

толщины пластины при различных значениях параметров. Установлено, что концентрация материала к центру способствует стабилизации. Предложен вариант оптимального распределения толщины.

### Литература

1. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Механика деформируемого твердого тела. М., 1978. (Итоги науки и техники / ВИНТИ; Т.11).
2. Ильюшин А.А., Кийко И.А. Новая постановка задачи о флаттере полой оболочке. ПММ, 1994, т. 58, в. 3, с 167-171.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М., Наука, 2006.
4. Кийко И.А. Постановка задачи о флаттере оболочки вращения и полой оболочки, обтекаемых потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью. ПММ, 1999, т. 63, в. 2, с. 305-312.
5. Кудрявцев Б.Ю. Флаттер упругой пластины, находящейся в потоке газа, при умеренных сверхзвуковых скоростях. Изв. ТулГУ, сер. мат., мех., инф., -Т.11,-Вып.3, Тула: изд. ТулГУ, 2005, с.99-102.
6. Кудрявцев Б.Ю. Флаттер прямоугольной пластины, составляющей часть поверхности тонкого клина, обтекаемого потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью. Деп. в ВИНТИ, 2002, № 1085-В2002.
7. Кийко И.А., Кудрявцев Б.Ю. Нелинейные аэроупругие колебания прямоугольной пластины // Вестн. МГУ. Сер. 1, Матем, мех. 2005. № 1. С. 68-71.
8. Кийко И.А., Кудрявцев Б.Ю. Флаттер упругой полосы переменной жесткости. Деп. в ВИНТИ, 1997, № 1103-В97.
9. Исаев В.П., Кийко И.А. Аэроупругие колебания и устойчивость ортотропной полосы переменной толщины. Деп. в ВИНТИ, 2002, № 203-В2002.
10. Кадыров А.К., Кийко И.А. Флаттер упругой полосы переменной толщины. Изв. ТулГУ. Сер. Мат. Мех. Инф.-Т.11.-Вып.2.мех., Тула: изд. ТулГУ, 2005, с. 46-52.
11. Кадыров А.К. Флаттер пластины переменной жесткости. Изв. ТулГУ. Сер. Мат. Мех. Инф.-Т.13.-Вып.2.мех., Тула: изд. ТулГУ, 2007, с. 76-81.
12. Брадусь А.С., Картвелишвили В.М. Приближенные аналитические решения в задачах оптимизации устойчивости и частот колебаний упругих тонкостенных конструкций. Изв. АН СССР, МТТ, 1981, № 6.

### **Модель упругопластического поведения материалов конструкций при термоциклическом нагружении**

д.т.н. проф. Темис Ю.М., к.т.н. Азметов Х.Х., Факеев А.И.

МГТУ «МАМИ»

tejoum@ciam.ru

*Аннотация.* На основе модели поведения конструкционного материала при циклическом неизотермическом упругопластическом деформировании создана система математического моделирования циклического нагружения конструкций методом конечных элементов с использованием самокорректирующегося метода.

*Ключевые слова:* пластичность, циклическое нагружение, неизотермические условия, метод конечных элементов, самокорректирующийся метод.

Для учета влияния температурных нагрузок трехпараметрическая модель [1-4], предназначенная для моделирования поведения упругопластического материала под воздействием циклического нагружения при постоянных температурах, обобщена на случай неизотермического нагружения. Подход позволяет учитывать в процессе неизотермического циклического нагружения изменение эффекта Баушингера, нелинейного участка кривой деформирования и

модуля упругости.

Модель, основанная на деформационной теории, использует следующие допущения:

1) Компоненты  $\varepsilon_{ij}$  тензора полной деформации равны сумме компонентов  $\varepsilon_{ij}^{(e)}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{(p)}$  тензоров упругой и пластической деформации:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

2) Изменение объема материала характеризуется шаровой составляющей тензора деформаций:

$$\varepsilon = \frac{1-2\mu}{E} \sigma + \alpha T, \quad \varepsilon = \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} \delta_{ij}, \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij}, \quad (2)$$

где  $\alpha$  – коэффициент линейного расширения,  $T$  – температура,  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений,  $\sigma$  – шаровая составляющая тензора напряжений.

3) Компоненты  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}$  девиатора деформаций пропорциональны компонентам  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$  девиатора напряжений:

$$e_{ij} = \frac{s_{ij} \psi (1 + \mu)}{E}, \quad (3)$$

где  $\psi$  - параметр пластичности, определяемый следующим соотношением:

$$\psi = \frac{3E}{2(1 + \mu)} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}, \quad (4)$$

где  $\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}}$ ,  $\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$  - интенсивности деформаций и напряжений соответственно.

4) Независимо от закона изменения температуры в цикле конечные точки диаграмм неизотермического и изотермического деформирования совпадают в координатах  $\sigma - \varepsilon$  при одинаковых значениях температуры и накопленной пластической деформации.

Утверждения 1) – 3) являются широко известными допущениями деформационной теории пластичности [5]. Утверждение 4) экспериментально подтверждено в испытаниях в изотермических и неизотермических условиях при циклическом нагружении с постоянной амплитудой пластической деформации [6].

Для описания кривых циклического деформирования использован подход, получивший экспериментальное подтверждение для ряда конструкционных материалов при постоянной температуре [1-4]: построение каждого полуцикла нагружения в локальных координатах происходит в зависимости от структурного параметра, в качестве которого использован параметр Одквиста  $\chi = \sum_i^n \varepsilon_i^p$ . Для моделирования кривых циклического деформирования в условиях неизотермического нагружения использовано понятие термомеханической поверхности, введенной в [7]:

$$\sigma = F(\varepsilon_p, T). \quad (5)$$

При циклическом или сложном неизотермическом нагружении предлагается рассмотреть поверхность неизотермического деформирования, участок которой между изотермическими кривыми циклического деформирования, соответствующих температурам  $T_1, T_2$ , при текущем значении параметра Одквиста определяется следующими соотношениями:

$$\sigma^* = F(\varepsilon_p^*, T), \quad F = (1 - \lambda) f_1 + \lambda f_2, \quad \lambda = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \quad (6)$$

$$f_i = \begin{cases} E(T_i) \cdot d_\chi(T_i) \cdot \varepsilon^*, & \varepsilon^* \leq \varepsilon_s^* \\ E(T_i) \cdot d_\chi(T_i) \cdot \varepsilon_s^* + d_\chi(T_i) \cdot b_\chi(T_i) \cdot \left[ f\left(\varepsilon_s^* + \frac{\varepsilon^* - \varepsilon_s^*}{b_\chi(T_i)}, T_i\right) - \sigma_s(T_i) \right], & \varepsilon^* > \varepsilon_s^* \end{cases} \quad (7)$$

$$i = 1, 2, \sigma_s^*(T) = a_\chi(T) \sigma_s(T), \varepsilon_s^* = a_\chi(T) / d_\chi(T) \varepsilon_s,$$

где:  $\sigma^*$  и  $\varepsilon^*$  – соответственно напряжения и деформации в локальной системе координат;

$a_\chi$  – размер упругой зоны поверхности нагружения;

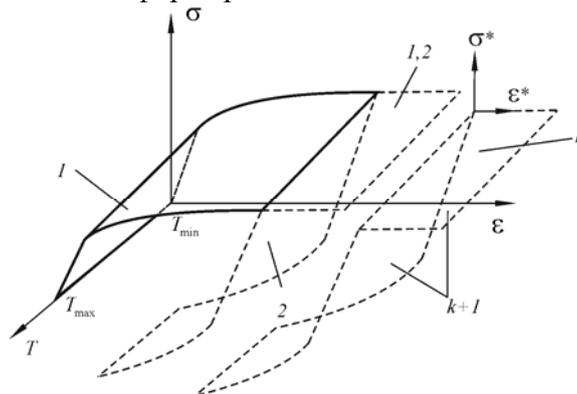
$b_\chi$  – коэффициент преобразования нелинейного участка кривой деформирования;

$d_\chi$  – коэффициент изменения модуля упругой разгрузки;

$\varepsilon_s$  и  $\sigma_s$  – деформации и напряжения в пределе упругости первоначальной кривой,

$E$  – первоначальный модуль упругости.

Для моделирования кривых циклического деформирования при неизотермическом циклическом нагружении на каждом  $k$ -м полуцикле нагружения необходимо провести расчет изотермических кривых деформирования для диапазона температур текущего полуцикла по накопленной пластической деформации за предыдущие полуциклы; построить по полученным кривым деформирования термомеханическую поверхность для текущего полуцикла (рисунок 1); построить в пространстве напряжений, температур и деформаций неизотермическую кривую циклического деформирования, определение параметров которой происходит при изменении направления деформирования.



**Рисунок 1 – Семейство термомеханических поверхностей:**

**1 – исходная; 2 - на втором полуцикле; 3 - на  $k$  полуцикле; 4 - на  $k+1$  полуцикле**

При этом в координатах кривой циклического деформирования  $\varepsilon^*, \sigma^*$  соотношения, связывающие напряжения и деформации, можно записать в виде [8,9]:

$$\sigma_{ij}^* = C_{ijmn} (\varepsilon_{mn}^* - \varepsilon^T \delta_{mn}), \quad i, j, m, n = 1, 2, 3, \quad (8)$$

где:

$$C_{ijmn} = \frac{E}{\psi(1+\mu)} \left( \delta_{im} \delta_{jn} - \frac{\delta_{ij} \delta_{mn}}{3} \right) + \frac{E}{3(1-2\mu)} \delta_{ij} \delta_{mn}, \quad (9)$$

где:  $\psi$  определяется по формуле (4), а  $\varepsilon_i^*$  и  $\sigma_i^*$  – по формулам (6) – (7).

Для моделирования кривых деформирования при неизотермическом нагружении необходимо определить параметры материала, зависящие от накопленной пластической деформации и температуры: первоначальные кривые деформирования материала, полученные при постоянных температурах, и параметры  $a_\chi, b_\chi, d_\chi$ , моделирующие изменение циклических свойств от накопленной пластической деформации и температуры. Параметры модели определяются из испытаний при постоянных температурах на основе экспериментальных кривых

циклического деформирования при жестком или мягком нагружении. Для определения параметров, зависящих от накопленной пластической деформации из циклических испытаний, необходимо на каждом полуцикле определить зависимость накопленной пластической деформации от числа полуциклов:

$$\chi(n) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^p, \quad (10)$$

а также параметры модели, зависящие от числа полуциклов.

Параметр  $a_\chi$ , моделирующий изменение размера упругой области, определяется отношением предела текучести на каждом полуцикле в локальных координатах к первоначальному пределу текучести:

$$a_n(T_i) = \frac{\sigma_s^{*n}(T_i)}{\sigma_s(T_i)}. \quad (11)$$

Определение параметра  $b_\chi$ , моделирующего масштаб преобразования нелинейного участка кривой деформирования, возможно на основе вычисления касательного модуля упругости нелинейного участка кривой деформирования на каждом полуцикле нагружения:

$$E_K^n = \frac{\sigma_{\max}^n - \sigma_s^n}{\varepsilon_{\max}^n - \varepsilon_s^n}. \quad (12)$$

Тогда параметр  $b_\chi$  определяется отношением касательного модуля на текущем полуцикле к касательному модулю на нулевом полуцикле:

$$b_n(T_i) = \frac{E_K^n(T_i)}{E_K^0(T_i)}. \quad (13)$$

Также, в случае мягкого нагружения, параметр  $b_\chi$  можно приближенно определить по следующей формуле:

$$b_n(T_i) = \frac{\Delta\varepsilon_p^0}{\Delta\varepsilon_p^n}, \quad (14)$$

где:  $\Delta\varepsilon_p^0$  – остаточные пластические деформации начального, а  $\Delta\varepsilon_p^n$  – n-ого полуциклов.

Параметр  $d_\chi$ , моделирующий изменение модуля упругости в процессе циклического деформирования, определяется отношением модуля упругости на текущем полуцикле к первоначальному:

$$d_n(T_i) = \frac{E^n}{E^0}. \quad (15)$$

После определения зависимостей  $\chi(n), a(n), b(n), d(n)$  для каждой температуры, можно получить требуемые зависимости  $a(\chi, T), b(\chi, T)$  и  $d(\chi, T)$  в требуемом диапазоне температур и накопленной пластической деформации.

Модель реализована в конечно-элементном комплексе РОТОР [8], предназначенном для расчета напряженно-деформированного состояния деталей конструкций. Для реализации модели использован шаговый алгоритм с коррекцией погрешности [9].

Решение нелинейной упругопластической задачи удовлетворяет следующему соотношению:

$$\int_{\Omega} \left[ \left( c_{ijmn} \varepsilon_{ij} - \frac{E\alpha T}{1-2\mu} \delta_{mn} \right) \delta \varepsilon_{mn} - F_m \delta u_m \right] d\Omega - \int_{S_F} F_{ms} \delta u_{ms} dS = 0, \quad (16)$$

где:  $F_m$  — вектор объемных сил, заданных в теле  $\Omega$ ;  $F_{ms}$  - вектор поверхностных сил, за-

данных на поверхности  $S_F$ ;  $u_m$  - компоненты вектора перемещений, связанные с компонентами тензора деформаций зависимостями Коши:

$$\varepsilon_{mn} = \frac{1}{2}(u_{m,n} + u_{n,m}).$$

Для решения нелинейного уравнения (16) использован метод последовательных нагружений с коррекцией погрешности. Разобьем процесс нагружения на  $N$  различных интервалов. Представим нагрузку, действующую на тело, в виде:

$$\{F_m\}_q = q\{F_m\}; \{F_{mS}\}_q = q\{F_{mS}\}; \{\alpha T \delta_{mn}\}_q = q\{\alpha T \delta_{mn}\}, \quad (17)$$

где:  $q$  – параметр нагружения, изменяющийся от нуля до единицы.

Если известно решение при  $q = q_n$ , то система уравнений МКЭ для решения задач деформационной теории пластичности методом последовательных нагружений с коррекцией погрешности на  $n+1$  шаге имеет следующий вид [9]:

$$[K_k]_n \{\Delta u\}_{\Omega_{n+1}} = (\beta q_n + \Delta q_{n+1}) \{F\} - \beta [K_c]_n \{u\}_{\Omega_n}, \quad (18)$$

где:  $[K_k]_n$  – касательная матрица жесткости,  $[K_c]_n$  – секущая матрица жесткости, вычисленные при  $\{u\}_{\Omega} = \{u\}_{\Omega_n}$ ;  $\{F\}$  – общий вектор нагрузок.

Компоненты матриц жесткости и общего вектора нагрузок в каждом элементе определяются по соотношениям, приведенным в [10].

Решая (18), находим вектор приращений  $\{\Delta u\}_{\Omega_{n+1}}$  и состояние системы при  $q = q_{n+1}$ :

$$\{u\}_{\Omega_{n+1}} = \{u\}_{\Omega_n} + \{\Delta u\}_{\Omega_{n+1}}. \quad (19)$$

После этого возможен переход к следующему шагу по  $\Delta q$ .

В работе [11] модель проверена при циклах, симметричных по пластическим деформациям для стали X18H10. Ниже для проверки модели в условиях жесткого нагружения использованы экспериментальные результаты работы [12]. Рассмотрен материал IN738LC. Сравнение проводилось на первых циклах при жестком изотермическом и неизотермическом нагружении. При изотермических условиях температура в полцикле составляла  $950^\circ$ , амплитуда деформаций составляла 0.5%. Сравнение результатов моделирования приведено на рис.3а. При неизотермическом нагружении амплитуда деформаций также составляла 0.5%, а температура в цикле изменялась от  $750^\circ$  до  $950^\circ$ :  $750^\circ$  при максимальном сжатии,  $950^\circ$  при максимальном растяжении. Сравнение результатов моделирования и эксперимента приведено на рис.3б.

Разработанная модель МКЭ предназначена для расчета зон концентрации напряжений в конструктивных элементах ГТД.

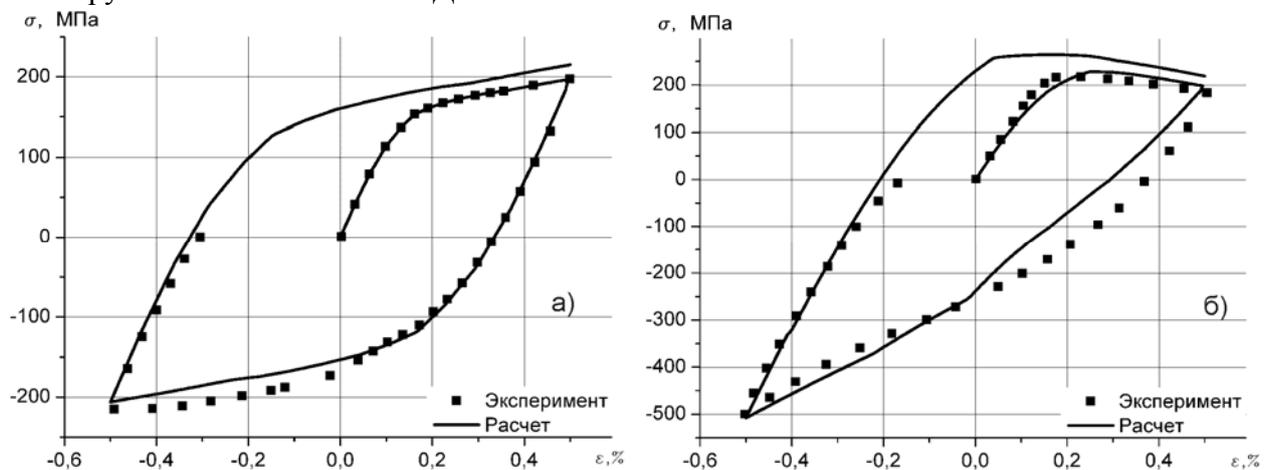


Рисунок 2 – Полциклы при изотермическом а) и неизотермическом б) нагружении

### Литература

1. Темис Ю.М. Пластичность и ползучесть деталей ГТД при циклическом нагружении. В кн.: Проблемы прочности и динамики в авиадвигателестроении. Вып.4. - Труды ЦИАМ, №1237, 1989. - С. 32- 50.
2. Темис Ю.М., Пучков И.В. Модель упругопластического деформирования и повреждаемости конструкционных материалов. - Материалы V Всесоюзного семинара «Малоцикловая усталость – критерий разрушения и структуры материалов». Тезисы докладов и сообщений. – Волгоград, 1987.
3. Темис Ю.М., Пучков И.В. Аналитическое описание кривых циклического деформирования конструкционных материалов. - Проблемы прочности, 1988. – №9. – С. 18-22.
4. Темис Ю.М., Пучков И.В. Характеристики упругопластического деформирования и повреждаемости конструкционных материалов при циклическом нагружении. / Межвуз. сборник «Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения». – Изд-во Нижегородского университета, 1992. – С. 82-89.
5. Ильющин А.А. Пластичность. – М.: ОГИЗ, 1948. – 376 с.
6. Махутов Н.А., Гаденин М.М., Гохфельд Д.А. и др. Уравнения состояния при малоцикловом нагружении. - М.: Наука, 1981. – 245 с.
7. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Демьянушко И.В. и др. Термопрочность деталей машин. - М.: Машиностроение, 1975. – 455 с.
8. Темис Ю. М. Азметов Х. Х. Математическое моделирование циклического деформирования. Известия МГТУ «МАМИ» 2011, стр. 195-202.
9. Темис Ю. М. Решение задач деформационной теории пластичности методом последовательных нагружений с коррекцией погрешности - Уч. Зап. ЦАГИ - 1983. - т. 14. №5. - с. 80-89
10. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975.
11. Темис Ю.М., Факеев А.И. Моделирование кривых деформирования и ресурса конструкционного материала при циклическом неизотермическом нагружении. Известия МГТУ «МАМИ» 2011, стр. 202-208.
12. Xijia Wu Life prediction of Gas Turbine Materials. Gas turbines, pp 215-282.