

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ, ЗДАНИЯ И СООРУЖЕНИЯ



УДК 624.042:624.071.2

DOI: 10.17673/Vestnik.2018.02.1

А.Д. АХМЕДОВ

К РАСЧЕТУ МГНОВЕННО-ЖЕСТКИХ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С НЕДОСТАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ

CALCULATION OF INSTANT-RIGID HINGED-ROD SYSTEMS WITH MISSING LINKS

Рассматривается задача определения усилий и перемещений в пространственной шарнирно-стержневой системе с недостающими (до геометрически неизменяемой) связями при статическом нагружении. Уравнения равновесия и геометрические соотношения записываются в матричном виде. Расчетные уравнения не линейны. Для решения уравнений предлагается общий прием, не связанный с допущениями относительно структуры системы или характера нагрузки, основанный на том, что перемещения, полученные решением линейной части уравнений, удастся существенно уточнить, интерпретируя нелинейные слагаемые как нагрузку, при действии которой система может рассматриваться как линейная.

Ключевые слова: шарнирно-стержневая система, граф, матрица инцидентности, линейная зависимость, мгновенно-жесткие системы, начальное и деформированное состояние, ортогональность, уравновешенная и неуравновешенная нагрузка

The problem of determination of forces and displacements in a spatial hinged-rod system with missing (up to geometrically unchangeable) links under static loading is considered. Equilibrium equations and geometric relations are written in a matrix form. The calculated equations are not linear. To solve the equations we propose a general technique that is not related to assumptions about the structure of the system or the nature of the load based on the fact that the displacements obtained by solving a linear part of the equations can be substantially refined by interpreting the nonlinear terms as a load under the action of which the system can be regarded as linear.

Keywords: hinged-rod system, graph, incidence matrix, linear dependence, instant-rigid systems, initial and deformed states, orthogonality, balanced and unbalanced load

Рассматривается задача распределения усилий и перемещений, возникающих в пространственной шарнирно-стержневой системе с недостающими (до геометрически неизменяемой) связями при изменении действующей нагрузки. Перемещения отсчитываются от некоторого устойчивого равновесного состояния, называемого начальным, которое считается заданным, если известны нагрузка и соответствующие ей конфигурация системы и усилия в ее элементах (стержнях). За начальное может быть принято любое равновесное состояние: состояние предварительного напряжения, загрузке постоянной нагрузкой или одно из предельных состояний. Предполагается, что

относительная деформация стержней мала по сравнению с единицей, а для материала стержней справедлива линейная зависимость между напряжениями и деформациями. Эти положения с достаточной степенью точности отражают характер работы материалов, применяемых в вантовых конструкциях.

Все дальнейшие рассуждения приводятся к пространственной шарнирно-стержневой системе, которая представляет собой систему материальных точек (шарнирных узлов), соединенных между собой линейно-упругими связями (стержнями).

Пусть для определенности система состоит из m -узлов, m_0 -опорных узлов (прикрепленных к неко-

тому неподвижному, недеформируемому телу) и S-стержней.

Для того чтобы задать шарнирно-стержневую систему, необходимо прежде всего сообщить информацию об инцидентности ее узлов и стержней. Информация о характере связей отражает топологическую структуру системы. Наглядным способом описания структуры системы является граф [1]. Матрицей инцидентности этого графа называется прямоугольная таблица A , элементы которой a_{ij} определяются по графу следующим образом:

- если U_j – дуга, исходящая из вершины P_i , то $a_{ij} = -1$;
- если U_j – дуга, входящая в вершину P_i , то $a_{ij} = 1$;
- если U_j, P_i – не инцидентны, то $a_{ij} = 0$.

Матрица инцидентности однозначно определяет граф с пронумерованными вершинами и ребрами, а следовательно, и структуру системы.

Пусть известна некоторая конфигурация, в которой система находится в равновесии под действием заданных узловых сил. Система уравнений равновесия, выражающих равенство суммы проекций усилий в стержнях и узловой нагрузки на оси декартовых координат, может быть записана в матричном виде

$$CX_i = F, \quad (1)$$

где X_i – вектор погонных усилий,

$$X_i = \frac{N_i}{l_i},$$

здесь N_i, l_i – соответственно усилие и длина i -го стержня; $F(F_i^k)$ – вектор узловых нагрузок (k -й блок вектора образован проекциями сил, приложенных в узлах 1, 2, ..., m на k -ю ось координат).

Матрица коэффициентов уравнений (1) также является блочной. Для пространственной системы $k = 1, 2, 3$ и матрица C имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

Общее число строк C обозначим q . Для систем с недостающими связями $q > S$. Задание матрицы инцидентности графа, отражающего структуру системы, позволяет формализовать вычисления коэффициентов матрицы C :

$$C_{ij}^k = a_{ij} \sum_{e=1}^{m_0} a_{ej} Z_e^k \quad (2)$$

$$(i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, S; k = 1, 2, 3).$$

Переходя к рассмотрению деформированного состояния системы, получим уравнение

$$\Delta CX + \Delta CX + \Delta CX = \Delta F, \quad (3)$$

где Δ – приращение соответствующих величин.

Матрица ΔC размером $q \times S$ учитывает изменение начальной конфигурации и аналогично C является

блочной. Обозначая составляющие перемещения i -го узла по k -й оси координат U_i^k , можно записать

$$\Delta C_{ij}^k = a_{ij} \sum_{e=1}^{m_0} a_{ej} U_i^k \quad (4)$$

$$(i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, S; k = 1, 2, 3).$$

Линейность элементов ΔC относительно перемещений позволяет преобразовать второе слагаемое (3) к виду:

$$\Delta CX = BU, \quad (5)$$

в котором $U(U_i^k)$ – блочный вектор перемещений, а матрица B является квазидиагональной, состоящей из трех одинаковых блоков, элементы которых определяются линейными комбинациями погонных усилий:

$$l_{it} = \sum_{j=1}^S a_{ij} a_{jt} X_j \quad (6)$$

$$(i, t = 1, \dots, m).$$

Подстановка (5) в (3) приводит к уравнению равновесия:

$$C\Delta X + BU + \Delta C\Delta X = \Delta F, \quad (7)$$

в котором два первых слагаемых линейны относительно неизвестных приращений усилий ΔX и перемещений U .

Для вывода зависимостей, описывающих геометрическую сторону задачи, рассмотрим деформацию отдельного стержня. Для высокопрочных материалов с учетом пониженного модуля упругости относительная деформация $\varepsilon \leq 0,03$ позволяет применить известную формулу

$$\varepsilon = \varepsilon_\tau + \frac{1}{2} \gamma^2, \quad (8)$$

где ε_τ – проекция ε на направление стержня; γ – угол поворота стержня в процессе деформации с учетом принятой линейной зависимости между напряжениями и деформациями.

Применяя введенные выше матрицы, приходим к выражению для определения погонных усилий

$$\Delta X = G(C'U + \frac{1}{2} \Delta C'U), \quad (9)$$

где G – диагональная матрица, характеризующая жесткость стержневой системы; $q_i = \left(\frac{EA}{e^3}\right)$ – жесткость на растяжение (сжатие) i -го стержня, символ «'» обозначает транспонирование матрицы.

Уравнение равновесия (7) и соотношение упругости (9) составляют расчетную систему $q+S$ нелинейных алгебраических уравнений относительно $q+S$ неизвестных компонент векторов U и ΔX .

Решение расчетных уравнений является итерационным процессом, основанным на совместном использовании шагового и вариационного методов. На каждой итерации определение неизвестных проводится в два этапа, на каждом из которых принима-

ются некоторые допущения, позволяющие считать систему линейно-деформируемой. Представим векторы U и ΔX в виде суммы их составляющих на двух этапах:

$$U = U_1 + U_2; \Delta X = \Delta X_1 + \Delta X_2. \quad (10)$$

На первом этапе расчета используется основное положение метода многоступенчатого нагружения, согласно которому к системе прикладывается лишь некоторая часть нагрузки, определяемая умножением всей нагрузки на величину шага α ($\alpha \ll 1$):

$$\Delta F_1 = \alpha \Delta F, \quad (11)$$

Предполагаемая малость перемещений, вызванных малым приращением нагрузки, позволяет ограничиться решением линейной системы:

$$C \Delta X_1 + B U_1 = \alpha \Delta F, \quad (12)$$

$$C^{-1} \Delta X_1 - C^{U_1} = 0, \quad (13)$$

к которым сводятся уравнения (7) и (9) при пренебрежении величиной нелинейных слагаемых. Вследствие линейности задачи, решения (12) и (13) получаются с точностью до множителя α :

$$U_1 = \alpha \bar{U}_1; \Delta X_1 = \alpha \Delta \bar{X}_1, \quad (14)$$

где $\bar{U}_1$ и $\Delta \bar{X}_1$ — решение тех же уравнений при $\alpha=1$.

При построении алгоритма для расчета как изменяемых, так и мгновенно-жестких систем [3] необходимо рассмотреть возможность решения уравнений при вырожденности матрицы C . Всякую матрицу [2, 3, 7] можно представить в виде произведения

$$C = C_r R, \quad (15)$$

где C_r — матрица размером $q \times r$, образованная r линейно-независимыми столбцами матрицы C ; R — прямоугольная матрица размером $r \times S$.

Подстановка (15) в выражения (12) и (13) приводит к уравнениям:

$$C_r \Delta \bar{X}_{1r} + B U_1 = \Delta F, \quad (16)$$

$$(RGR')^{-1} \Delta \bar{X}_{1r} - C_r' U_1 = 0, \quad (17)$$

в которых

$$\Delta \bar{X}_{1r} = R \Delta \bar{X}_1, \quad (18)$$

система $q+r$ уравнений (16) и (17) подстановкой

$$U_1 = B^{-1} (\Delta F - C_r \Delta \bar{X}_{1r}) \quad (19)$$

сводится к системе уравнений порядка r относительно неизвестных компонент вектора $\Delta \bar{X}_{1r}$:

$$[C_r' B^{-1} C_r + (RGR')] \Delta \bar{X}_{1r} = C_r' B^{-1} \Delta F. \quad (20)$$

Из анализа блочной структуры матриц C и B следует возможность представления:

$$C_r' B^{-1} C_r = \sum_{k=1}^3 C_{rk}' B_k^{-1} C_{rk}, \quad (21)$$

$$C_r' B^{-1} C_r = \sum_{k=1}^3 C_{rk}' B_k^{-1} \Delta F_k, \quad (22)$$

в которых индексом k отмечены блоки соответствующих матриц и векторов. Применение зависимостей (21) и (22) существенно ограничивает объем матриц, используемых при решении задачи. Вычислением $\Delta \bar{X}_{1r} = G C' U_1$ заканчивается первый этап итерации.

Задачей второго этапа расчета является уточнение зависимости между перемещениями и усилиями за счет учета нелинейного слагаемого в выражении (9), тогда как уравнения равновесия по-прежнему принимаются в линеаризованном виде (12).

Использование представления векторов U и ΔX в виде суммы их составляющих позволяет с учетом решения первого этапа и тождества

$$\Delta C_1' U_2 = \Delta C_2' U_1, \quad (23)$$

вытекающего из построения матриц ΔC , получить уравнение для определения перемещений U_2 :

$$CG(C' + \alpha \Delta \bar{C}_1') U_2 + \frac{1}{2} CG \Delta \bar{C}_2' U_2 + B U_2 = -\frac{1}{2} \alpha^2 CG \Delta \bar{C}_1' \bar{U}_1. \quad (24)$$

Правую часть уравнения (24) можно рассматривать как нагрузку, приложенную к системе на втором этапе деформации, а определение перемещений U_2 — как расчет системы под действием этой нагрузки.

Однако определить перемещения из уравнения (24) не представляется возможным, так как неопределенный множитель α входит в разных степенях и в коэффициенты при неизвестных, и в свободный член уравнения. Перемещение второго этапа отсчитывается от некоторого положения, определяемого с точностью до α , а величина приложенной нагрузки к системе зависит от α^2 . Решение становится возможным, если ограничиться вычислением перемещений, вызывающих одинаковую деформацию стержней, независимо от какого состояния, начального или деформированного, они отсчитаны.

Приравнивание соответствующих деформаций, точнее их линейных по отношению к перемещениям частей, приводит к условию

$$\Delta C_1'^{U_2} = (C' + \alpha \Delta \bar{C}_1') U_2, \quad (25)$$

из которого следует возможность определения U_2 :

$$\Delta \bar{C}_1' U_2 = 0. \quad (26)$$

Выражение (26) является системой линейных уравнений относительно компонент U_2 . Матрица $\Delta\bar{C}_1'$ определяется перемещениями $\bar{U}_1$ имеет размерность $S \times q$. Вследствие условия $S < q$ фундаментальное решение уравнения (26) может быть представлено в виде

$$U_2 = D\eta. \quad (27)$$

Матрица D ортогональна матрице $\Delta C_1'$, η -произвольный вектор.

Условие ортогональности

$$D' \Delta\bar{C}_1' = \Delta\bar{C}_1' D = 0 \quad (28)$$

позволяет построить матрицу D .

Таким образом, принятие перемещений в форме (27) можно трактовать как введение некоторых дополнительных связей, вынуждающих систему деформироваться без существенного изменения углов поворота стержней, определенных на первом этапе расчета.

Равновесный характер нагрузки [4, 5] второго этапа позволяет пренебречь вторым и третьим слагаемыми в уравнении (24), учитывающими влияние перемещений на начальную конфигурацию системы. Все вышесказанное приводит к существенному упрощению уравнения (24):

$$CGC'U_2 = \frac{1}{2}\alpha^2 CG\Delta\bar{C}_1'\bar{U}_1. \quad (29)$$

Уравнение (29) не может быть решено точно, так как решение U_2 принадлежит подпространству, определяемому столбцами матрицы D , размерность которого не должна превышать ранга C_2 . Поэтому под решением (29) понимается обобщенное решение переопределенной системы, получаемой умножением (29) слева на матрицу D' :

$$\eta = (D'CGC'D)^{-1}(-\frac{1}{2}\alpha^2 CGD'\Delta\bar{C}_1'\bar{U}_1). \quad (30)$$

Для того чтобы ранг D не превышал ранга $\Delta\bar{C}_1'$, матрицу D следует строить путем ортогонализации столбцов C_2 столбцам $\Delta\bar{C}_1'$.

Второй этап расчета заканчивается вычислением перемещений и приращений усилий с точностью до множителя α^2 .

$$U_2 = \alpha^2 D\bar{\eta}; \Delta X_2 = \alpha^2 C'D\bar{\eta}, \quad (31)$$

где $\bar{\eta}$ – решение (30) при $\alpha=1$.

Для вычисления множителя α применяется вариационный подход, в соответствии с которым составляется уравнение равенства нулю суммарной работы погрешностей уравнения (7), трактуемых как реакции поставленных в узлах связей на соответствующих перемещениях. Такими перемещениями являются перемещения U_1' , так как перемещения U_2

не связаны с существенным изменением начальной конфигурации системы. Умножая исходное нелинейное уравнение (7) на $\bar{U}_1'$, приходим к кубическому относительно α уравнению

$$\rho_1\alpha + \rho_2\alpha^2 + \rho_3\alpha^3 = \rho_1, \quad (32)$$

в котором $\rho_1=1$, а коэффициенты ρ_2 и ρ_3 являются безразмерными величинами, вычисляемыми по формулам:

$$\rho_2 = \frac{\bar{U}_1'(\Delta\bar{C}\bar{X}_1 + C\Delta X_2)}{\bar{U}_1'\Delta F}, \quad (33)$$

$$\rho_3 = \frac{\bar{U}_1'(\Delta\bar{C}X_2)}{\bar{U}_1'\Delta F}. \quad (34)$$

Значения всех матриц и векторов, входящих в (33) и (34), определены на предыдущих этапах расчета.

Определение действительного корня уравнения (32) позволяет вычислить перемещение

$$U = \alpha(\bar{U}_1 + \alpha U_2). \quad (35)$$

О степени точности решения можно судить по величине неуровновешенной нагрузки ΔF [4], вычисляемой подстановкой перемещений (35) в правую часть выражения

$$\Delta\bar{F} = (CGC' + B + \Delta CGC' + \frac{1}{2}CG\Delta C' + \frac{1}{2}CG\Delta C')U - \Delta F, \quad (36)$$

полученного подстановкой зависимости (9) в уравнение равновесия (7).

В случае недостаточной точности решения весь процесс повторяется, причем исходная конфигурация и нагрузка на каждой итерации с номером $t+1$ определяются по рекуррентным формулам:

$$Z^{(t+1)} = Z^{(t)} + U^{(t)}; \Delta F^{(t+1)} = -\Delta\bar{F}^{(t)}. \quad (37)$$

Критерием окончания расчета является величина нормы вектора $\Delta\bar{F}$.

Вывод. Выполненные расчеты свидетельствуют, что предложенный итерационный процесс сходится в широкой области параметров системы, причем сходимость имеет квадратичный характер, вследствие чего для получения решения с необходимой для практических расчетов степенью точности достаточно одной или двух итераций.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зыков А.А. Основы теории графов. М.: Вузовская книга, 2004. 664 с.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 2002. 572 с.
3. Рабинович И.М. Мгновенно-жесткие системы, их свойства и основы расчета. Висячие покрытия. М., 1962. 247 с.

4. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 2005. 368 с.

5. Ахмедов А.Д., Шляхин Д.А. Исследование напряженно-деформированного состояния вантово-стержневых систем купольного типа // Современные проблемы совершенствования и развития металлических, деревянных, пластмассовых конструкций в строительстве и на транспорте: сб. научных трудов. Самара, 2002. 259 с.

6. Ахмедов А.Д. К вопросу экспериментально-теоретического исследования вантово-стержневых систем купольного типа // Материалы международной научно-технической конференции. Самара, 2002. 100 с.

7. Ахмедов А.Д. К расчету опорного контура радиально-вантовой двухпоясной системы // Альманах современной науки и образования. 2014. № 5–6 (84). С.27–35.

8. Ахмедов А.Д. Достаточные условия устойчивости равновесия мгновенно-жестких шарнирно-стержневых систем // Инженерный вестник Дона. 2014. № 4. С. 27–35.

9. Akmedov A.D., Litikov A.P. Pd. Italian Scitnce Review // Published monthly. Issus 5 (14) May 2014. P. 97–101.

Об авторе:

АХМЕДОВ Акрамджон Давлатович
доцент кафедры строительной механики
и сопротивления материалов
Самарский государственный технический университет
Академия строительства и архитектуры
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 194

AKHMEDOV Akramdzhon D.
Associate Professor of the Structural Mechanics and Materials
Resistance Chair Samara State Technical University
Academy of Civil Engineering and Architecture
443001, Russia, Samara, Molodogvardeyskaya str., 194

Для цитирования: Ахмедов А.Д. К расчету мгновенно-жестких шарнирно-стержневых систем с недостающими связями // Градостроительство и архитектура. 2018. Т. 8, №2. С. 4-8. DOI: 10.17673/Vestnik.2018.02.1.

For citation: Akhmedov A.D. Calculation of Instant-Rigid Hinged-Rod Systems with Missing Links // Urban Construction and Architecture. 2018. V.8, 2. Pp. 4-8. DOI: 10.17673/Vestnik.2018.02.1.