УДК 536. 2 (075)
DOI: 10.17673/Vestnik.2018.03.7

О. Ю. КУРГАНОВА

ПРИМЕНЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ИСКОМЫХ ФУНКЦИЙ И ЛОКАЛЬНЫХ СИСТЕМ КООРДИНАТ В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

ADDITIONAL SOUGHT-FOR FUNCTIONS AND LOCAL COORDINATE SYSTEMS APPLIED IN THE HEAT CONDUCTIVITY PROBLEMS FOR MULTILAYERED BUILDING STRUCTURES

На основе определения дополнительной искомой функции и дополнительных граничных условий при использовании локальных систем координат получено приближенное аналитическое решение задачи теплопроводности для двухслойной пластины при симметричных граничных условиях первого рода. Использование дополнительной искомой функции в интегральном методе теплового баланса позволяет свести решение уравнения в частных производных к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения. Дополнительные граничные условия находятся в таком виде, чтобы их выполнение искомым решением было эквивалентно выполнению дифференциального уравнения в граничных точках.

Ключевые слова: *двухслойная пластина, нестационарная теплопроводность, интегральный метод теплового баланса, дополнительная искомая функция, дополнительные граничные условия, локальные системы координат*

The solution problems of the additional the sought-for function and additional boundary conditions based when using local coordinate systems, an approximate analytical solution of the heat conduction problem for a double-layer plate is obtained for symmetric boundary conditions of the first kind. The use of the additional sought-for function in the integral method of heat balance makes it possible to reduce the solution of the partial differential equation to the integration of an ordinary differential equation.

Keywords: *double-layer plate, unsteady-state conduction, integral method of heat balance, additional sought-for function, additional boundary conditions, local coordinate systems.*

Трудности получения решений задач теплопроводности для многослойных конструкций заключаются в необходимости выполнения условий сопряжения между слоями, задаваемых в виде равенства температур и тепловых потоков. Классические аналитические методы в данном случае приводят к решению систем многопараметрических трансцендентных уравнений относительно собственных чисел краевой задачи, которая может быть решена лишь численными методами [1 – 5]. В работе [3] на основе использования асимметричной единичной функции (функции Хевисайда) многослойная конструкция приводится к однослойной с разрывными (кусочно-однородными) свойствами среды. Процесс получения решения задачи упрощается ввиду отсутствия необходимости выполнения условий сопряжения, которые в данном случае включаются в дифференциальное уравнение и оказываются выполненными в процессе нахождения его решения. Однако такие решения, даже при незначительном числе приближений (два-три приближения) выражаются сложными функциональными рядами. Получение решений при большем числе приближений затруднительно, и, следовательно, возникает проблема недостаточной точности.

В работе [4] применительно к решению задач теплопроводности для многослойных конструкций приводится метод, основанный на совместном использовании классических точных аналитических методов (Фурье, интегральных преобразований и др.) и приближенных методов (Л.В. Канторовича, Бубнова – Галеркина и др.). В случаях, когда удается построить системы координатных функций, точно удовлетворяющих граничным условиям и условиям сопряжения, данный метод приводит к необходимости решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных функций времени. При большом числе приближений процесс получения решения в данном случае существенно усложняется, а сами решения выражаются громоздкими математическими выражениям.

В настоящей работе с целью упрощения процесса получения решений и окончательных выражений для них используется интегральный метод теплового баланса с определением дополнительных искомых функций и дополнительных граничных условий. Основную его идею рассмотрим на примере решения следующей краевой задачи для двухслойной пластины, представленной в локальной (различной для каждого отдельного слоя) системе координат (рис. 1):

$$\frac{\partial \Theta_1(\xi_1, F_0)}{\partial F_0} = \frac{\partial^2 \Theta_1(\xi_1, F_0)}{\partial \xi_1^2}; \quad (F_0 > 0; 0 < \xi_1 < r_1); \tag{1}$$

$$\frac{\partial \Theta_2(\xi_2, F_0)}{\partial F_0} = \frac{a_2}{a_1} \frac{\partial^2 \Theta_2(\xi_2, F_0)}{\partial \xi_2^2}; \quad (F_0 > 0; 0 < \xi_2 < r_2); \tag{2}$$

$$\Theta_1(\xi_1, 0) = 1; \tag{3}$$

$$\Theta_2(\xi_2, 0) = 1; \tag{4}$$

$$\partial \Theta_1(0, F_0) / \partial \xi_1 = 0; \tag{5}$$

$$\Theta_1(r_1, F_0) = \Theta_2(0, F_0); \tag{6}$$

$$\lambda_1 \partial \Theta_1(r_1, F_0) / \partial \xi_1 = \lambda_2 \partial \Theta_2(0, F_0) / \partial \xi_2; \tag{7}$$

$$\Theta_2(r_2, F_0) = 0, \tag{8}$$

где $\Theta_i = \frac{T_i - T_{cm}}{T_0 - T_{cm}}$, $(i = 1, 2)$; $F_0 = \frac{a_1 t}{\delta^2}$; $\xi_1 = \frac{x_1}{\delta}$; $\xi_2 = \frac{x_2}{\delta}$; $r_1 = \frac{\delta_1}{\delta}$; $r_2 = \frac{\delta_2}{\delta}$; Θ – безразмерная температура; F_0 – число Фурье (безразмерное время); ξ_1, ξ_2 – безразмерные координаты первого и второго слоя; r_1, r_2 – безразмерные толщины слоев; T_i, x_i, $(i = 1, 2)$ – температура и координата первого и второго слоя; t – время; δ_i, a_i, λ_i, $(i = 1, 2)$ – толщины, коэффициенты температуропроводности и теплопроводности слоев; T_0 – начальная температура; T_{cm} – температура стенки при $x_2 = \delta_2$; $\delta = \delta_1 + \delta_2$ – суммарная толщина слоев.

Введем дополнительную искомую функцию

$$q(F_0) = \Theta_1(0, F_0), \tag{9}$$

характеризующую изменение температуры в точке $\xi_1 = 0$ во времени.

Решение задачи (1) – (8) соответственно для каждого слоя принимается в виде

$$\Theta_1(\xi_1, F_0) = \sum_{k=1}^{n} b_k(q) \varphi_{1k}(\xi_1); \tag{10}$$

$$\Theta_2(\xi_2, F_0) = \sum_{k=1}^{n} b_k(q) \varphi_{2k}(\xi_2), \tag{11}$$

где $b_k(q)$ – неизвестные коэффициенты; $\varphi_{1k}(\xi_1)$, $\varphi_{2k}(\xi_2)$ – координатные функции соответственно для первого и второго слоя, которые находятся в таком виде, чтобы искомые решения (10) – (11) заранее точно удовлетворяли граничным условиям и условиям сопряжения в любом приближении.

Формулы для координатных функций первого приближения принимаются в виде

$$\varphi_{1k}(\xi_1) = A_{1k} + \xi_1^{2k}; \tag{12}$$

$$\varphi_{2k}(\xi_2) = B_{1k} + B_{2k}\xi_2 + \xi_2^{2k}, \tag{13}$$

где A_{1k}, B_{1k}, B_{2k} – неизвестные коэффициенты, определяемые из граничных условий (5), (8) и условий сопряжения (6), (7).

Решение (10) с координатной функцией (12) точно удовлетворяет граничному условию (5), независимо от величины коэффициента A_{1k}. Следовательно,

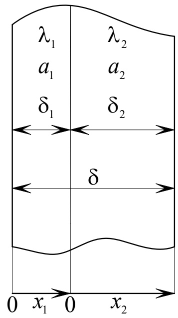

Рис. 1. Схема применения локальных систем координат для двухслойной пластины

для нахождения неизвестных коэффициентов A_{1k}, B_{1k}, B_{2k} будем иметь условия (6) – (8). Подставляя (12), (13) в эти условия, получаем систему трех алгебраических линейных уравнений. Подставляя найденные из решения этой системы неизвестные коэффициенты A_{1k}, B_{1k}, B_{2k} в соотношения (12), (13), получаем

$$\varphi_{1k}(\xi_1) = -r_1^{2k} - r_2^{2k} - 2k\frac{\lambda_1}{\lambda_2} r_1^{2k-1} r_2 + \xi_1^{2k}; \tag{14}$$

$$\varphi_{2k}(\xi_2) = -r_2^{2k} - 2k\frac{\lambda_1}{\lambda_2} r_1^{2k-1}(r_2 - \xi_2^{2k}) + \xi_2^{2k}. \tag{15}$$

С учетом формул (14), (15) соотношения (10), (11) в любом приближении точно удовлетворяют граничным условиям (5), (8) и условиям сопряжения (6), (7). Неизвестные коэффициенты $b_k(q)$ рассчитываются из условия (9) и некоторых дополнительных граничных условий, определяемых таким образом, чтобы искомое решение вида (10) удовлетворяло уравнению (1) в граничной точке $\xi_1 = 0$, а решение вида (11) – уравнению (2) в граничной точке $\xi_2 = r_2$.

Общие формулы для дополнительных граничных условий имеют вид [3, 5]:

$$\partial^{2i-1}\Theta_1(0, F_0) / \partial \xi_1^{2i-1} = 0, \quad (i = 2, 3, 4, \ldots); \tag{16}$$

$$\partial^{2i}\Theta_1(0, F_0) / \partial \xi_1^{2i} = d^i q(F_0) / dF_0^i, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots); \tag{17}$$

$$\partial^{2i}\Theta_2(r_2, F_0) / \partial \xi_2^{2i} = 0, \quad (i = 2, 3, 4, \ldots). \tag{18}$$

Для нахождения решения в первом приближении будем использовать условие (9) и дополнительные граничные условия, определяемые по формулам (17), (18) при $i = 1$. Отметим, что дополнительные граничные условия (16) решением (10) выполняются. Подставляя (10), (11), ограничиваясь тремя членами, в (9), (17), (18), для определения неизвестных коэффициентов $b_k(q)$, $(k = 1, 2, 3)$ получаем систему трех алгебраических линейных уравнений. После определения из решения этой системы коэффициентов $b_k(q)$ соотношения (10), (11) принимают вид

$$\Theta_1(\xi_1, F_0) = 0{,}5q'\varphi_{11} - (q'\eta_1 + q\eta_2)\varphi_{12} / \eta + (q'\eta_3 + q\eta_4)\varphi_{13} / \eta; \tag{19}$$

$$\Theta_2(\xi_2, F_0) = 0{,}5q'\varphi_{21} - (q'\eta_1 + q\eta_2)\varphi_{22} / \eta + (q'\eta_3 + q\eta_4)\varphi_{23} / \eta. \tag{20}$$

Потребуем, чтобы соотношения (19), (20) удовлетворяли не исходным уравнениям (1), (2), а некоторым осредненным по толщине соответствующего слоя уравнениям или интегралу теплового баланса вида

$$\int_0^{\Delta_1}\left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial F_0}-\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial\xi_1^2}\right)d\xi_1+\int_0^{\Delta_2}\left(\frac{\partial\Theta_2}{\partial F_0}-\frac{a_2}{a_1}\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial\xi_2^2}\right)d\xi_2=0. \qquad (21)$$

Подставляя (19), (20) в (21), находим

$$K\frac{d^2q}{dF_0}+L\frac{dq}{dF_0}+Mq=0, \qquad (22)$$

где $K = r_1r_2\lambda_1(-420r_1^6r_2^3+22r_1^9-360r_1^7r_2^4+490r_1^5r_2^4-300r_1^2r_2^7+165r_2^9-672r_1^4r_2^5)+r_1^2r_2^2\lambda_2(-98r_1^3r_2^4+95r_1^5r_2^2+105r_1r_2^6-40r_1^7r_2-320r_1^2r_2^5+112r_1^4r_2^3+240r_2^7)+2\lambda_2(16r_2^{11}+r_1^{11})$; $L=a_1\lambda_1r_1^3r_2^3(2100r_2^3-1260r_1^2(r_2+2r_1))+1680\,a_2\lambda_1r_1r_2^4(r_1^4-2r_1^2r_2^2+r_2^6)+10a_1\lambda_2(7r_1^9+48r_2^9+4220a_1\lambda_1r_1^4r_2^5)$; $M = 840r_2^2\lambda_2(2a_2r_2^5+a_1r_1^3(5r_2^2-3r_1^2))$.

Интегрируя уравнение (22), получаем

$$q(F_0)=C_1\exp\left(-\frac{(L^2-4KM)^{1/2}+L}{2K}F_0\right)+ +C_2\exp\left(\frac{(L^2-4KM)^{1/2}-L}{2K}F_0\right), \qquad (23)$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий (3), (4).

Составляя невязку начальных условий (3), (4) и требуя выполнения их ортогональности к координатным функциям $\varphi_{1k}(\xi_1)$, $\varphi_{2k}(\xi_2)$, (k = 1, 2), находим

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{\Delta_1}\left[\Theta_1(\xi_1,0)-1\right]\varphi_{11}(\xi_1)d\xi_1+\int_0^{\Delta_2}\left[\Theta_2(\xi_2,0)-1\right]\varphi_{21}(\xi_2)d\xi_2=0;\\&\int_0^{\Delta_1}\left[\Theta_1(\xi_1,0)-1\right]\varphi_{12}(\xi_1)d\xi_1+\int_0^{\Delta_2}\left[\Theta_2(\xi_2,0)-1\right]\varphi_{22}(\xi_2)d\xi_2=0.\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Подставляя (19), (20) (с учетом (23)) в (24) и определяя интегралы, относительно C_1 и C_2 будем иметь систему двух алгебраических линейных уравнений. После их определения решение задачи (1) – (8) в первом приближении рассчитывается из (19), (20).

Найдем решение конкретной задачи при следующих исходных данных: a_1 = 12,5·10^{–6} м²/с; a_2 = 6·10^{–6} м²/с; λ_1 = 45,24 Вт/(м·K); λ_2 = 16,24 Вт/(м·K); δ_1 = 0,002 м; δ_2 = 0,004 м.

Анализ результатов расчетов по формулам (19), (20) (первое приближение) в сравнении с решением задачи (1) – (8) методом конечных разностей позволяет заключить, что в диапазоне $0{,}2 \leqslant F_0 \leqslant \infty$ их расхождение не превышает 4 %.

Если положить $\lambda_1 = \lambda_2$, $a_1 = a_2$, то задача (1) – (8) сводится к однослойной. Соотношение (12) в данном случае приводится к виду

$$\Theta(\xi, F_0) = 1{,}5\exp(-2{,}5\,F_0). \qquad (25)$$

Результаты расчетов по формуле (25) в диапазоне $0{,}1 \leqslant F_0 \leqslant \infty$ отличаются от точного решения [4] не более чем на 2,5 %.

Для повышения точности решения необходимо увеличивать число членов ряда соотношений (10), (11). При получении решения во втором приближении для определения неизвестных коэффициентов $b_k(q)$ будем использовать условие (9) и дополнительные граничные условия, получаемые по формулам (17) (i = 1, 2), (18) при i = 2, 4. Следовательно, для определения коэффициентов $b_k(q)$, (k = 1,5) будем иметь систему пяти алгебраических линейных уравнений. Дальнейший процесс получения решения аналогичен приведенному выше. Расхождение решения во втором приближении с расчетом по методу конечных разностей составляет 5 %.

В третьем приближении для определения неизвестных коэффициентов $b_k(q)$, (k = 1,7) будем иметь семь алгебраических линейных уравнений, получаемых из условия (9) и дополнительных граничных условий (17) (i = 1, 2, 3), (18) при i = 2, 4, 6. Расхождение с численным методом в диапазоне числа

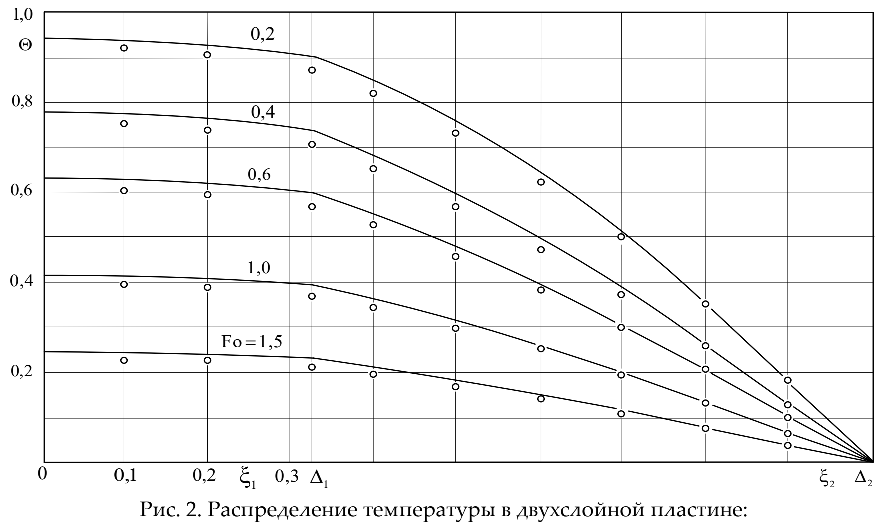

Рис. 2. Распределение температуры в двухслойной пластине:
○ – по формулам (10), (11) в третьем приближении; ——— – метод конечных разностей

Фурье $0{,}2 \leqslant F_0 \leqslant \infty$ в данном случае снижается до 2 % (рис. 2). В случае, когда двухслойная пластина приведена к однослойной, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2$, $a_1 = a_2$, то в диапазоне $0{,}1 \leqslant F_0 \leqslant \infty$ максимальное расхождение с точным решением [4] не превышает 1 %.

Выводы. 1. Используя найденные в работе системы координатных функций, точно удовлетворяющих граничным условиям и условиям сопряжения, путем введения дополнительной искомой функции и дополнительных граничных условий в интегральном методе теплового баланса получено приближенное аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности для двухслойной пластины при симметричных граничных условиях первого рода.

2. С целью построения наиболее простого вида систем координатных функций, точно удовлетворяющих граничным условиям и условиям сопряжения, применяются локальные (различные для каждого слоя) системы координат. При их использовании координата в каждом слое изменяется от нуля до толщины соответствующего слоя, что позволяет существенно упростить как процесс построения координатных функций, так и окончательные выражения для них.

3. Дополнительная искомая функция характеризует изменение температуры во времени в центре симметрии двухслойной пластины. Ее использование в интегральном методе теплового баланса позволяет свести решение уравнения в частных производных к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения.

4. Дополнительные граничные условия находятся в таком виде, чтобы их выполнение искомыми решениями было эквивалентно выполнению исходных дифференциальных уравнений в граничных точках. Показано, что выполнение уравнений в граничных точках приводит к их выполнению и внутри рассматриваемых областей с точностью, зависящей от числа приближений (числа дополнительных граничных условий).

5. Решение данной задачи может быть использовано для оценки температурного состояния многослойных строительных конструкций в условиях нестационарного нагрева или охлаждения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кудинов В.А., Стефанюк Е.В.* Аналитический метод решения задач теплопроводности на основе введения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий // Инженерно-физический журнал. 2009. Т.82, №3. С. 540 – 558.

2. *Карташов Э.М., Кудинов В.А.* Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений. 4-е изд. М.: ЛЕНАНД, 2008. 1072 с.

3. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Методы решения параболических и гиперболических уравнений переноса тепла, массы, импульса. М.: ЛЕНАНД, 2017. 336 с.

4. *Карташов Э.М., Кудинов В.А., Калашников В.В.* Теория тепломассопереноса: решение задач для многослойных конструкций. М.: Издательство Юрайт, 2018. 435 с.

5. *Кудинов И.В., Кудинов В.А.* Аналитические решения параболических и гиперболических уравнений тепломассопереноса. М.: ИНФРА-М, 2013. 391 с.

Об авторе:

КУРГАНОВА Ольга Юрьевна
аспирант кафедры теоретических основ теплотехники и гидромеханики
Самарский государственный технический университет
443100, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
E-mail: totig@yandex.ru

KURGANOVA Ol'ga Yu.
Postgraduate Student of the Theoretical Foundations of Heat Engineering and Hydromechanics Chair
Samara State Technical University,
443100, Russia, Samara, Molodogvardeyskaya str., 244
E-mail: totig@yandex.ru

Для цитирования: *Курганова О.Ю.* Применение дополнительных искомых функций и локальных систем координат в задачах теплопроводности для многослойных строительных конструкций // Градостроительство и архитектура. 2018. Т.8, №3. С. 29-32. DOI: 10.17673/Vestnik.2018.03.7.
For citation: *Kurganova O.Yu.* Additional Sought-for Functions and Local Coordinate Systems Applied in the Heat Conductivity Problems for Multilayered Building Structures // Urban Construction and Architecture. 2018. V. 8, 3. Pp. 29-32. DOI: 10.17673/Vestnik.2018.03.7.