СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ, ЗДАНИЯ И СООРУЖЕНИЯ

УДК 692

DOI: 1017673/Vestnik.2017.01.1

А.Н. ДАВЫДОВ

ЦЕПЬ МАРКОВА КАК МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТРОИТЕЛЬНОЙ КОНСТРУКЦИИ, РАБОТАЮЩЕЙ ПОД НАГРУЗКОЙ

MARKOV CHAIN AS A MATHEMATICAL MODEL OF BUILDING STRUCTURE WORKING UNDER LOAD

Рассматривается марковский процесс как вероятностный метод оценки надёжности строительных конструкций. Анализируется один из подходов к оценке надёжности строительных конструкций в системе зданий и сооружений. Разбирается сущность перехода строительной конструкции из одного состояния в другое от влияния внешнего фактора. Анализируется матрица перехода как аналитическая модель цепи Маркова для оценки надёжности строительной конструкции. Рассматривается переходная вероятность как числовая характеристика математической модели цепи Маркова. Описывается математическая модель эксплуатации строительной конструкции под нагрузкой. Предлагается постановка задачи для определения оценки надёжности работоспособности строительной конструкции.

Ключевые слова: *вероятностный метод расчёта строительных конструкций, марковский процесс, цепь Маркова, множество возможных состояний строительной конструкции, изменение состояния строительной конструкции, случайное блуждание нагрузки, матрица перехода состояний строительной конструкции*

Markov process as a probabilistic method for evaluation of the reliability of constructions is considered. The essence of the building structure transition from one state to another, from the influence of external factors is disassembled. The transition matrix as an analytical model of Markov chains to evaluate the reliability of the building structure is analyzed. Transition probability as a numerical characteristic of a mathematical model of the Markov chain is considered. A mathematical model of a building structure under load is described. Formulation of the problem to determine the assessment of the reliability performance of the building structure is proposed.

Keywords: *probabilistic method for building structures calculating, Markov process, Markov chain, Markov equation, set of possible states of building structure, building structure condition, change of building structure status, load random movement, transition probability matrix of building structure state transition.*

В настоящее время в Самаре и в целом в России накопился большой фонд строительных конструкций с различными сроками эксплуатации в самых разнообразных условиях работы [1–3]. Основными количественными мерами оценки состояния конструкций и безопасности эксплуатации являются несущая способность и надёжность [4–6]. Несущая способность характеризуется свойством конструкций воспринимать, передавать и распределять нагрузку на другие конструкции или их элементы, не приводя в состояние отказа. Надёжность строительных конструкций, как комплексное свойство, заключается в способности выполнять возложенные функции, сохраняя свои основные характеристики при определенных условиях эксплуатации в установленных пределах или в течение требуемого промежутка времени. Основным показателем, определяющим надёжность строительных конструкций, зданий и сооружений, является безопасность их работы [7–11].

Вероятностные методы расчётов не вошли в практику оценки строительных конструкций по надёжности, однако проблема становится актуальной и может быть разрешима ввиду вступления в силу Федерального Закона от 30.12.2009 г. №384-ФЗ «*Технический регламент о безопасности зданий и сооружений*». Таким образом, вероятностные методы оценки надёжности строительных конструкций приобретают актуальное значение в строительном комплексе [12–14].

Актуальность оценки надёжности строительных конструкций, здания или сооружения на основе вероятностного анализа является важным для настоящего времени, а именно:

1) неблагоприятные факторы при длительной эксплуатации строительной конструкции приводят

к снижению несущей способности, что увеличивает риск разрушения [15];

2) в случае возникновения запредельных или экстремальных нагрузок также не исключается риск разрушения [16];

3) увеличение весовых норм нагрузки, длительное неравномерное распределение нагрузки [17, 18];

4) атмосферно-климатическое воздействие (например, снеговая нагрузка), являющаяся причиной разрушения [17, 18].

Марковский процесс как вероятностный метод оценки надёжности строительных конструкций

Обзор и анализ публикаций показывает, что накоплен огромный научный материал по проблематике случайных процессов и случайных величин [19–23]. Существуют научно-обоснованные методы, учитывающие состояния строительных конструкций и сопряжённых элементов в зданиях и сооружениях. Также применяют специальные методы вероятностного анализа, учитывающие влияние неблагоприятных состояний. Предлагаемый метод анализа, позволяющий рассмотреть всевозможные состояния работы строительной конструкции под влиянием случайного внешнего фактора, можно применить к расчёту надёжности и долговечности строительной конструкции. Метод основан на использовании случайных марковских процессов. Моделирование случайных состояний учитывает и рассматривает факторы, вызывающие наиболее опасное, нежелательное и неблагоприятное состояние в процессе эксплуатации строительной конструкции. Учитывать внешние факторы в течение некоторого промежутка времени является несомненным достоинством метода, что позволяет делать прогнозы как для общего состояния строительной конструкции, так и рассматривать особенные ее состояния [24, 25].

Методика расчёта строительных конструкций в настоящее время не рассматривает методы стохастического моделирования, результатом которого является вероятностное значение. В основном строительные конструкции рассчитывают на прочность, устойчивость, жёсткость и не принимают к сведению вероятностные критерии, учитывающие экстремальные ситуации, риск, неблагоприятные воздействия, техногенные причины, катастрофы. Именно этот перечень составляет случайный характер, образующий множество неблагоприятных состояний.

Технико-эксплуатационное состояние зданий и сооружений, в том числе строительных конструкций, в будущем зависит от технического состояния в прошлом. Под эксплуатационно-техническим состоянием можно понимать набор факторов или причин, определяющих работоспособное состояние конструкции. Если назначить или смоделировать любые эксплуатационные условия конструкции, в том числе неблагоприятные, то можно получить уравнение регрессии и сделать прогноз. Поэтому вероятностный метод оценки работоспособности строительной конструкции позволяет анализировать эксплуатационно-техническое состояние конструкции и установить критерий ее надёжности. Важнейшей основой вероятностного метода является математическая модель, определяющая переход из одного неблагоприятного состояния строительной конструкции в другое. Этот переход описывает только цепь Маркова.

Теория марковских случайных процессов предлагает вполне доверительный результат на основе анализа состояний, вызванных неблагоприятным внешним воздействием.

Параметры математической модели

Эксплуатационное состояние строительной конструкции под нагрузкой можно представить математической моделью, такой как цепь Маркова. Такая модель формирует множество возможных состояний строительной конструкции, которые образуются как результат влияния приложенной нагрузки. Поэтому мощность множества возможных состояний рассматривают как конечномерное состояние.

Определим параметры, представляющие основные характеристики строительной конструкции под нагрузкой: *событие* – это состояние строительной конструкции; *испытание* – это изменение состояния строительной конструкции, происходящее в определенные фиксированные моменты времени или в любые случайные возможные моменты времени. В зависимости от временного фактора математическая модель выражается в одном случае как цепь Маркова с дискретным временем, в другом – как цепь Маркова с непрерывным временем. Таким образом, под действием внешних факторов на строительную конструкцию влияние нагрузки рассматривают как состояние строительной конструкции, а результат действия нагрузки, вызвавшей изменение, рассматривают как испытание. Эти состояния независимы, и появление некоторого случайного состояния не зависит от результата предыдущего состояния. Следовательно, результат в будущем не зависит от результата в прошлом.

Действующая нагрузка на строительную конструкцию образует последовательность несовместных состояний, образующих полную группу. Таким образом, возможные состояния строительной конструкции образуют последовательность k несовместных состояний A_1, A_2, ..., A_k полной группы. Условная вероятность $p_{ij}(s)$ того, что в s-м изменении наступит любое из состояний полной группы

$A_j(j=1,2,\ \ldots,\ k)$, не зависит от результатов предшествующих состояний, если в (s–1)-м изменении наступило возможное состояние из полной группы $A_i\,(i=1,\,2,\,\ldots,k)$.

Например, если последовательность состояний образует цепь Маркова и полная группа состоит из четырех несовместных состояний A_1, A_2, A_3, A_4, причём известно, что в некотором случайном изменении появилось состояние A_2, то условная вероятность того, что в следующем случайном изменении наступит состояние A_4, не зависит от того, какие состояния появились в прошедших изменениях.

Итак, основными параметрами математической модели являются:

1) текущее состояние строительной конструкции;

2) изменение состояния строительной конструкции.

Описание математической модели

Эксплуатационное состояние строительной конструкции находится в одном из k состояний: s_1, s_2, ..., s_k -м. Под влиянием нагрузки состояние строительной конструкции изменяется и переходит из одного i-го состояния в j-е состояние. Строительная конструкция может в течение длительного времени находиться в определённом состоянии или переходить в любое другое состояние.

Таким образом, цепь Маркова описывает последовательность изменений состояний строительной конструкции, принимающую одно из k состояний полной группы, причём условная вероятность $p_{ij}(s)$ определяет j-е состояние, при условии что после (s–1)-го изменения строительная конструкция находилась в i-м состоянии.

Характерной особенностью математической модели является конечная однородность цепи Маркова, т.е. условная вероятность $p_{ij}(s)$ не зависит от номера изменения состояния строительной конструкции, поэтому $p_{ij}(s) = p_{ij}$.

Приведём доказательство однородности цепи Маркова.

Пусть на строительную конструкцию в некоторой точке с целочисленной координатой $x = n$ приложена нагрузка, равная P, $кН$.

В определенные моменты времени t_1, t_2, t_3, ..., t_{m+1}, t_m строительная конструкция изменяется под влиянием приложенной нагрузки. Нагрузка под действием внешнего фактора с вероятностью p смещается (переходит) в одном направлении и с вероятностью $1-p$ – в противоположном направлении. Состояние строительной конструкции в результате действия нагрузки зависит от того – где находилась нагрузка после предшествующего фактора, и не зависит от того – как строительная конструкция изменялась под действием остальных предшествующих факторов.

Такое явление в строительных конструкциях вызывает случайное блуждание нагрузки, и его можно описать математической моделью однородной цепи Маркова с дискретным временем.

Основной числовой характеристикой математической модели является переходная вероятность – p_{ij}. Это условная вероятность того, что из i-го состояния строительная конструкция в результате изменения перейдет в j-е состояние. Причём будущее состояние строительной конструкции не зависит от состояния в прошлом. В обозначении p_{ij} первый индекс указывает номер предшествующего состояния, а второй – номер последующего состояния.

Например, p_{11} – вероятность «*перехода*» из первого состояния в первое; p_{23} – вероятность «*перехода*» из второго состояния в третье и т.п.

Итак, основной числовой характеристикой математической модели – цепь Маркова – является **переходная вероятность**.

Матрица перехода как множество возможных состояний

Если число состояний строительной конструкции конечно и равно k, то все возможные переходные вероятности записывают матрицей перехода.

Матрица перехода состояний строительной конструкции – это матрица, содержащая все переходные вероятности, определённые на конечном множестве мощностью k:

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix},$$

где P_n – матрица перехода состояний при $n \in N$; p_{kk} ($k = i$, $k = j$, $i = j$) – вероятность перехода из одного и того же i-го состояния в любое возможное j-е состояние.

Каждая строка матрицы перехода P_n образуется из элементарных переходных вероятностей p_{kk}, образующих полную группу состояний строительной конструкции. Сумма элементарных переходных вероятностей равна единице: $\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1\ \left(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k\right)$ [26].

Обозначим через $P_{ij}(n)$ вероятность того, что в результате n изменений состояний строительная конструкция перейдет из состояния i в состояние j. Например, $P_{23}(5)$ – вероятность перехода пяти изменений строительной конструкции из второго состояния в третье. Заметим, что при $n = 1$ получим переходные вероятности $P_{ij}\,(1) = p_{ij}$.

Итак, матрица перехода – это аналитическая модель цепи Маркова, определяющая эксплуатационное состояние строительной конструкции под действием нагрузки.

Равенство Маркова как существенное свойство математической модели

Рассмотрим промежуточное состояние r между i-м и j-м состояниями. Допустим, что из первоначального состояния i за n переходов строительная конструкция перейдет в промежуточное состояние r с вероятностью $P_{ir}(m)$, тогда за оставшиеся $(n - m)$ переходов из промежуточного состояния r строительная конструкция перейдет в конечное состояние j с вероятностью $P_{rj}(n - m)$.

Пусть событие A – это интересующее состояние строительной конструкции, т.е. в течение n переходов строительная конструкция перейдет из начального состояния i в конечное состояние j, следовательно, $P(A) = P_{ij}(n)$; тогда событие B_r ($r = 1, 2, \ldots, k$) – это предположения, в течение которых строительная конструкция перейдет из первоначального i-го состояния в промежуточное состояние r за m переходов, следовательно, $P(B_r) = P_{ir}(m)$; $P_{Br}(A)$ – это условная вероятность наступления состояния A, если предположить, что за $n - m$ переходов строительная конструкция перейдет из промежуточного состояния r в конечное состояние j, следовательно, $P_{Br}(A) = P_{rj}(n - m)$. Тогда по формуле полной вероятности $P_{ij}(n)=\sum_{r=1}^{k}P_{ir}(m)\cdot P_{rj}(n-m)$ запишем вероятность состояния строительной конструкции, т.е. $P(A)=\sum_{r=1}^{k}P(B_r)\cdot P_{B_r}(A)$. Таким образом, если известны все возможные и конечные переходные вероятности, то можно определить вероятности перехода строительной конструкции.

Например, пусть все возможные и конечные переходные вероятности $p_{ij} = P_{ij}(1)$ и матрица перехода из состояния в состояние за один переход равна P_1.

Покажем, если $n = 2$ и $m = 1$, то равенство $P_{ij}(n)=\sum_{r=1}^{k}P_{ir}(m)\cdot P_{rj}(n-m)$ запишем в виде $P_{ij}(2)=\sum_{r=1}^{k}P_{ir}(1)\cdot P_{rj}(2-1)$, получим $P_{ij}(2)=\sum_{r=1}^{k}P_{ir}(1)\cdot P_{rj}(1)=\sum_{r=1}^{k}p_{ir}\cdot p_{rj}$, по формуле $P_{ij}(n)=\sum_{r=1}^{k}P_{ir}(m)\cdot P_{rj}(n-m)$ можно найти все вероятности $P_{ij}(2)$ и матрицу перехода P_2.

Следует заметить, что матричное исчисление быстрее определяет и собственно матрицу перехода, и элементы матрицы, поэтому формулу $P_{ij}(n)=\sum_{r=1}^{k}P_{ir}(m)\cdot P_{rj}(n-m)$ записывают в матричном виде [26]. В случае $n = 2$ и $m = 1$ матрица перехода строительной конструкции $P_2 = P_1 \cdot P_1 = (P_1)^2$. Пусть $n = 3$ и $m = 2$, тогда матрица перехода строительной конструкции $P_3 = P_1 \cdot (P_1)^2 = (P_1)^3$ [26].

В общем случае $P_{ij}(n)$ вероятность того, что в результате n изменений состояний строительная конструкция перейдет из состояния i в состояние j, запишется $P_n = (P_1)^n$, что не противоречит основному равенству Маркова.

Итак, вероятность того, что в результате n изменений состояний строительная конструкция перейдет из состояния i в состояние j, определяется по формуле $P_n = (P_1)^n$.

Сформулируем математическую постановку задачи.

Постановка задачи

Допустим, известны переходные вероятности p_{ij}:

1) найти вероятности $P_{ij}(n)$ изменения строительной конструкции из состояния i в состояние j за n переходов;

2) определить вероятность $\sum_{n=1}^{\infty}P_{ij}(n)=1$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ неблагоприятного состояния строительной конструкции при $n \to \infty$;

3) установить критерий надёжности работоспособности строительной конструкции, что подразумевает вычисление вероятности безотказной работы.

Выводы. 1. Метод расчёта строительных конструкций на основе марковских цепей применим для оценки надёжности.

2. Если назначить начальные условия эксплуатации строительной конструкции, изменяющиеся во времени, то на основе анализа вероятностного исчисления можно сделать прогноз, определяющий изменение строительной конструкции.

3. Достоинством вероятностного метода, на основе цепей Маркова, является прогнозирование.

4. Вероятностный метод можно применить к строительным системам любой сложности.

5. Появилась возможность программирования и решения задачи на ЭВМ.

6. Вероятностное исчисление для определения критерия надёжности строительных конструкций является одним из возможных и существующих методов. Применение марковских цепей рассматривает любые состояния строительной конструкции, возникающие от внешнего фактора, включая неблагоприятные.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Дормидонтова Т.В., Филатова А.В., Шайхутдинова И.В.* Влияние высоких температур на прочность материалов при строительстве зданий и сооружений // Научное обозрение. 2015. № 18. С. 69–73.

2. *Гордеева Т.В.* О влиянии конструктивной схемы зданий на его начальную надежность // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре [Электронный ресурс]: материалы 71-й Всероссийской научно-технической конференции по итогам НИР / под ред. М.И. Бальзанникова, Н.Г. Чумаченко; СГАСУ. Самара, 2014. С. 916–917.

3. *Гордеева Т.Е.* О методике оценки надёжности строительной системы по критерию прочность // Вектор науки Тольятинского государственного университета. 2013. № 1 (23). С. 104–107.
4. *Дормидонтова Т.В., Левинков А.О., Шайхутдинова И.В.* Вероятностная оптимизация материалоемкости строительных конструкций // Научное обозрение. 2015. № 18. С. 63–68.
5. *Гордеева Т.Е., Усольцева К.А.* Моделирование конструктивной схемы жилого здания для оценки его начальной надёжности // Градостроительство и архитектура. 2013. № 3 (11). С. 6–9. DOI:10.17673/Vestnik.2013.03.1
6. *Гордеева Т.Е.* Применение метода двух моментов для определения надёжности конструкции // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2012. № 10 (646). С. 88–91.
7. *Гордеева Т.Е.* Надёжность одноэтажного животноводческого здания: дис. ... к.т.н. Самара, 1999.
8. *Павлова Л.В.* Надёжность ограждающих конструкций здания. Надёжность строительных объектов // Материалы 10-й международной научно-технической конференции / под ред. А.С. Лычёва; СГАСУ. Самара, 2007. С. 88–91.
9. *Павлова Л.В.* Надёжность и качество теплозащиты зданий // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре: материалы 68-й научно-технической конференции по итогам НИР. Ч. 2/ СГАСУ. Самара, 2011. С. 868–869.
10. *Павлова Л.В.* Надёжность и качество теплозащиты зданий // Градостроительство и архитектура. 2013. № 4 (12). С. 99–105. DOI: 10.17673/Vestnik.2013.04.17
11. *Павлова Л.В.* Исследования температурно-влажного состояния наружных стен энергоэффективных зданий // Актуальные проблемы в строительстве и архитектуре. Образование. Наука. Практика: материалы 66-й научно-технической конференции по итогам НИР. Ч. 2/ СГАСУ. Самара, 2009. С. 170–171.
12. *Дормидонтова Т.В., Солкарян Н.Г.* Оптимизация надёжности строительных конструкций // Пути улучшения качества автомобильных дорог: сборник статей / под ред. М.И. Бальзанникова, К.С. Галицкова, Т.В. Дормидонтовой; СГАСУ. Самара, 2015. С. 87–92.
13. *Дормидонтова Т.В., Филатова А.В.* Оценка надёжности жилого дома // Промышленное и гражданское строительство. 2015. № 6. С. 25–29.
14. *Дормидонтова Т.В.* Обоснование вероятностей отказов функции технического обеспечения // Природоохранные и гидротехнические сооружения: проблемы строительства, эксплуатации, экологии и подготовки специалистов: материалы Международной научно-технической конференции / СГАСУ. Самара, 2014. С. 240–243.
15. *Дормидонтова Т.В., Кирьяков В.В.* Применение методов теории надёжности на практике // Науковедение: Интернет-журнал. 2015. Т. 7. № 1 (26). С. 64.
16. *Попов В.П., Дормидонтова Т.В.* Практическая организация инструментального мониторинга несущих конструкций // Научное обозрение. 2014. № 4. С. 130–133.
17. *Дормидонтова Т.В.* Мониторинг несущих конструкций одноэтажного каркасного сборного железобетонного здания // Науковедение: Интернет-журнал. 2014. № 2 (21). С. 108.
18. *Дормидонтова Т.В., Мальцев А.В.* Мониторинг технического состояния строительных объектов // Проектирование и строительство в Сибири. 2010. № 2.
19. *Дормидонтова Т.В.* Метод численной линеаризации при реализации вероятностных расчётов надёжности зданий // Естественные и технические науки. 2013. № 2 (64). С. 397–400.
20. *Дормидонтова Т.В., Евдокимов С.В.* Оценка надёжности гидротехнических сооружений // Градостроительство и архитектура. 2012. № 1 (5). С. 64–68. DOI: 10.17673/Vestnik.2012.01.12
21. *Дормидонтова Т.В.* Комплексное применение методов, средств контроля для диагностики и мониторинга строительных систем: монография / СГАСУ. Самара, 2011.
22. *Евдокимов С.В., Дормидонтова Т.В.* Критерии оценки надёжности и технического состояния гидротехнических сооружений // Градостроительство и архитектура. 2011. № 2. С. 105–108. DOI: 10.17673/Vestnik.2011.02.23
23. *Дормидонтова Т.В.* Экономическая и техническая базы системы мониторинга зданий и сооружений городов // Вестник Самарского государственного университета. 2011. № 1–1 (82). С. 84–89.
24. *Дормидонтова Т.В., Гареева Л.Х., Солкарян Н.Г.* Применение метода «дерева решений» и планированного эксперимента для выбора лучших вариантов при заданных критериях в транспортном строительстве // Науковедение: Интернет-журнал. 2015. Т. 7. № 2 (27). С. 17.
25. *Павлова Л.В.* Современные энергосберегающие ограждающие конструкции зданий. Стены: учебное пособие / СГАСУ. Самара, 2012. 72 с.
26. *Давыдов А.Н.* Линейное программирование графический и аналитический методы: учебное пособие / СГАСУ. Самара, 2014. 106 с.
27. *Dormidontova T.V., Filatova A.V.* Research of influence of quality of materials on a road marking of highways // XXV Polish-russian-slovak seminar theoretical foundation of civil engineering. 2016.
28. *Dormidontova T.V., Evdokimov S.V.* On research of optimal programming solutions for road consrtuction in modern conditions // 5-th international scientific conference integration, pertnership and innovation in construction science and education. 2016.

Об авторе:

ДАВЫДОВ Андрей Николаевич
старший преподаватель кафедры автомобильных дорог и геодезического сопровождения строительства
Самарский государственный технический университет
Архитектурно-строительный институт
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 194,
тел. (846)392-22-40, (846) 339-14-86
E-mail: davidoffan@rambler.ru

DAVYDOV Andrey N.
Senior Lecturer of the Automobile Roads and Survey Operations in Construction Chair
Samara State Technical University
Institute of Architecture and Civil Engineering
443001, Russia, Samara, Molodogvardeyskaya str., 194,
tel. (846)392-22-40, (846) 339-14-86
E-mail: davidoffan@rambler.ru

Для цитирования: *Давыдов А.Н.* Цепь Маркова как математическая модель строительной конструкции, работающая под нагрузкой // Градостроительство и архитектура. 2017. Т. 7, № 1. С. 4-8. DOI: 1017673/Vestnik.2017.01.1.
For citation: *Davydov A.N.* Markov Chain as a mathematical model of building structure working under load // Urban Construction and Architecture. 2017. V. 7, № 1. Pp. 4-8. DOI: 1017673/Vestnik.2017.01.1.