

**О. Ю. КУРГАНОВА**  
**И. В. КУДИНОВ**  
**Р. М. КЛЕБЛЕЕВ**  
**Е. В. СТЕФАНЮК**  
**Т. Е. ГАВРИЛОВА**

## **АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЛЩИНЫ ОТЛОЖЕНИЙ НА ВНУТРЕННИХ ПОВЕРХНОСТЯХ ТЕПЛООБМЕННИКОВ**

**ANALYTICAL METHOD FOR DETERMINING THE THICKNESS OF DEPOSITS ON THE INTERNAL SURFACES OF HEAT EXCHANGERS**

*Используя точное аналитическое решение стационарной задачи теплопроводности для двухслойной плоской стенки при неоднородных граничных условиях первого и третьего рода, разработан аналитический метод определения толщины слоя отложений на внутренней поверхности стенки трубопровода по известной из эксперимента температуре на его внешней поверхности. Толщина отложений определяется из решения обратной задачи путем подстановки экспериментального значения температуры внешней поверхности стенки в формулу точного аналитического решения. По результатам теоретических исследований толщина отложений составила 1,3 см. Ввиду большого диаметра трубопровода (0,6 м) и незначительной толщины двухслойной стенки (0,016 м) она принималась плоской. Толщина отложений согласно экспериментальным исследованиям составила 1,1 см. Показано, что расхождение результатов теоретических и экспериментальных исследований составляет 15,3%. Приведена последовательность получения решения аналогичной задачи и для цилиндрической стенки.*

**Ключевые слова:** двухслойная стенка, стационарная задача теплопроводности, точное аналитическое решение, толщина отложений, обратная задача теплопроводности, экспериментальные исследования

*Using the exact analytical solution of the stationary thermal conductivity problem for a two-layer flat wall under inhomogeneous boundary conditions of the first and third kind, an analytical method for thickness determination of the sediment layer on the inner surface of the pipeline wall by the temperature known from the experiment on its outer surface is developed. The thickness of the deposits is found from the solution of the inverse problem by substituting the experimental value of the temperature of the outer surface of the wall into the formula of an accurate analytical solution. According to the results of theoretical studies, the thickness of the deposits was equal to 1.3 cm. Due to the large diameter of the pipeline (0.6 m) and the insignificant thickness of the two-layer wall (0.016 m), it was assumed to be flat. The thickness of the deposits according to experimental studies was equal to 1.1 cm. Therefore, the discrepancy between the results of theoretical and experimental studies is 15.3%. The sequence of obtaining a solution to a similar problem for a cylindrical wall is also presented.*

**Keywords:** two-layer wall, stationary heat conduction problem, exact analytical solution, the thickness of the deposits, inverse heat conduction problem, experimental study

При течении теплоносителей на внутренних поверхностях трубопроводов и плоских стенок могут возникать различного состава отложения (парафины, кокс, смолы и пр.). Их толщина может достигать величин, при которых значительно уменьшаются диаметры трубопроводов, что приводит к росту их гидравлического сопротивления и, в конечном итоге, к уменьшению расхода среды. Кроме того, ввиду незначительной величины коэффициентов теплопроводности отложений ухудшаются теплообменные свойства стенок.

Причинами возникновения отложений на внутренних поверхностях теплообменников могут быть следующие: нагрев жидкостей, в результате которого могут выделяться содержащиеся в них соли различного состава; при-

мерно к жидким топливам (бензин, керосин, солярка и пр.) при их нагреве на стенках трубопроводов могут откладываться твердые углеводороды; бывают также отложения, связанные с коррозионными процессами, и др.

Определение толщины отложений без вскрытия стенок трубопроводов представляется сложной технической задачей, для решения которой требуется применение специального оборудования [1–5]. В настоящей работе излагается приближенный аналитический метод ее определения, для использования которого необходимо лишь знание температуры наружной поверхности стенки теплообменника, определяемой из эксперимента, и коэффициента теплопроводности отложений. По найденной из эксперимента температуре внешней

поверхности, а также при наличии аналитического решения задачи теплопроводности для двухслойной стенки (толщина отложений – стенка исследуемой конструкции) путем решения обратной задачи определяется толщина отложений [6, 7].

Основную идею метода рассмотрим на примере решения задачи теплопроводности для двуслойной плоской стенки (материал отложений – стенка конструкции) в следующей математической постановке (рис. 1) [7–9]:

$$\frac{d^2 T_i(x)}{dx^2} = 0, \quad (i=1,2; \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad x_0=0; \quad x_2=\delta); \quad (1)$$

$$T_1(0) = T_{cm}; \quad (2)$$

$$\frac{dT_2(\delta)}{dx} - \frac{\alpha}{\lambda_2} [T_{cp} - T_2(\delta)] = 0; \quad (3)$$

$$T_1(x_1) = T_2(x_1); \quad (4)$$

$$\lambda_1 \frac{dT_1(x_1)}{dx} = \lambda_2 \frac{dT_2(x_1)}{dx}, \quad (5)$$

где  $T_i$  – температура  $i$ -го слоя ( $i = 1, 2$ );  $x$  – координата;  $T_{cm}$  – температура поверхности отложений;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи на наружной поверхности стенки трубы;  $T_{cp}$  – температура окружающей среды;  $\lambda_1$  – коэффициент теплопроводности отложений;  $\lambda_2$  – коэффициент теплопроводности стенки трубы;  $\delta = \delta_1 + \delta_2$  – суммарная толщина двуслойной стенки;  $\delta_1, \delta_2$  – толщины первого и второго слоя.

Для приведения задачи (1) – (5) к безразмерному виду обозначим:

$$\Theta_i = \frac{T_i - T_{cp}}{T_{cm} - T_{cp}}, \quad (i=1,2); \quad \text{Bi} = \frac{\alpha \delta}{\lambda_2}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad H = \frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

где  $\Theta_i$  ( $i = 1, 2$ ) – безразмерная температура;  $\text{Bi}$  – число Био;  $\xi$  – безразмерная координата;  $H$  – безразмерный параметр.

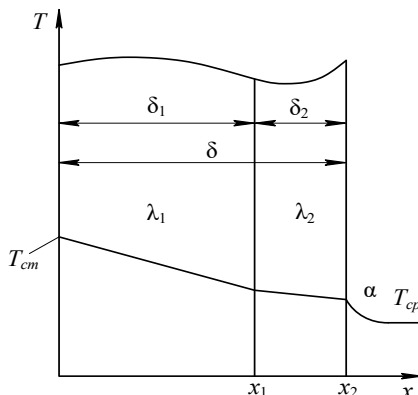


Рис. 1. Схема теплообмена в двуслойной системе

С учетом принятых обозначений задача (1) – (5) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Theta_i(\xi)}{\partial \xi^2} = 0, \quad (i=1,2; \quad \xi_{i-1} \leq \xi \leq \xi_i; \quad \xi_0 = 0; \quad \xi_2 = 1); \quad (6)$$

$$\Theta_1(0) = 1; \quad (7)$$

$$\frac{d\Theta_2(1)}{d\xi} + \text{Bi}\Theta_2(1) = 0; \quad (8)$$

$$\Theta_1(\xi_1) = \Theta_2(\xi_1); \quad (9)$$

$$\frac{d\Theta_1(\xi_1)}{d\xi} = H \frac{d\Theta_2(x_1)}{d\xi}. \quad (10)$$

Из математической постановки задачи следует, что со стороны жидкости задаются граничные условия первого рода, т. е. температура поверхности отложений принимается равной температуре жидкости. Это допущение может быть принято в случае достаточно больших скоростей течения среды и при малых значениях коэффициента теплопроводности отложений. В большом числе реальных физических процессов эти условия выполняются.

Решение задачи (6) – (10) принимается в виде

$$\Theta_1(\xi) = C_{11}\xi + C_{21}; \quad (11)$$

$$\Theta_2(\xi) = C_{12}\xi + C_{22}, \quad (12)$$

где  $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$  – неизвестные коэффициенты.

Соотношения (11) – (12) удовлетворяют уравнению (6). Неизвестные коэффициенты  $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$  находятся из граничных условий (7), (8) и условий сопряжения (9), (10). Подставляя (11), (12) в (7) – (10), относительно неизвестных коэффициентов получаем систему алгебраических линейных уравнений, из решения которой находим

$$C_{11} = -\text{Bi}H / \eta; \quad C_{21} = 1; \quad (13)$$

$$C_{12} = -\text{Bi}/\eta; \quad C_{22} = (1 + \text{Bi}) / \eta,$$

где  $\eta = 1 + \text{Bi}[1 + \xi_1(H - 1)]$ .

Соотношения (11), (12) с учётом (13) принимают вид

$$\Theta_1(\xi) = 1 - \frac{\text{Bi}H\xi}{1 + \text{Bi}(1 + \xi_1(H - 1))}; \quad (14)$$

$$\Theta_2(\xi) = \frac{1 + \text{Bi}(1 - \xi)}{1 + \text{Bi}(1 + \xi_1(H - 1))}. \quad (15)$$

Соотношения (14), (15) представляют точное аналитическое решение задачи (6) – (10),

в чем можно убедиться непосредственной подстановкой.

Для решения обратной задачи по определению толщины отложений  $\delta_1$  на внутренней поверхности стенки трубы соотношения (14), (15) запишем в размерном виде

$$T_1(x) = T_{cp} + \Delta T \left( 1 - \alpha x / \left( \lambda_1 + \frac{\alpha \lambda_1 (\delta_1 + \delta_2)}{\lambda_2} \left( 1 + \frac{x_1}{\delta_1 + \delta_2} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 \right) \right) \right) \right); \quad (16)$$

$$T_2(x) = T_{cp} + \frac{\Delta T \left( 1 + \frac{\alpha (\delta_1 + \delta_2)}{\lambda_2} \left( 1 - \frac{x}{\delta_1 + \delta_2} \right) \right)}{1 + \frac{\alpha (\delta_1 + \delta_2)}{\lambda_2} \left( 1 + \frac{x_1}{\delta_1 + \delta_2} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 \right) \right)}, \quad (17)$$

где  $\Delta T = T_{cm} - T_{cp}$ .

Используя соотношение (17), найдем толщину отложений  $\delta_1$  применительно к решению тестовой задачи. Допустим, что полученная из эксперимента температура на внешней поверхности стенки трубопровода  $T_2(x_2) = 343$  К. Исходные данные для решения задачи были следующие:  $\lambda_1 = 1,5$  Вт / (мК);  $\lambda_2 = 45$  Вт / (мК);  $\delta_2 = 0,005$  м;  $T_{cm} = 373$  К;  $T_{cp} = 273$  К;  $\alpha = 10$  Вт / (м<sup>2</sup>К).

Подставляя  $T_2(x_2)$  в левую часть соотношения (17), положив  $\delta = \delta_1 + \delta_2$ , относительно неизвестной величины  $\delta_1$  получаем следующее квадратное уравнение:

$$2,8(\delta_1 + 0,005)(45\delta_1 + 0,01) - 2,7(2\delta_1 + 0,01) = 0. \quad (18)$$

Из решения уравнения (18) находим  $\delta_1 = 0,04$  м;  $\delta_1 = -0,005$  м. Отрицательный корень, как не имеющий физического смысла, не используется. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что соотношения (16), (17) с учетом найденного положительного значения  $\delta_1$  удовлетворяют всем условиям задачи (1) – (5).

Точность теоретического метода исследования толщины отложений была проверена путем сравнения с экспериментальными данными, выполненными на трубопроводе с диаметром 600 мм и толщиной металлической стенки 5 мм. Поперечное сечение трубопровода приведено на рис. 2. По результатам экспериментального измерения температура в точке А составляла 92 °С при температуре теплоносителя  $T_{cp} = 100$  °С. Коэффициент теплопроводности отложений на внутренней поверхности трубопровода  $\lambda_1 = 1,5$  Вт / (мК) определялся из эксперимента. Коэффициент теплоотдачи на наружной поверхности трубы принимался равным  $\alpha = 10$  Вт / (м<sup>2</sup>К).

В результате расчетов, выполненных по изложенной выше методике, была получена

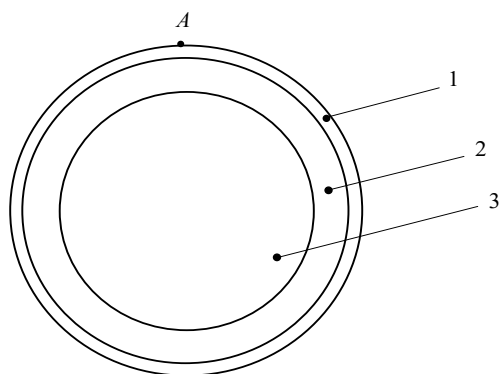


Рис. 2. Сечение трубопровода: 1 – стенка трубы; 2 – отложения на внутренней поверхности; 3 – теплоноситель; А – точка замера температуры

толщина отложений  $\delta_1 = 1,3$  см. Толщина отложений, найденная из эксперимента, оказалась равной  $\delta_1 = 1,1$  см. Из сравнения толщин слоев, найденных теоретическим и экспериментальным методами, следует, что их расхождение составляет 15,3 %. Полученный результат, учитывая неточности в определении температур на внутренней и внешней поверхностях стенки, коэффициента теплопроводности отложений и коэффициента теплоотдачи, следует признать удовлетворительным. В связи с этим изложенный метод может быть рекомендован для оценочной диагностики толщины отложений без вскрытия теплообменников.

Рассмотрим получение решения задачи для двухслойной цилиндрической стенки в следующей математической постановке (рис. 3):

$$\frac{d^2 T_i(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_i(r)}{dr} = 0; \quad (19)$$

$$(i = 1, 2; \quad r_{i-1} \leq r \leq r_i; \quad r_2 = r_0 + \delta_1 + \delta_2);$$

$$T_1(0) = T_{cm1}; \quad (20)$$

$$T_1(r_1) = T_2(r_1); \quad (21)$$

$$\lambda_1 \frac{dT_1(r_1)}{dr} = \lambda_2 \frac{dT_2(r_1)}{dr}; \quad (22)$$

$$T_2(r_2) = T_{cm2}, \quad (23)$$

где  $r$  – координата;  $T_{cm1}$  – температура внутренней поверхности первого слоя (при  $r = r_0$ );  $T_{cm2}$  – температура внешней поверхности второго слоя (при  $r = r_2 = r_0 + \delta_1 + \delta_2$ ;  $\delta_1 = r_1 - r_0$ ;  $\delta_2 = r_2 - r_1$ ;  $\delta = \delta_1 + \delta_2$ ).

В данном случае для простоты изложения рассматривается задача при граничных усло-

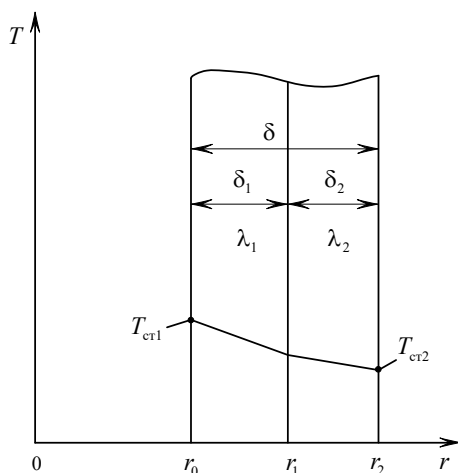


Рис. 3. Схема теплообмена для двухслойного полого цилиндра

виях первого рода на внутренней и внешней поверхностях двухслойного полого цилиндра. Решения уравнений (19) принимаются в виде

$$T_1(r) = C_1 \ln r + C_2; \quad (24)$$

$$T_2(r) = C_3 \ln r + C_4, \quad (25)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – неизвестные коэффициенты.

Очевидно, что соотношения (24), (25) удовлетворяют уравнениям (19). Неизвестные коэффициенты  $C_1, C_2, C_3, C_4$  находятся из граничных условий (20), (23) и условий сопряжения (21), (22). Подставляя (24), (25) в (20) – (23), для определения  $C_1, C_2, C_3, C_4$  получаем следующую систему алгебраических линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} C_1 \ln r_0 + C_2 &= T_{cr1}; \\ C_1 \ln r_1 + C_2 &= C_3 \ln r_1 + C_4; \\ \lambda_1 \frac{d(C_1 \ln r_1 + C_2)}{dr} &= \lambda_2 \frac{d(C_3 \ln r_1 + C_4)}{dr}; \\ C_3 \ln r_2 + C_4 &= T_{cr2}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

После определения неизвестных коэффициентов  $C_1, C_2, C_3, C_4$  из решения системы четырех алгебраических линейных уравнений (26) решение задачи (19) – (23) находится из (24), (25). Дальнейшая последовательность определения толщины отложений аналогична той, которая изложена для плоской стенки.

**Выводы.** 1. Разработан приближенный аналитический метод определения толщины слоя отложений на внутренних поверхностях теплообменников, основанный на решении обратных задач, при использовании полученного в работе точного аналитического решения прямой задачи теплопроводности для двухслойной плоской и цилиндрической стенки, а также экспериментальных данных температуры на внешней поверхности трубопровода.

2. По результатам теоретических исследований толщина отложений в плоской стенке составляет 1,3 см. Согласно экспериментальным исследованиям толщина отложений оказалась равной 1,1 см. Таким образом, расхождение результатов экспериментальных и теоретических исследований составляет 15,3 %.

3. Рассмотренный в статье аналитический метод определения толщины отложений применен как для плоских, так и цилиндрических теплообменников. В последнем случае изменяется вид уравнений (6) (см. уравнение (19)) и формул (14) и (15) для получения их аналитических решений (см. формулы (24) и (25), нахождение которых не вызывает затруднений.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18 – 38 – 00029 мол\_а.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. 297 с.
2. Пилипенко Н.В. Методы и приборы нестационарной теплотометрии на основе решения обратных задач теплопроводности. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2011. 180 с.
3. Мацевитый Ю.М., Костиков А.О. Математические аспекты решения геометрических обратных задач теплопроводности: проблемы и пути их решения // Проблемы машиностроения. 2007. Т. 10, №3. С. 27–34.
4. Грибов А.Ф., Жидков Е.Н., Краснов И.К. О численном решении обратной задачи теплопроводности // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. Вып. 9. С. 20–24.
5. Мацевитый Ю.М. Обратные задачи теплопроводности: в 2 т. Киев: Наукова думка, 2002. 200 с.
6. Зайнуллов А.Р. Обратная задача для двумерного уравнения теплопроводности по отысканию начального распределения // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2015. Т. 19, №4. С. 667–679.
7. Кудинов В.А., Стефанюк Е.В. Аналитический метод решения задач теплопроводности на основе введения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий // Инженерно-физический журнал. 2009. Т. 82, № 3. С. 540–558.
8. Кудинов В.А. Метод координатных функций в нестационарных задачах теплопроводности // Известия Российской академии наук. Энергетика. 2004. № 3. С. 82.
9. Еремин А.В., Стефанюк Е.В., Рассыпнов А.Ю., Кузнецова А.Э. Нестационарный теплообмен в цилиндрическом канале при ламинарном течении жидкости // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2013. № 4(33). С. 122–130.

Об авторах:

**КУРГАНОВА Ольга Юрьевна**

аспирант кафедры теоретических основ  
теплотехники и гидромеханики  
Самарский государственный технический университет  
443100, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244  
E-mail: o.y.kurganova@gmail.com

**KURGANOVA Olga Yu.**

Postgraduate Student of the Theoretical Foundations  
of Heat Engineering and Hydromechanics Chair  
Samara State Technical University  
443100, Russia, Samara, Molodogvardeyskaya str., 244  
E-mail: o.y.kurganova@gmail.com

**КУДИНОВ Игорь Васильевич**

доктор технических наук, профессор, профессор  
кафедры теоретических основ теплотехники  
и гидромеханики  
Самарский государственный технический университет  
443100, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244  
E-mail: igor-kudinov@bk.ru

**KUDINOV Igor V.**

Doctor of Engineering Science, Professor of the  
Theoretical Foundations of Heat Engineering and  
Hydromechanics Chair  
Samara State Technical University  
443100, Russia, Samara, Molodogvardeyskaya str., 244  
E-mail: igor-kudinov@bk.ru

**КЛЕБЛЕЕВ Руслан Мухтарович**

аспирант кафедры теоретических основ  
теплотехники и гидромеханики  
Самарский государственный технический университет  
443100, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244  
E-mail: uio1123@list.ru

**KLEBLEEV Ruslan M.**

Postgraduate Student of the Theoretical Foundations  
of Heat Engineering and Hydromechanics Chair  
Samara State Technical University  
443100, Russia, Samara, Molodogvardeyskaya str., 244  
E-mail: uio1123@list.ru

**СТЕФАНЮК Екатерина Васильевна**

доктор технических наук, профессор, профессор  
кафедры теоретических основ теплотехники  
и гидромеханики  
Самарский государственный технический университет  
443100, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244  
E-mail: stef-kate@yandex.ru

**STEFANYUK Ekaterina V.**

Doctor of Engineering Science, Professor  
of the Theoretical Foundations of Heat Engineering  
and Hydromechanics Chair  
Samara State Technical University  
443100, Russia, Samara, Molodogvardeyskaya str., 244  
E-mail: stef-kate@yandex.ru

**ГАВРИЛОВА Татьяна Евгеньевна**

аспирант кафедры теоретических основ  
теплотехники и гидромеханики  
Самарский государственный технический университет  
443100, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244  
E-mail: pumat@list.ru

**GAVRILOVA Tatiana E.**

Postgraduate Student of the Theoretical Foundations  
of Heat Engineering and Hydromechanics Chair  
Samara State Technical University  
443100, Russia, Samara, Molodogvardeyskaya str., 244  
E-mail: pumat@list.ru

Для цитирования: Курганова О.Ю., Кудинов И.В., Клеблеев Р.М., Стефанюк Е.В., Гаврилова Т.Е. Аналитический метод определения толщины отложений на внутренних поверхностях теплообменников // Градостроительство и архитектура. 2019. Т.9, №1. С. 20–24. DOI: 10.17673/Vestnik.2019.01.4.

For citation: Kurganova O.Yu., Kudinov I.A., Klebleev R.M., Stefanyuk E.V., Gavrilova T.E. Analytical method for determining the thickness of deposits on the internal surfaces of heat exchangers // Urban Construction and Architecture. 2019. V. 9, 1. Pp. 20–24. DOI: 10.17673/Vestnik.2019.01.4.