53	1,48	1,43

Для всех случаев закрепления кромок поведение критической скорости аналогично приведенному выше, то есть концентрация материала к середине пластины способствует стабилизации, а к краям – понижает динамическую устойчивость. Удлинение пластины поперек потока усиливает эффект изменения толщины, а вдоль – смягчает. При этом значения $M_{кр}$ для пластины с четыремя свободно опертыми кромками практически не отличаются от полученных без применения метода малого параметра.

Рассмотрим теперь несимметричное распределение толщины – утолщение от одного края к противоположному. Зададим функцию f:

$$f(y) = 2y - 1.$$

При таком выборе критическая скорость для пластины с симметрично закрепленными кромками не реагировала на изменение толщины. Для пластины с одним защемленным краем концентрация материала к нему понижало критическую скорость, а к противоположному – повышало устойчивость (таблица 7).

Таблица 7.

$s = 2/3, \theta = \pi/2$			$s = 1, \theta = 0$			$s = 2/3, \theta = 0$		
$\delta = -10^{-5}$	$\delta = 0$	$\delta = 10^{-5}$	$\delta = -10^{-5}$	$\delta = 0$	$\delta = 10^{-5}$	$\delta = -3\cdot 10^{-5}$	$\delta = 0$	$\delta = 3\cdot 10^{-5}$
2,77	2,78	2,80	3,37	3,38	3,40	1,41	1,42	1,43

Рассмотрим теперь задачу оптимального распределения толщины для свободно опертой пластины. Условие существования нетривиального решения в методе Бубнова-Галеркина составляет характеристическое уравнение, содержащее ω и M . Переходу от устойчивого состояния к неустойчивому будет соответствовать чисто мнимое значение ω. Приравняв к нулю действительные и мнимые части уравнения, получим с точностью до слагаемых первого порядка малости относительно δ выражение для $M_{кр}$:

$$M_{кр}^2 = M_1 + \delta M_2 I ,$$

где $I = \int_0^1 f(y)\sin^2 \pi y dy$.

Задача оптимизации состоит в том, чтобы определить такую функцию f, при которой $M_{кр}$ принимает наибольшее значение при некоторых дополнительных ограничениях. В качестве ограничений, следуя [12], возьмем

$$\int_0^1 f(y)dy = 0, \int_0^1 (f'(y))^2 dy \le C .$$

Первое условие означает постоянство площади поперечного сечения пластины, второе – что решение задачи нужно искать в классе гладких функций. Составим функционал

$$J(f) = \int_0^1 f(y)\sin \pi y dy + \lambda_1 \int_0^1 (f'(y))^2 dy + \lambda_2 \int_0^1 f(y)dy ,$$

в котором λ_1, λ_2 - неопределенные множители Лагранжа.

Из условия стационарности получаем уравнение

$$\sin^2 \pi y + \lambda_1 - 2\lambda_2 f''(y) = 0 .$$

Из него находим

$$f(y) = \mu_1 + \mu_2 y + \frac{2\lambda_1 + 1}{8\lambda_2} y^2 + \frac{\cos 2\pi y}{16\pi^2 \lambda_2}.$$

Обозначим $\mu_3 = \dfrac{2\lambda_1 + 1}{8\lambda_2}$ и примем условие нормировки $16\pi^2 \lambda_2 = 1$. Тогда

$$f(y) = \mu_1 + \mu_2 y + \mu_3 y^2 + \cos 2\pi y .$$

Параметры μ_i находятся из граничных условий и первого ограничения. Будем полагать, что $f(y)$ симметрична относительно середины пластины, тогда $f'(0) = \gamma, f'(1) = -\gamma$. Из (3) получаем $\mu_1 = -\dfrac{\gamma}{6}, \mu_2 = \gamma, \mu_3 = -\gamma$. Окончательно будем иметь

$$f(y) = -\frac{\gamma}{6} + \gamma y(1 - y) + \cos 2\pi y .$$

При этом для достижения эффекта оптимизации знак δ нужно выбирать в зависимости от коэффициента M_2.

Выводы

Исследована зависимость критической скорости панельного флаттера от распределения толщины пластины при различных значениях параметров. Установлено, что концентрация материала к центру способствует стабилизации. Предложен вариант оптимального распределения толщины.

Литература

1. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Механика деформируемого твердого тела. М., 1978. (Итоги науки и техники / ВИНИТИ; Т.11).
2. Ильюшин А.А., Кийко И.А. Новая постановка задачи о флаттере пологой оболочки. ПММ, 1994, т. 58, в. 3, с 167-171.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М., Наука, 2006.
4. Кийко И.А. Постановка задачи о флаттере оболочки вращения и пологой оболочки, обтекаемых потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью. ПММ, 1999, т. 63, в 2, с. 305-312.
5. Кудрявцев Б.Ю. Флаттер упругой пластины,находящейся в потоке газа,при умеренных сверхзвуковых скоростях. Изв. ТулГУ,сер. мат.,мех.,инф., -Т.11,-Вып.3, Тула: изд. ТулГУ,2005,с.99-102.
6. Кудрявцев Б.Ю. Флаттер прямоугольной пластины, составляющей часть поверхности тонкого клина , обтекаемого потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью.Деп. в ВИНИТИ, 2002, № 1085-В2002.
7. Кийко И.А., Кудрявцев Б.Ю. Нелинейные аэроупругие колебания прямоугольной пластины // Вестн. МГУ. Сер. 1, Матем, мех. 2005. № 1. С. 68-71.
8. Кийко И.А.,Кудрявцев Б.Ю. Флаттер упругой полосы переменной жесткости. Деп. в ВИНИТИ, 1997, № 1103-В97.
9. Исаев В.П., Кийко И.А. Аэроупругие колебания и устойчивость ортотропной полосы переменной толщины. Деп. в ВИНИТИ, 2002, № 203-В2002.
10. Кадыров А.К., Кийко И.А. Флаттер упругой полосы переменной толщины. Изв. ТулГУ. Сер. Мат. Мех. Инф.-Т.11.-Вып.2.мех.,Тула: изд. ТулГУ,2005,с. 46-52.
11. Кадыров А.К. Флаттер пластины переменной жесткости. Изв. ТулГУ. Сер. Мат. Мех. Инф.-Т.13.-Вып.2.мех.,Тула: изд. ТулГУ,2007,с. 76-81.
12. Брадусь А.С., Картвелишвили В.М. Приближенные аналитические решения в задачах оптимизации устойчивости и частот колебаний упругих тонкостенных конструкций. Изв. АН СССР, МТТ, 1981, № 6.

Модель упругопластического поведения материалов конструкций при термоциклическом нагружении

д.т.н. проф. Темис Ю.М., к.т.н. Азметов Х.Х., Факеев А.И.

МГТУ«МАМИ»

tejoum@ciam.ru

Аннотация. На основе модели поведения конструкционного материала при циклическом неизотермическом упругопластическом деформировании создана система математического моделирования циклического нагружения конструкций методом конечных элементов с использованием самокорректирующегося метода.

<u>*Ключевые слова*</u>*: пластичность, циклическое нагружение, неизотермические условия, метод конечных элементов, самокорректирующийся метод.*

Для учета влияния температурных нагрузок трехпараметрическая модель [1-4], предназначенная для моделирования поведения упругопластического материала под воздействием циклического нагружения при постоянных температурах, обобщена на случай неизотермического нагружения. Подход позволяет учитывать в процессе неизотермического циклического нагружения изменение эффекта Баушингера, нелинейного участка кривой деформирования и