СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

УДК 624.04 DOI: 10.17673/Vestnik.2017.03.5

Е.С. ВРОНСКАЯ

ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ

DYNAMIC CALCULATION OF PRISMATIC SYSTEMS TAKING INTO ACCOUNT INTERNAL FRICTION

В предлагаемой работе показана возможность включения частотно-независимого упруговязкого сопротивления в расчетные модели, представляющие составные конструкции с распределенными параметрами. Дифференциальные уравнения движения системы включают параметры комплексной жесткости. Используя алгоритм расчета призматических оболочек с применением топологических матриц, предлагается решение стационарных и нестационарных задач динамики с учетом внутреннего трения. Такой подход приводит в процессе разделения переменных к дифференциальному уравнению движения линейного осциллятора с частотно-независимым упруговязким сопротивлением.

***Ключевые слова:** трение, составные конструкции, топологические матрицы, напряженно-деформированное состояние, конечное интегральное преобразование, частота*

The paper shows a possibility of including a frequency-independent viscoelastic design resistance in calculation models representing composite structures with distributed parameters. Differential equations of the system motion include parameters of complex rigidity. The research puts forward a solution which helps solve stationary and non-stationary dynamic problems taking internal friction into account. This solution is found by using the calculation algorithm for prismatic shells involving the use of topological matrices. In the process of separation of variables, this approach yields a differential equation of linear oscillator motion with frequency-independent viscoelastic resistance.

***Keywords:** friction, composite structures, topological matrices, stress-strain behaviour, finite integral transformation, frequency*

Такое важное свойство материала конструкций, как внутреннее сопротивление (трение) существенно влияет на напряженно-деформированное состояние сооружения при динамическом нагружении и становится доминирующим в околорезонансных и резонансных зонах. Используя алгоритм расчета призматических оболочек с применением топологических матриц, предложено решение стационарных и нестационарных задач динамики с учетом внутреннего трения. Одной из наиболее экспериментально обоснованных является комплексная теория внутреннего трения Е.С. Сорокина [1]. Однако применение этой теории возможно лишь в случае гармонических воздействий и не всегда обеспечивает выполнение принципа причинности. Указанные противоречия могут быть устранены путем введения модели частотно-независимого упруговязкого сопротивления по методике А.И. Цейтлина [2]. В предлагаемой работе показана возможность включения этой теории в расчетные модели, представляющие собой составные конструкции с распределенными параметрами. Дифференциальные уравнения движения системы включают параметры комплексной жесткости, зависящие в общем случае от частоты изменения внешнего воздействия, что усложняет решение задачи. Однако известно, что диссипативные силы в слабодемпфированных системах влияют на амплитуду колебаний лишь в весьма узком диапазоне частот в резонансной области, а на частоту свободных колебаний практически не воздействуют. В связи с этим представляется целесообразным учитывать внутреннее трение при частотах возмущения, совпадающих на каждом тоне с частотами свободных колебаний конструкции. Такой подход приводит в процессе разделения переменных к дифференциальному уравнению движения линейного осциллятора с частотно-независимым упруговязким сопротивлением, для которого декремент колебаний системы оказывается независимым от частот ее свободных колебаний.

В статье исследуются свободные колебания призматических систем с распределенными жесткостными и инерционными параметрами без применения кинематических и статических гипотез полумоментной теории. При этом алгоритм расчета включает элементы теории графов, что обеспечивает формирование условий сопряжения прямоугольных пластин призматической оболочки в простой и удобной форме. Аналогичный подход может быть использован для решения нестационарных задач динамики составных конструкций, как это сделано в работе [3] применительно к плоским рамам. Однако в отмеченных расчетных моделях не учитывались силы внутреннего сопротивления, которые, как известно, играют доминирующую роль в условиях резонанса.

Одной из наиболее обоснованных является модель частотно-независимого упруговязкого сопротивления [1], позволяющая учитывать трение материала конструкции в процессе ее нестационарного динамического нагружения. Различные теории внутреннего трения применялись как для дискретных расчетных схем, так и для тел с бесконечным числом степеней свободы. В последнем случае исследовались отдельные тела канонической формы, математические модели которых содержат несвязанные [4] или связанные [5] дифференциальные уравнения движения.

В настоящей работе предложено замкнутое решение, позволяющее исследовать свободные и вынужденные колебания составных призматических оболочек различной конфигурации с распределенными жесткостными и инерционными параметрами на основе расчетных моделей, образованных без применения кинематических и статических гипотез полумоментной теории В.З. Власова [6]. Эффективность предлагаемого решения обеспечивается значительно меньшим, по сравнению с численными методами, порядком разрешающей системы уравнений и высокой точностью полученных результатов.

Рассмотрим вынужденные нестационарные колебания призматической оболочки из однородного вязкоупругого материала. В работе показана возможность включения модели частотно-независимого упруговязкого сопротивления в методику нестационарного динамического расчета составных призматических систем с распределенными параметрами.

Рассмотрим складчатую конструкцию, образованную путем жесткого соединения тонких прямоугольных пластин и нагруженную продольно-поперечной динамической нагрузкой. Призматическая оболочка длиной L имеет шарнирное опирание торцевых сечений [4] и содержит n граней и t ребер.

Математическая формулировка задачи включает дифференциальные уравнения движения e-го элемента системы:

$$L_e^*\left[\overline{d}_e^*(x,y,t)\right]+G_e\partial^2/\partial t^2\overline{d}_e^*(x,y,t)=\overline{P}_e^*(x,y,t) \quad (1)$$

и нулевые начальные условия:

$$\overline{d}_e^*(x,y,0)=0, \qquad \partial/\partial t^2\overline{d}_e^*(x,y,0)=0. \quad (2)$$

Здесь модуль упругости E заменили комплексным модулем упругости E^*, зависящим от коэффициента потерь ε:

$$E^*=E\vartheta^*=E(\vartheta_1+i\vartheta_2),$$

где $$i=\sqrt{-1},\ \ \vartheta_1=\frac{1-0{,}25\varepsilon}{1+0{,}25\varepsilon^2},\ \ \vartheta_2=\frac{\varepsilon}{1+0{,}25\varepsilon^2}. \quad (3)$$

В уравнении (1) L_e^* – матрица дифференциальных операторов, соответствующих мембранному и изгибаемому состоянию пластины; G_e, $\overline{P}_e^*$ – соответственно диагональная матрица инерционных коэффициентов и вектор-функция динамической нагрузки.

Соотношения (1) содержат два уравнения движения e-й пластины в своей плоскости (плоская задача теории упругости) и одно уравнение ее поперечных колебаний (моментная техническая теория Кирхгоффа-Лява). Неизвестными являются функции продольных перемещений элемента U_e, V_e и его прогибов W_e, объединенных вектор-функцией

$$\overline{d}_e^*(x,y,t)=\left[U_e^*,V_e^*,W_e^*\right]. \quad (4)$$

Граничные условия задачи содержат уравнения равновесия в каждом k-м продольном ребре сооружения (5) и условия совместности перемещений соединяемых пластин (6) .

$$\sum_{e=1}^{n}b_{ek}h_e\overline{S}_e^*(\xi l_e,y,t)=0, \quad (k=1,2,\dots,m), \quad (5)$$

$$\sum_{e=1}^{n}\pm\left|b_{ek}^{/}\right|h_e\overline{D}_e^*(\xi l_e,y,t)=0, \quad (k=1,2,\dots,m). \quad (6)$$

В этих равенствах вектор-функции D_e, S_e – соответственно перемещения и усилия в срединной плоскости элемента:

$$\overline{D}_e^*=\left[U_e^*,V_e^*,W_e^*,\psi_e^*\right]^T, \quad \overline{S}_e^*=\left[N_{ex}^*,N_{exy}^*,Q_{ex}^*,M_{ex}^*\right]^T. \quad (7)$$

Квадратная матрица направляющих косинусов h_e обеспечивает преобразование векторов из локальных в глобальную систему координат в сечениях $x=0$, (b_{ek}= 1, ξ= 0) и x=l (b_{ek}= -1, ξ= 1).

Как показано в работе [7], общее число условий (5), (6) составляет $8n$. Наличие в этих соотношениях коэффициентов b_{ek}, $b_{ek}^{/}$, представляющих элементы матриц инциденций ориентированных графов B и B', обеспечивает математически примыкание к k-й узловой линии только тех элементов, которые соответствуют заданной конфигурации системы. При этом знаки плюс и минус в формуле (6) относятся к первому и второму ненулевым элементам матрицы B'. Уравнения совместности перемещений (6) записаны в форме попарных равенств перемещений всех элементов, примыкающих к k-му ребру оболочки. Такой порядок составления условий (6) достигается соответствующей процедурой формирования матрицы B', содержащей в каждой строке не более двух ненулевых элементов [7].

Соотношения (1) – (7), в отличие от аналогичной задачи, приведенной в работе [7], включают нестационарную нагрузку и содержат комплексные величины, обозначенные индексом со звездой. Такой подход в соответствии с предложением А. И. Цейтлина [1,8] предполагает введение в расчетную модель комплексного модуля упругости E^*, приводящего к зависимостям

$$L_e^* = (\vartheta_1 + i\vartheta_2)L_e;\ \overline{D}_e = Re(\overline{D}_e^*);$$
$$\overline{S}_e = Re(\overline{S}_e^*);\ \overline{P}_e = Re(\overline{P}_e^*), \qquad (8)$$

где L_e – матрица дифференциальных операторов с действительным модулем упругости E.

С целью интегрирования исходной задачи воспользуемся на интервале [0, L] синус- и косинус-преобразованиями Фурье по переменной y:

$$\overline{d}^{*f}_{e\,j}(x,t) = \int_0^L K_j \overline{d}_e^*(x,y,t)dy;$$
$$\overline{d}_e^*(x,y,t) = 2\sum_{j=1}^{\infty} K_j(y)\overline{d}_e^{*f}. \qquad (9)$$

Здесь первое равенство – прямое преобразование; второе – формула обращения; $K_{f(y)}$ – диагональная матрица синусов и косинусов аргумента $j_x y/L$, приводящая к тождественному удовлетворению условий (5) на торцах оболочки [4].

В результате применения преобразования (9) к задаче (1) – (5) получим:

$$(\vartheta_1 + i\vartheta_2)L_{ej}^{*f}\left[\overline{d}_{ej}^{*f}(x,t)\right] + G_e\partial^2/\partial t^2 \overline{d}_{ej}^{*f}(x,t) = \overline{P}_{ej}^{*f}(x,t); \qquad (10)$$

$$\overline{d}_{ej}^{*f}(x,0) = 0,\ \ \partial/\partial t^2 \overline{d}_{ej}^{*f}(x,,0) = 0; \qquad (11)$$

$$\sum_{e=1}^{n} b_{ek}h_e\overline{S}_{ej}^{*f}(\xi l_e, t) = 0, \quad (k = 1,2,...,m); \qquad (12)$$

$$\sum_{e=1}^{n} \pm\left|b_{ek}^{/}\right|h_e\overline{D}_{ej}^{*f}(\xi l_e, t) = 0, \quad (k = 1,2,...,m). \qquad (13)$$

В формулах (10) – (13) $\overline{d}_{ej}^{*f}, \overline{D}_{ej}^{*f}, \overline{S}_{ej}^{*f}, \overline{P}_{ej}^{*f}$ представляют вектор-функции перемещений, усилий и нагрузок в пространстве изображений Фурье, т.е.

$$\overline{d}_{ej}^{*f}(x,t) = \left[U_{ej}^{*s}, V_{ej}^{*c}, W_{ej}^{*s}\right]^T,$$
$$\overline{P}_{ej}^{*f} = \left[P_{exj}^{*s}, P_{eyj}^{*c}, P_{ezj}^{*s}\right]^T; \qquad (14)$$

$$\overline{D}_{ej}^{*f} = \left[U_{ej}^{*s}, V_{je}^{*c}, W_{ej}^{*s}, \psi_{ej}^{*s}\right]^T,$$
$$\overline{S}_{ej}^{*f} = \left[N_{exj}^{*s}, N_{exyj}^{*c}, Q_{exj}^{*s}, M_{exj}^{*s}\right]^T, \qquad (15)$$

где индексы s и c означают синус- и косинус-трансформанты Фурье соответствующих функций.

Введем на сегментах $[0, l_e]$ конечное интегральное преобразование (КИП) по переменной x:

$$\varphi^*_{ni}(\omega_{ni}, t) = \sum_{e=1}^{m}\int_0^{l_e}\left\{\vec{\tilde{d}}_{eni}^{\,T}(x) \times G_e \times \vec{d}_{en}^*(x,t)\right\}dx, \qquad (16)$$

$$\vec{d}_{en}^*(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_{ni}^*(\omega_{ni}, t)\vec{\tilde{d}}_{eni}(x)\left\|\Gamma_{ni}\right\|^{-2}. \qquad (17)$$

Спектр собственных значений ω_{ni} представлен действительными величинами.

Производим разделение переменных x и t. Получаем равенство, которое может быть представлено следующим образом:

$$(\vartheta_1 + i\ \vartheta_2)\sum_{e=1}^{m}\int_0^{l_e}\vec{\tilde{d}}_{eni}^{\,T}L_e\vec{d}_{en}^*dx + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_{e=1}^{m}\int_0^{l_e}\vec{\tilde{d}}_{eni}^{\,T}G_e\vec{d}_{en}^*dx = p_{ni}^*(t). \qquad (18)$$

Вводим два условия:

$$\vartheta_1\sum_{e=1}^{m}\int_0^{l_e}\vec{d}_{en}^{*T}L_e\vec{\tilde{d}}_{eni}dx = -\omega_{ni}^2\varphi_{ni}^*(t); \qquad (19)$$

$$i_1\vartheta_2\sum_{e=1}^{m}\int_0^{l_e}\vec{d}_{en}^{*T}L_e\vec{\tilde{d}}_{eni}dx = -c(t)\dot{\varphi}_{ni}^*(t). \qquad (20)$$

Первое из них является операционным свойством, а второе содержит неопределенную функцию $c(t)$.

Преобразуем равенство (1) к такому виду:

$$\ddot{\varphi}_{ni}^*(t) + c(t)\dot{\varphi}_{ni}^*(t) + \omega_{ni}^2\varphi_{ni}^*(t) = p_{ni}^*(t), (n, i = \overline{1,\infty}). \qquad (21)$$

Здесь $\vec{d}_{en}$, $\vec{f}_{en}$ – вещественная часть разложения (19); из уравнения (21) с учетом начальных условий выделяем их вещественные части:

$$\ddot{\varphi}_{ni} + c(t)\dot{\varphi}_{ni} + \omega_{ni}{}^2\varphi_{ni} = p_{ni},$$
$$\varphi_{ni}(0) = \varphi_{ni0}, \qquad (22)$$
$$\dot{\varphi}_{ni}(t)\Big|_{t=0} = \dot{\varphi}_{ni0},\ (n, i = \overline{1,\infty}),$$

где $\varphi_{ni}(t) = \mathrm{Re}[\varphi_{ni}^*(t)]$. (23)

Здесь содержится дополнительный член $c(t)\dot{\varphi}_{ni}(t)$.

Начальные условия задачи Коши получаются путем выделения действительных частей. Тогда соотношения (21) для каждого тона колебаний представляют собой математическую модель движения линейного осциллятора с упруговязким сопротивлением.

Для определения функции $c(t)$, входящей в уравнение (21), воспользуемся формулами (19), (20), из которых следует такое равенство:

$$c(t)\vartheta_1\dot{\varphi}^*(\omega_{ni}, t) = i_1\vartheta_2\omega_{ni}^2\varphi^*(\omega_{ni}, t). \qquad (24)$$

Полагаем, что нагрузка изменяется во времени по любому периодическому закону с периодом T. Тогда справедливо следующее разложение:

$$p_{ni}^*(t) = \sum_{r=1}^{\infty} p_{nir}^0 e^{i_1(\Omega_r t - \beta_r)}, \qquad (25)$$

где p_{nir}^0 – амплитудные значения гармонических составляющих функции нагрузки, $\Omega_r = 2\pi r T^{-1}$; β_r – круговые частоты и начальные фазы их изменения.

Используем зависимость (25) для описания непериодического процесса нагружения и рассмотрим нестационарное воздействие как предельный случай стационарного при $T \to \infty$. Если нагрузка может быть представлена функциями, всюду удовлетворяющими условиям Дирихле и абсолютно интегрируемыми, то комплексный ряд (25) переходит в двойной комплексный интеграл Фурье:

$$p^*_{ni}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}d\Omega\int_{-\infty}^{\infty}p_{ni}(\tau)e^{i_1\Omega(t-\tau)}d\tau. \qquad (26)$$

Очевидно, что воздействию (26) при выполнении принципа суперпозиции линейных решений соответствует трансформанта преобразования, имеющая аналогичный вид, т.е.:

$$\varphi^*_{ni}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}F^*_{ni}(\Omega,t)d\Omega;$$
$$F^*_{ni}(\Omega,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{ni}(\tau)e^{i_1\Omega(t-\tau)}d\tau. \qquad (27)$$

При этом известно, что диссипативные силы в слабодемпфированных системах влияют на амплитуду колебаний лишь в весьма узком диапазоне частоты в резонансной области, а на частоту свободных колебаний практически не влияют. В связи с этим для n, i-го тона колебаний справедливы следующие приближенные зависимости:

$$\varphi^*_{ni}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}F^*_{ni}(\Omega,t)d\Omega\cong\frac{2}{\pi}\int_{\omega_{ni}-\Delta}^{\omega_{ni}+\Delta}F^*_{ni}(\Omega,t)d\Omega;$$
$$\dot{\varphi}^*_{ni}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\Omega F^*_{ni}(\Omega,t)d\Omega\cong i_1\omega_{ni}\frac{2}{\pi}\int_{\omega_{ni}-\Delta}^{\omega_{ni}+\Delta}F^*_{ni}(\Omega,t)d\Omega, \qquad (28)$$

где Δ – характеристика, определяющая ширину резонансной зоны.

Из соотношений (28) следует:

$$\dot{\varphi}^*_{ni}(t)=i_1\omega_{ni}\varphi^*_{ni}(t). \qquad (29)$$

Подстановка соотношения (28) в равенство (19) позволяет получить формулу для искомого коэффициента вязкости

$$c(t)=c_{ni}=\omega_{ni}\,\vartheta_2/\vartheta_1, \qquad (30)$$

которая с достаточной степенью точности может быть представлена в следующем виде:

$$c_{ni}=\varepsilon\omega_{ni}. \qquad (31)$$

Решение начальной задачи записывается в виде интеграла Дюамеля:

$$\varphi_{ni}(t)=A^0_{ni}\exp(-0.5\varepsilon\omega_{ni})Sin(\omega_{ni}t+\psi_{ni}{}^0)+$$
$$+\frac{1}{\omega_{ni}}\int_0^t p_{ni}(\tau)\exp[-0.5\varepsilon\omega_{ni}(t-\tau)]Sin\omega_{ni}(t-\tau)d\tau, \qquad (32)$$

где $A^0_{ni}=\sqrt{\varphi^2_{0ni}+(\dot{\varphi}_{0ni}+0.5\varepsilon\omega_{ni}\varphi_{0ni})^2\omega^{-2}_{ni}}$,

$$\psi^0_{ni}=arctg\frac{\omega_{ni}\varphi_{0ni}}{\dot{\varphi}_{0ni}+0.5\varepsilon\omega_{ni}\varphi_{0ni}}. \qquad (33)$$

Необходимо отметить, что полученное соотношение для коэффициентов c_{ni} приводит к частотно-независимой вязкоупругой модели, позволяющей учитывать внутреннее сопротивление материала призматической оболочки при ее нестационарном динамическом нагружении.

Вывод. Численный анализ колебаний с учетом внутреннего сопротивления показывает, что влияние отмеченного фактора приводит к снижению амплитудных значений колебаний на 7–8 %. Эффект влияния внутреннего сопротивления на напряженно-деформированное состояние является наиболее ощутимым в случае действия кратковременных нагрузок, причем на усилиях это влияние сказывается в большей степени, чем на перемещениях.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Еленицкий Э.Я., Хренков С. Л.* Нестационарная задача динамики для стержневых систем с распределенными параметрами // Изв. вузов. Строительство. 1996. № 3. С. 36–43.

2. *Цейтлин А.И.* О линейных моделях частотно-независимого внутреннего трения // Изв. АНСССР. МТТ.1978.№3. С.18–28.

3. *Еленицкий Э.Я, Вронская Е.С.* Нестационарная задача динамики для призматических систем с учетом внутреннего трения // Изв. Вузов. Строительство. 1998. № 7. С. 25–33.

4. *Вронская Е.С., Емец В.Н.* Расчет составных конструкций с учетом внутреннего трения // Труды 14-й международной конференции-конкурса. Технические науки. Ч. 8. Строительство и архитектура. Самара, 2013.

5. *Власов В.З.* Тонкостенные пространственные системы. М.: Издательство академии наук СССР. 1964. 472 с.

6. *Еленицкий Э.Я.* Расчет свободных колебаний призматических систем с распределенными параметрами // Изв. вузов. Строительство. 1996. № 7. С. 26–31.

7. *Милейковский И.Е.* Расчет оболочек и складок методом перемещений. М.: Госстройиздат, 1960. 357 с.

8. *Сорокин Е.С.* К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Госстройиздат, 1960. 154 с.

9. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат.лит.,1973.

10. *Цейтлин А.И.* Прикладные методы решения краевых задач строительной механики. М.: Стройиздат, 1984. 334 с.

11. *Сеницкий Ю.Э.* Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам динамики // Известия вузов. Математика.1991.№4. С.57–63.

Об авторе:

ВРОНСКАЯ Елена Сергеевна
кандидат технических наук, доцент кафедры строительной механики и сопротивления материалов
Самарский государственный технический университет
Архитектурно-строительный институт
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 194

VRONSKAYA Elena S.
PhD in Engineering Science, Associate Professor of the Construction Mechanics and Strength of Materials Chair
Samara State Technical University
Institute of Architecture and Civil Engineering
443001, Russia, Samara, Molodogvardeyskaya str., 194

Для цитирования: *Вронская Е.С.* Динамический расчет призматических систем с учетом внутреннего трения // Градостроительство и архитектура. 2017. Т.7, №3. С. 24-27. DOI: 10.17673/Vestnik.2017.03.5.
For citation: *Vronskaya E.S.* Dynamic calculation of prismatic systems taking into account internal friction // Urban Construction and Architecture. 2017. V.7, 3. Pp. 24-27. DOI: 10.17673/Vestnik.2017.03.5.