DOI: 10.17673/Vestnik.2017.02.3

#### УДК 69.04

## Т.В. КУЗНЕЦОВА Л.М. БУХМАН

# РАСЧЕТ БАЛОЧНО-ЛЕНТОЧНЫХ ФУНДАМЕНТОВ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С ПОМОЩЬЮ ГИПЕРБОЛО-КРУГОВЫХ ФУНКЦИЙ

CALCULATION OF BEAM-STRIP FOUNDATION ON CUSHION COURSE THROUGH HYPERBOLIC-CIRCULAR FUNCTIONS

В литературе описано множество методов расчета балочно-ленточных фундаментов на упругом основании. В данной статье рассмотрен один из наиболее эффективных среди этих методов — метод расчета балочно-ленточных фундаментов на упругом основании с использованием гиперболо-круговых функций. Изложена методика расчета балочно-ленточных фундаментов на упругом основании при нескольких различных вариантах условий в начальном и концевом сечении. Предложенный метод является одним из наиболее простых и эффективных методов расчета, позволяет упростить методику расчета балочно-ленточных фундаментов на упругом основании, получить более достоверные результаты расчета и приблизить расчетные условия к действительным.

Many methods of calculations of beam-strip foundations on cushion course are described in academic literature. This article views one of the most effective methods – the method of calculation of beam-strip foundations on cushion course through hyperbolic-circular functions. The procedure of calculation under different condition variants in initial and terminal cross section is presented. The proposed method is one of the most simple and effective calculation methods which permits to simplify the procedure of calculation of beam-strip foundations on cushion course and to obtain more consistent results and to approximate design conditions to practice.

**Ключевые слова:** балочно-ленточные фундаменты, упругое основание, коэффициент постели, гиперболо-круговые функции, балка, прогиб, изгиб балки, реактивные нагрузки, метод расчета

**Keywords:** beam-strip foundations, cushion course, modulus of subgrade reaction, hyperbolic-circular functions, beam, deflection, beam bending, reactive load, calculation method

При проектировании балочно-ленточных фундаментов на упругом полупространстве основание моделируется, как правило, линейно-деформируемым изотропным телом, для которого считаются справедливыми основополагающие гипотезы классической теории упругости [1]. Существует множество методов расчета балочно-ленточных фундаментов на упругом основании [2, 3], но один из наиболее простых и точных основан на использовании гиперболо-круговых функций [1]. Он позволяет упростить методику расчета балочно-ленточных фундаментов на упругом основании [4].

Упругое основание бруса – такое основание, которое реализует распределенную вдоль оси бруса реакцию с погонной интенсивностью, пропорциональной перемещению (прогибу или углу поворота) сечения.

В общем случае деформация бруса (рис. 1) характеризуется шестью параметрами (линейными и угловыми деформациями): u, v, w – прогибы балки (перемещения), смещения центра тяжести сечения балки по направлению, перпендикулярному к ее оси;  $\varphi_v$ ,  $\varphi_v$ ,  $\varphi_v$  – углы поворота соответственно по осям x, y, z.

Отметим, что при заданных значениях этих деформаций в упругом основании развивается шесть

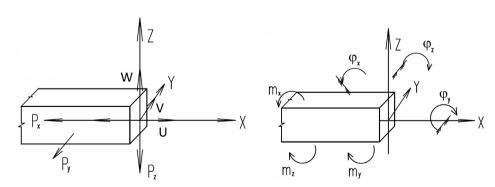


Рис. 1. Параметры, характеризующие деформации бруса

реактивных нагрузок ( $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$ ,  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  – равнодействующие и моменты соответственно по осям x, y, z), пропорциональных соответствующим деформациям:

$$p_{x} = -k_{x}u,$$

$$p_{y} = -k_{y}v,$$

$$p_{z} = -k_{z}w,$$

$$m_{x} = -C_{x}\varphi_{x},$$

$$m_{y} = -C_{y}\varphi_{y},$$

$$m_{z} = -C_{z}\varphi_{z}.$$
(1)

Коэффициенты пропорциональности в соотношениях (1) называются отпорностями основания [2]. Отрицательная правая часть этих соотношений показывает, что реактивная нагрузка направлена противоположно перемещению [3]. Отпорности  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  имеют размерность [сила/площадь] = [кН/м²]; размерность отпорностей  $C_v$ ,  $C_v$ ,  $C_z$  [момент/длина] = [кН].

При определении величин отпорностей  $k_{x}$ ,  $k_{y}$ ,  $k_{z}$  обычно используются опытные (нормальные) значения коэффициента постели C, характеризующие свойства грунта [4].

Коэффициент постели C – сила, необходимая для вдавливания в грунт штампа единичной площади на единичную глубину C = [сила/(площадь × длина)] = [к $H/м^3$ ].

Приведем для справок некоторые значения коэффициента постели для различных грунтов:

- песок рыхлый  $C = 1.0 5.0 \text{ MH/ } \text{м}^3$ ;
- песок утрамбованный  $C = 10 1000 \text{ MH/ } \text{м}^3$ .

Расчет балки на упрутом основании – это статически неопределимая задача, так как уравнения статики позволяют определить суммарное значение нагрузки (реакция нагрузки) [5]. Распределение нагрузки по длине балки описывается достаточно сложным уравнением [6].

Отпорность грунта рассчитывают как произведение коэффициента постели на ширину подошвы балки (фундамента). Вдоль вертикальной оси (предполагаемого прогиба) отпорность  $k_{\perp}$  равна:

$$k_z = C \cdot b. \tag{2}$$

Рассмотрим балку, лежащую на упругом основании и загруженную внешней произвольной вертикальной нагрузкой (рис. 2). Вертикальные перемещения (прогибы) сечений создают реакцию, распределенную по длине балки.

Предположим – см. (1), что отпор прямо пропорционален прогибу и зависит только от абсциссы «Х» рассматриваемого сечения, а также пренебрежём влиянием прогибов соседних сечений.

Предположим также, что связь подошвы балки с основанием двусторонняя, т.е. «отрыв» от основания (разрыв воображаемых пружин) невозможен. Тогда дифференциальное уравнение изгиба с учетом отпора грунта имеет вид (E – жесткость балки, w – прогиб балки (перемещение) [7]:

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} = q - (C \cdot b) \cdot w$$

или

$$\frac{d^4w}{dx^4} + \frac{1}{\lambda^4}w = \frac{q}{EI},\tag{3}$$

где  $\lambda = \sqrt[4]{\frac{4EI}{Cb}}$  – некая характеристика балки, име-

ющая размерность длины, м.

Переходя от абсолютных величин к безразмерным, в дальнейшем используем следующие параметры:

- приведенная (относительная) длина балки l/λ;
- приведенная (относительная) абсцисса  $\xi = x/\lambda$ .

Корни характеристического однородного дифференциального уравнения изгиба балки (их четыре) являются комплексными с общим множителем  $\alpha$ = $l/\lambda$ :

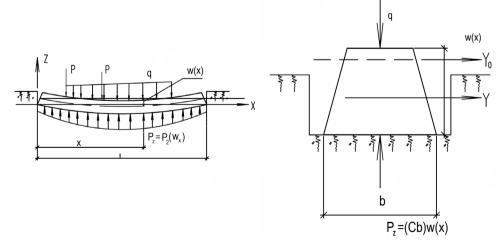


Рис. 2. Балка, лежащая на упругом основании и загруженная внешней произвольной вертикальной нагрузкой

$$r_1 = l/\lambda(l+i); r_2 = l/\lambda/-l+i),$$
  

$$r_3 = l/\lambda(-l-i); r_4 = l/\lambda(l-i).$$

С использованием гиперболо-круговых функ-) ций Г. Циммермана [8] общее решение неоднородного дифференциального уравнения (4) может быть записано в виде:

$$\omega(\xi) = \overline{\omega} + C_1 \cdot \operatorname{ch} \xi \cdot \cos \xi + C_2 \cdot \operatorname{ch} \xi \cdot \sin \xi + C_3 \operatorname{sh} \cos \xi + C_4 \operatorname{ch} \xi \cdot \sin \xi. \tag{5}$$

$$\omega(x) = \omega_0 + \frac{x}{1!} \varphi_0 + \frac{x^2}{2!} \frac{M_0}{EI} + \frac{x^3}{3!} \frac{P_0}{EI} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2!} (x - a_M^i)^2 \frac{M_i}{EI} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3!} (x - a_p^i)^2 \frac{P_i}{EI} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4!} (x - a_q^i)^4 \frac{q_i}{EI}.$$
(6)

Первое слагаемое  $\overline{\omega}$  – это частное решение неоднородного дифференциального уравнения изгиба балки на упрутом основании.

В случае нескольких грузовых участков использование общего решения в представленном виде затруднено, так как непрерывные функции внутри каждого участка необходимо «склеивать» (сопрягать), используя условия совместности деформаций и усилий в граничных сечениях [9, 10].

В связи с этим решение дифференциального уравнения изгиба балки на упругом основании целесообразно представить в виде решения по методу начальных параметров [11]. Это решение в случае обычной балки имеет вид (6) – см. рис. 3.

В решении учитываются все параметры, которые расположены слева от исследуемого сечения. Остальные параметры, характеризующие состояние балки, определяются простым дифференцированием (без раскрытия скобок).

Приведем известные «пять строк» строительной механики [12]:

$$\omega = \omega(x),$$

$$\varphi(x) = \frac{d\omega(x)}{dx},$$

$$M(x) = \pm EI \frac{d^2\omega(x)}{dx^2},$$

$$Q(x) = \pm EI \frac{d^3\omega(x)}{dx^3},$$

$$q(x) = \pm EI \frac{d^4\omega(x)}{dx^4}.$$
(7)

Структура предлагаемого решения остается прежней, однако вместо комбинаций частных реше-

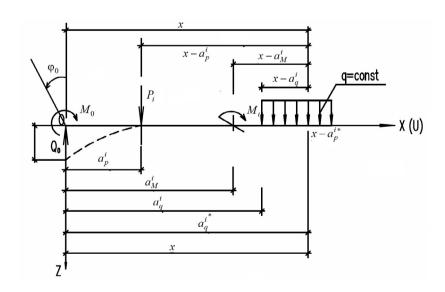


Рис. 3. Балка, лежащая на упрутом основании и загруженная несколькими нагрузками

ний: 1;  $X^{1}$ !;  $X^{2}$ /2!;  $X^{3}$ /3!, образующих общий интеграл однородного дифференциального уравнения изгиба обычной балки (без упругого основания), имеют место частные решения:

$$A_{x} = A(\xi) = \operatorname{ch} \xi \cdot \cos \xi,$$

$$B_{x} = B(\xi) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \xi \cdot \sin \xi + \operatorname{sh} \xi \cdot \cos \xi),$$

$$C_{x} = C(\xi) = \frac{1}{2} \operatorname{ch} \xi \cdot \sin \xi,$$

$$D_{x} = D(\xi) = \frac{1}{4} (\operatorname{ch} \xi \cdot \sin \xi - \operatorname{sh} \xi \cdot \cos \xi).$$
(8)

Линейная комбинация этих функций является решением дифференциального уравнения изгиба балки на упругом основании [13].

Ниже представлены функции, определяющие четыре искомых параметра изучаемой балки (эпюры прогибов и углов поворота сечений (обе уменьшены в

«С» раз), эпюры изгибающего момента и перерезывающей силы в сечениях балки).

$$\left(x-a^*_{qi}\right)>0$$
.

Знаки слагаемых в общих решениях метода начальных параметров соответствуют направлениям усилий, указанных на рис. 4.

При составлении функций  $\varphi = \varphi(x)$ , M = M(x), Q = Q(x) использованы следующие дифференциальные зависимости:

$$\begin{split} \frac{dA_x}{dx} &= -\frac{4}{\lambda} \cdot D_x, \\ \frac{dB_x}{dx} &= \frac{1}{\lambda} \cdot A_x, \\ \frac{dC_x}{dx} &= \frac{1}{\lambda} \cdot B_x, \\ \frac{dD_x}{dx} &= \frac{1}{\lambda} \cdot C_x. \end{split} \tag{9}$$

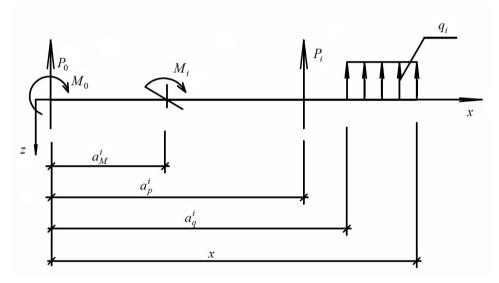


Рис. 4. Балка, лежащая на упругом основании

Функции, определяющие основные параметры балки на упругом основании:

$$\omega(x) = \omega_0 \cdot A_x + \lambda \cdot \varphi_0 \cdot B_x - \lambda^2 \cdot \frac{M_0}{EI} \cdot C_x - \lambda^3 \cdot \frac{Q_0}{EI} \cdot D_x - \lambda^2 \cdot \frac{1}{EI} \cdot \sum_{i=0}^{x} M_i \cdot C_{x-a_{Mi}} + \lambda^3 \cdot \frac{1}{EI} \cdot \sum_{i=0}^{x} P_i \cdot D_{x-a_{pi}} - \lambda^4 \cdot \frac{1}{4 \cdot EI} \cdot \sum_{i=0}^{x} P_i \cdot \left( A_{x-a_{qi}} - A_{x-a_{qi}}^* \right),$$

$$\varphi(x) = -\frac{4}{\lambda} \cdot \omega_0 \cdot D_x + \varphi_0 \cdot A_x - \lambda \cdot \frac{M_0}{EI} \cdot B_x - \lambda^2 \cdot \frac{Q_0}{EI} \cdot C_x - \frac{1}{EI} \cdot \sum_{i=1}^{x} M_i \cdot B_{x-a_{Mi}} + \lambda^2 \cdot \frac{1}{EI} \cdot \sum_{i=1}^{x} P_i \cdot C_{x-a_{pi}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4 \cdot EI} \cdot \sum_{i=1}^{x} P_i \cdot \left( D_{x-a_{qi}} - D_{x-a_{qi}} \right),$$

$$M(x) = \kappa \cdot \lambda^2 \cdot \omega_0 \cdot C_x + \kappa \cdot \lambda^3 \cdot \varphi_0 \cdot D_x + M_0 \cdot A_x + \lambda \cdot Q_0 \cdot B_x + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{x} M_i \cdot A_{x-a_{Mi}} - \lambda \cdot \sum_{i=1}^{x} P_i \cdot B_{x-a_{pi}} - \lambda^2 \cdot \sum_{i=1}^{x} q_i \cdot \left( C_{x-a_{qi}} - C_{x-a_{qi}} \right),$$

$$Q(x) = \kappa \cdot \lambda \cdot \omega_0 \cdot B_x + \kappa \cdot \lambda^2 \cdot \varphi_0 \cdot C_x - \frac{4}{\lambda} \cdot M_0 \cdot D_x + Q_0 \cdot A_x - \frac{4}{\lambda} \cdot \sum_{i=1}^{x} M_i \cdot D_{x-a_{Mi}} - \sum_{i=1}^{x} P_i \cdot A_{x-a_{pi}} - \lambda \cdot \sum_{i=1}^{x} q_i \cdot \left( B_{x-a_{qi}} - B_{x-a_{qi}} \right).$$

$$(10)$$

Данные функции содержат четыре начальных параметра, два из которых определяются условиями закрепления сечения, совпадающего с началом координат (как правило, это левое сечение балки). Другие два определяются из условий в концевом сечении.

Возможны следующие варианты условий в начальном и концевом сечениях:

- 1. Свободное сечение: Q = 0, M = 0.
- 2. Шарнирно опертое сечение: M = 0,  $\omega = 0$ .
- 3. Жестко закрепленное сечение:  $\varphi = 0$ ,  $\omega = 0$ .
- 4. Не поворачивающееся, но допускающее смещение:  $\varphi = 0$ , Q = 0.

Начальные параметры однопролетной балки всегда определяются из решения двух уравнений с двумя неизвестными [14], например, заранее известно: в правом сечении (свободном) – перерезывающая сила  $Q_{\scriptscriptstyle (1)}\!=\!0$  и изгибающий момент  $M_{\scriptscriptstyle (1)}\!=\!0$ .

На основании второй и третьей схем табл. 1 формируются два уравнения:

$$\kappa \lambda^2 \omega_0 C_l + \kappa \lambda^3 \varphi_0 D_l + [M_l] = 0,$$

$$\kappa \lambda \omega_0 B_l + \kappa \lambda^2 \varphi_0 C_l + [Q_l] = 0.$$
(11)

Здесь  $[M_l]$  и  $[Q_l]$  – изгибающий момент и перерезывающая сила от заданной нагрузки, вычисленные в сечении x=l по трем последним слагаемым соответственно второй и третьей формул к схемам в табл. 1.

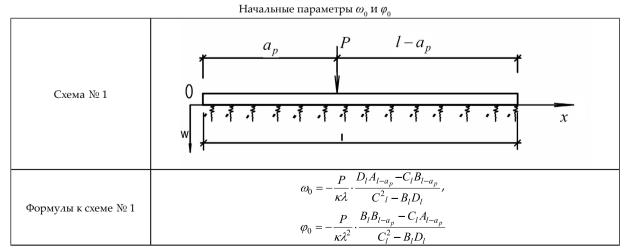
Решение системы:

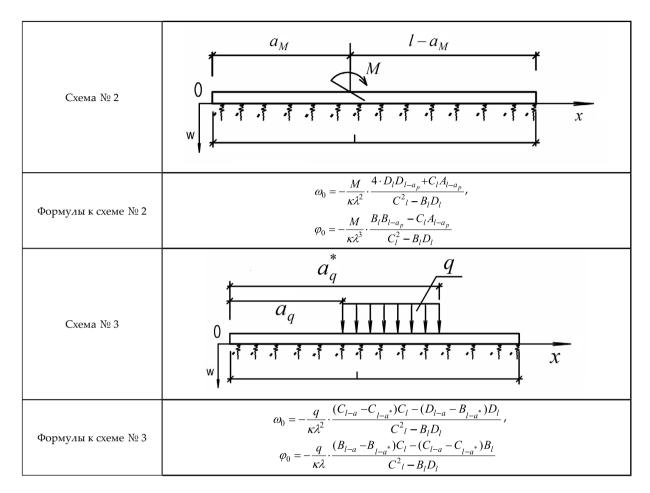
$$\omega_0 = \frac{1}{\kappa \cdot \lambda^2} \cdot \frac{\lambda \cdot D_l \cdot [Q_l] - C_l \cdot [M_l]}{C^2 \cdot l - B_l \cdot D_l},$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{\kappa \cdot \lambda^3} \cdot \frac{B_l \cdot [M_l] - \lambda \cdot D_l \cdot [Q_l]}{C^2_l - B_l \cdot D_l}.$$
(12)

Начальные параметры  $\omega_0$  и  $\varphi_0$  для балки со свободными начальным и концевым сечениями можно определить [15], пользуясь данными табл. 1.

Таблица 1





От каждого силового внешнего фактора 1 определяется начальный параметр:

$$\omega_{0i,p}; \omega_{0i,M}; \omega_{0r,q}; \varphi_{0i,p}; \varphi_{0i,M}; \varphi_{0r,q},$$

здесь  $0 \le i \le n$  – количество сил, приложенных к балке;  $0 \le j \le m$  – количество моментных нагрузок;

 $0 \le r \le l$  – количество полос, загруженных распределенной нагрузкой.

Пользуясь принципом суперпозиции, окончательно подсчитываем начальные параметры в левом сечении:

$$\begin{cases}
\omega_{0} = \sum_{i}^{n} \omega_{0i,p} + \sum_{i}^{m} \omega_{0j,M} + \sum_{i}^{l} \omega_{0r,q}, \\
\varphi_{0} = \sum_{i}^{n} \varphi_{0i,p} + \sum_{i}^{m} \varphi_{0j,M} + \sum_{i}^{l} \varphi_{0r,q}.
\end{cases} (13)$$

Рассмотренный метод расчета балочно-ленточных фундаментов на упругом основании с использо-

ванием гиперболо-круговых функций является наиболее простым и эффективным методом расчета.

**Выводы.** Применение данного метода расчета позволяет:

- 1) получить более достоверные результаты расчета;
- 2) приблизить расчетные условия к действительным;
- 3) рассматривать балочно-ленточные фундаменты с различными типами загружения;
- 4) существенно облегчить проведение вариантных расчетов различных параметров балочно-ленточного фундамента.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1. Расчет фундаментных балок / Б.В. Гервазюк, С.И. Слазер, Е.М. Розенберг и др. Киев: Будильник, 1967. 99 с.
- 2. Жемочкин Б.Н., Синицин А.П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании: учеб. для вузов. Ч.2. Основы геотехники. М.: Росстройиздат, 1962. 239 с.

- 3. Сморчков А.В., Кереб С.А., Орлов Д.А., Козлов А.В., Барановская К.О. Оценка напряжений в балках при изгибе по их прогибу // Математические методы и инновационные научно-технические разработки. Курск, 2014. С. 78-81.
- 4. Справочник проектировщика: Промышленные, жилые и общественные здания и сооружения. Кн. 1 / ред. А.А. Уманский. М.: Издательство литературы по строительству, 1973. 600 с.
- 5. Основания и фундаменты, подземные сооружения: справочник проектировщика / под общ. ред. Е.А. Сорочан, Ю.Г. Трофименко. М.: Стройиздат, 1983.
- 6. Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А. Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат, 1973. 627 с.
- 7. Основания и фундаменты: учеб. для вузов. Ч.2. Основы геотехники / Б.И. Далматов, В.Н. Бронин, В.Д. Карлов и др.; под общ. ред. Б.И. Далматова. М.; СПб.: АВС; СПбГАСУ, 2002. 387 с.
- 8. *Кузнецова Т.В.* Защита фундаментов и стен подвала от деформаций морозного пучения // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре: материалы 71-й Всероссийской научно-технической конференции по итогам НИР / СГАСУ. Самара, 2014. С.889-891.
- 9. Куликова Н.А. Задачи с различными краевыми условиями для однородного уравнения гиперболического типа // Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики: материалы Международного Российско-Болгарского симпозиума. М., 2010. С. 140-142.
- 10. Сеницкий А.Ю., Евдокимова Н.Н., Харьковский С.И. Построение замкнутых решений некоторых

краевых задач для уравнений гиперболического типа // Вестник транспорта Поволжья. 2016. № 3 (57). С. 78-81.

- 11. *Кузнецова Т.В.* Коробчатые фундаменты // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре: материалы 67-й Всероссийской научно-технической конференции по итогам НИР / СГАСУ. Самара, 2010. С.880.
- 12. Попов В.П., Давиденко А.Ю., Попов Д.В. Применение математического аппарата для описания процессов разрушения бетона при различных видах внешнего воздействия // Математические методы и модели в строительстве, архитектуре и дизайне / СГАСУ. Самара, 2015. С. 23-28.
- 13. Кузнецова Т.В. Причина деформирования зданий и сооружений в сложных грунтовых условиях // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре: материалы 70-й юбилейной Всероссийской научно-технической конференции по итогам НИР. Ч. 2 / СГАСУ. Самара, 2013. С. 376-377.
- 14. Козлов А.В., Алешин А.Н. Расчет несущей способности изгибаемых элементов с учетом диаграммы // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. Строительство: сборник статей/ под ред. М.И. Бальзанникова, К.С. Галицкова, В.П. Попова; СГАСУ. Самара, 2015. С. 93-97.
- 15. Алпатов В.Ю., Холопов И.С., Соловьев А.В. Расчет пространственного железобетонного каркаса круглого в плане здания // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре: материалы 70-й юбилейной Всероссийской научно-технической конференции по итогам НИР / СГАСУ. Самара, 2013. С. 340.

Об авторах:

#### КУЗНЕЦОВА Татьяна Викторовна

ассистент кафедры инженерной геологии, оснований и фундаментов

Самарский государственный технический университет Архитектурно-строительный институт 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 194

E-mail: pygachow2010@yandex.ru

#### БУХМАН Любовь Михайловна

доцент кафедры общей и прикладной физики и химии Самарский государственный технический университет Архитектурно-строительный институт 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 194 E-mail: bukhman-liubov@rambler.ru

#### KUZNETSOVA Tatiana V.

Assistant of the Geology and Foundation Engineering Chair Samara State Technical University Institute of Architecture and Civil Engineering 443001, Russia, Samara, Molodogvardeyskaya str., 194 E-mail: pygachow2010@yandex.ru

#### BUKHMAN Lubov M.

Associate Professor of the General and Applied Physics and Chemistry Samara State Technical University Institute of Architecture and Civil Engineering 443001, Russia, Samara, Molodogvardeyskaya str., 194 E-mail: pygachow2010@yandex.ru

Для цитирования: Kузнецова T.B., Бухман  $\Lambda$ .M. Расчет балочно-ленточных фундаментов на упругом основании с помощью гиперболо-круговых функций // Градостроительство и архитектура, 2017. Т.7, №2. С. 15-21. DOI: 10.17673/Vestnik.2017.02.3. For citation: Kuznetsova T.V., Bukhman L.M. Calculation of beam-strip foundation on cushion course through hyperbolic-circular functions // Urban Construction and Architecture. 2017. V.7, 2. Pp. 15-21. DOI: 10.17673/Vestnik.2017.02.3.