

Е. А. КРЕСТИН

К ВОПРОСУ О ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КОНИЧЕСКОМ ЩЕЛЕВОМ КАНАЛЕ

ON THE PROBLEM OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID FLOW IN A FLAT CONICAL SLOTTED CHANNEL

Анализируется прецизионная пара, работающая в условиях несоосности, т.е. при перекосе подвижных элементов бесконтактных уплотнений. Исследовано течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском коническом щелевом зазоре. Так как краевая задача не имеет точного решения, то в работе найдено приближенное аналитическое решение, не зависящее от граничных условий. Уравнения движения жидкости решены в форме Навье-Стокса методом малых возмущений. Определены гидродинамические параметры вязкой жидкости при ее движении через конический щелевой зазор. Построен профиль скорости движения жидкости в виде суммы напорного течения с постоянным перепадом давления и течения, обусловленного осцилляцией стенки канала. Приведены графические иллюстрации при высоко- и низкочастотных пределах колебаний.

Ключевые слова: системы гидропривода, зазор бесконтактного уплотнения, бесконтактное уплотнение, плунжерная пара, утечки через зазор

Как известно, плунжеру в обойме обычно ничто не препятствует перемещаться в радиальном направлении. При этом прецизионная пара может работать в условиях несоосности, т.е. при перекосе подвижных элементов. Поэтому с точки зрения эксплуатации и проектирования подвижных соединений систем гидроприводов актуальной задачей является определение гидродинамических параметров рабочей среды в щелевых зазорах. Найдем общее решение течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском коническом щелевом канале [1–7].

Из уравнения неразрывности движения вязкой жидкости имеем

$$\bar{v}_r = \frac{1}{\bar{r}} \bar{u}(\bar{\varphi}, \bar{t}). \quad (1)$$

Для радиальной скорости движения жидкости в зазоре и изменения давления получим следующие уравнения:

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\bar{r}^3 \partial \bar{\varphi}^2}, \quad (2)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\varphi}} + \frac{2 \partial \bar{u}}{\bar{r}^3 \partial \bar{\varphi}} = 0. \quad (3)$$

A precision pair operating under misalignment conditions, i.e. at a distortion of mobile elements of contactless consolidations is analyzed. The flow of a viscous incompressible fluid in a flat conical slit gap is investigated. Since the boundary-value problem does not have an exact solution, an approximate analytical solution was found in the work that does not depend on boundary conditions. The equations of motion of a fluid are solved in the Navier-Stokes form by the method of small perturbations. The hydrodynamic parameters of a viscous fluid as it moves through a conical slit gap are determined. The profile of the velocity of the fluid in the form of the sum of a pressure flow with a constant pressure drop and flow due to the oscillation of the channel wall is constructed. Graphic illustrations are given with high and low frequency limits of oscillations.

Keywords: hydraulic drive systems, non-contact seal clearance, non-contact seal, plunger pair, gap leakage

Заметим, что функции $(\bar{r})^{-1}$ и $(\bar{r})^{-3}$ в формулах (2) и (3) являются медленно меняющимися (почти постоянными) функциями радиуса \bar{r} в интервале $\bar{r} \in [\bar{R}_2, \bar{R}_1]$.

Путем рассуждений легко показать, что $(\bar{r})^{-1}$ и $(\bar{r})^{-3}$ на интервале $\bar{r} \in [\bar{R}_2, \bar{R}_1]$ относительно слабо уклоняются соответственно от R_*^{-1} и R_*^{-3} . Поэтому вместо функций (2) и (3) приближенно запишем:

$$\frac{1}{\bar{R}_*} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\bar{R}_*^3 \partial \bar{\varphi}^2}, \quad (4)$$

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\varphi}} + \frac{2 \partial \bar{u}}{\bar{R}_*^3 \partial \bar{\varphi}} = 0. \quad (5)$$

Из выражений (4) и (5) видно, что продольный градиент давления пропорционален R_*^{-1} , а поперечный пропорционален R_*^{-2} . Поскольку $\bar{R}_* = h/\alpha \rightarrow \infty$, при $\alpha \rightarrow 0$ можно отбросить уравнение (5), взяв в расчет лишь единственное следствие из него: $p = p(r)$, т.е. что давление зависит только от радиуса r и не зависит от угла φ . Иными словами, поперек зазора давление не меняется, оставаясь постоянным. Если же на концах канала перепад давления является заданной периодической функцией времени, то можно предположить, что

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = f(t), \quad (6) \quad \bar{u}_k(0) = 0, \quad (23)$$

где $f(t)$ – заданная периодическая функция времени.

$$\text{Тогда } p = p_0 - \rho f(t). \quad (7)$$

Неоднородное уравнение (4) будем решать относительно $\bar{u}(\bar{\varphi}, \bar{t})$:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} - \frac{\nu}{R_*^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{\varphi}^2} = P(\bar{t}), \quad (8)$$

где

$$P(\bar{t}) = R_* f(\bar{t}) = -\frac{R_*}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (9)$$

или в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{R_*^2 \partial \bar{\varphi}^2} = -R_* \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}}, \quad (10)$$

$$\bar{P}(\bar{t}) = \frac{\bar{R}_* \partial \bar{p}}{\partial \bar{r}}. \quad (11)$$

Граничные условия для скорости $\bar{u}(\bar{\varphi}, \bar{t})$ имеют следующий вид:

$$\bar{\varphi} = 0, \bar{u}(\bar{\varphi}, \bar{t}) = 0; \quad (12)$$

$$\bar{\varphi} = 1, \bar{u}(\bar{\varphi}, \bar{t}) = \bar{R}_* \bar{V}(\bar{t})_c = \bar{V}(\bar{t}). \quad (13)$$

Таким образом, необходимо решить уравнение (10) с граничными условиями (12) и (13).

Решение будем искать в виде

$$\bar{U}(\bar{\varphi}, \bar{t}) = \sum_k \bar{v}_k(\bar{\varphi}) e^{-ik\tau}, \quad (14)$$

где $\tau = \bar{\omega} \bar{t}$ – безразмерное время.

В силу вещественности $\bar{u}(\bar{\varphi}, \bar{t})$: $\bar{u}_k = \bar{u}_{-k}$.

Тогда разложим в ряд Фурье функции $\bar{P}(\bar{t})$ и $\bar{V}(\bar{t})$:

$$\bar{P}(\bar{t}) = \sum_k \bar{f}_k e^{-i\tau_k}, \bar{f}_k = \bar{f}_{-k}, \quad (15)$$

$$\bar{V}(\bar{t}) = \sum_l \bar{v}_l e^{-i\tau_l}, \bar{v}_l, \bar{v}_l = \bar{v}_{-l}. \quad (16)$$

Подставив (14)–(16) в краевую задачу (10), (12) и (13), в результате найдем

$$\sum_k \left(-ik \bar{v}_k \bar{\omega} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{R_*^2 \partial \bar{\varphi}^2} \right) e^{-ik\tau} = \sum_k \bar{f}_k e^{-ik\tau}, \quad (17)$$

$$\bar{u}_k(0) = 0, \quad (18)$$

$$\sum_k \bar{v}_k(1) e^{-ik\tau} = \sum_l \bar{v}_l e^{-i\tau_l}. \quad (19)$$

Далее необходимо определить частоту колебаний ω . Пусть две различные заданные частоты ω_1 и ω_2 относятся друг к другу как некоторые рациональные числа $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n}{m}$ или $m\omega_1 = n\omega_2$.

Уравнениям (17) – (19) можно удовлетворить, если положить

$$\omega = m\omega_1 = n\omega_2. \quad (20)$$

Тогда

$$\omega_1 = \frac{\omega}{m}, \omega_2 = \frac{\omega}{n}. \quad (21)$$

В этом случае уравнения (17) – (19) примут вид:

$$\sum_k \left(-ik \bar{v}_k(\bar{\varphi}) \bar{\omega} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{R_*^2 \partial \bar{\alpha}^2} \right) e^{-ik\tau} = \sum_k \bar{f}_k e^{-i\frac{k}{n}\tau}, \quad (22)$$

$$\sum_k \bar{v}_k(1) e^{-ik\tau} = \sum_l \bar{v}_l e^{-i\frac{l}{m}\tau}. \quad (24)$$

Поскольку $\bar{P}(\bar{t})$ и $\bar{V}(\bar{t})$ – периодические функции времени \bar{t} , то суммирование по k' в (22) должно происходить по номерам, кратным n , а суммирование по l в (24) – по номерам, кратным m :

$$\kappa = \kappa' \cdot n, l = \kappa \cdot m. \quad (25)$$

Тогда из (22) и (24) найдем

$$-\sum_k ik \bar{u}_k \bar{\omega} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_k}{R_*^2 \partial \bar{\varphi}^2} = \bar{f}_{kn}, \quad (26)$$

$$\bar{u}_k(0) = 0, \bar{u}_k(1) = \bar{v}_{km}. \quad (27)$$

Теперь от угла φ необходимо перейти к поперечной координате $S = R_* \varphi$. Учитывая, что $\alpha R_* = h$, то уравнения (26), (27) принимают вид:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_k}{dS^2} + ik \bar{u}_k \bar{\omega} = -\bar{f}_{kn}, \quad (28)$$

$$\bar{u}_k(0) = 0, \bar{u}_k(1) = \bar{v}_{km}. \quad (29)$$

Решение краевой задачи (28), (29) следует построить в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного:

при $\kappa \neq 0$

$$\bar{u}(\bar{s})_\kappa = \frac{i\bar{f}_{kn}}{k\bar{\omega}} (1 - \cos \bar{s} \sqrt{ik\bar{\omega}}) + \left[\bar{v}_{km} + \frac{\bar{f}_{km}}{ik\bar{\omega}} (1 - \cos \sqrt{ik\bar{\omega}}) \right] \frac{\sin \bar{s} \sqrt{ik\bar{\omega}}}{\sin \sqrt{ik\bar{\omega}}}, \quad (30)$$

при $\kappa = 0$

$$\bar{u}_0(\bar{s}) = \left(\bar{v}_0 + \frac{\bar{f}_0}{2} \right) \bar{s} - \frac{\bar{f}_0 \bar{s}^2}{2}. \quad (31)$$

Так как осциллирующая в своей плоскости наклонная верхняя стенка не имеет средней постоянной составляющей скорости, то следует считать, что $v_0 = 0$. В этом случае решение при $\kappa = 0$ упрощается до выражения

$$\bar{u}_0(\bar{s}) = \frac{\bar{f}_0}{2} (\bar{s} - \bar{s}^2). \quad (32)$$

Окончательно получим следующее приближенное решение гидродинамической задачи:

$$\bar{v}_r = \frac{\bar{f}_0}{\bar{r}^2} (\bar{\varphi} - \bar{\varphi}^2) + \frac{1}{\bar{r}} \sum_{\kappa \neq 0} \bar{u}_\kappa(\bar{\varphi}) e^{-ik\tau}, \quad (33)$$

$$\bar{u}_\kappa = \frac{i\bar{f}_{km}}{k\bar{\omega}} (1 - \cos \bar{\varphi} \sqrt{ik\bar{\omega}}) + \left[\bar{v}_{km} - \frac{i\bar{f}_{kn}}{k\bar{\omega}} (1 - \cos \sqrt{ik\bar{\omega}}) \right] \frac{\sin \bar{\varphi} \sqrt{ik\bar{\omega}}}{\sin \sqrt{ik\bar{\omega}}}, \quad (34)$$

$$\bar{v}_\varphi = 0. \quad (35)$$

При этом изменение давления в зазоре подчиняется следующему периодическому закону:

$$\bar{p} = \bar{p}_0 + \bar{r}\bar{\alpha} \sum_K \bar{f}_{kn} e^{-ik\tau}. \quad (36)$$

Следует отметить, что первое слагаемое в уравнении (33) описывает стационарное напорное течение в канале с углом конусности α .

На рис. 1 и 2 приведены графики распределения местных скоростей рабочей жидкости в щелевых зазорах при гармонических осцилляциях стенки и пульсациях давления при различной безразмерной частоте $\bar{\omega} = 24100$ в случае $\bar{\alpha} = 0$. Эти графики построены на основании формул (33) – (35).

Как видно из рис. 1 и 2, увеличение безразмерной частоты колебаний приводит к значительному отличию характера течения от квазистационарного. Так как в различных фазах колебаний действие сил давления и трения на различных расстояниях от стенки проявляется в разной степени, то и направленные действия сил давления и трения также изменяются по высоте канала. Как следствие всего этого, и рас-

пределение скоростей по высоте канала носит достаточно сложный характер. Для нахождения причин, влияющих на распределение скоростей в каждый момент времени на динамику рабочей среды, должен проводиться анализ и сравнение всех факторов, влияющих на движение жидкости в щелевом канале при различной частоте колебания [8–14].

Выводы. Рассмотрено течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском коническом щелевом зазоре. Для определения гидродинамических параметров при движении рабочей жидкости через конический щелевой зазор уравнения гидродинамики решены в форме Навье-Стокса методом малых возмущений. Общее решение получено в виде суммы

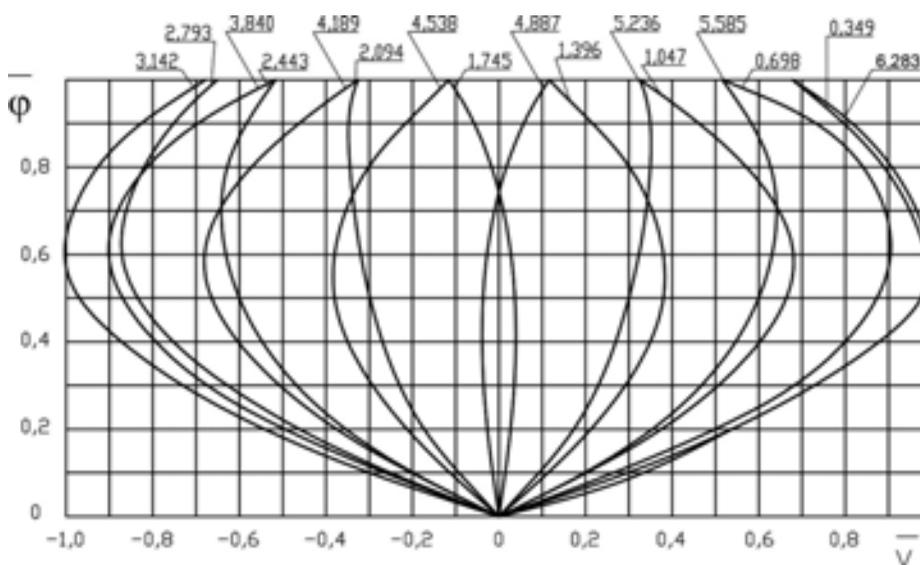


Рис. 1. Распределение местных скоростей в зазоре от совместного колебания стенки и давления при безразмерной частоте $\bar{\omega} = 2$

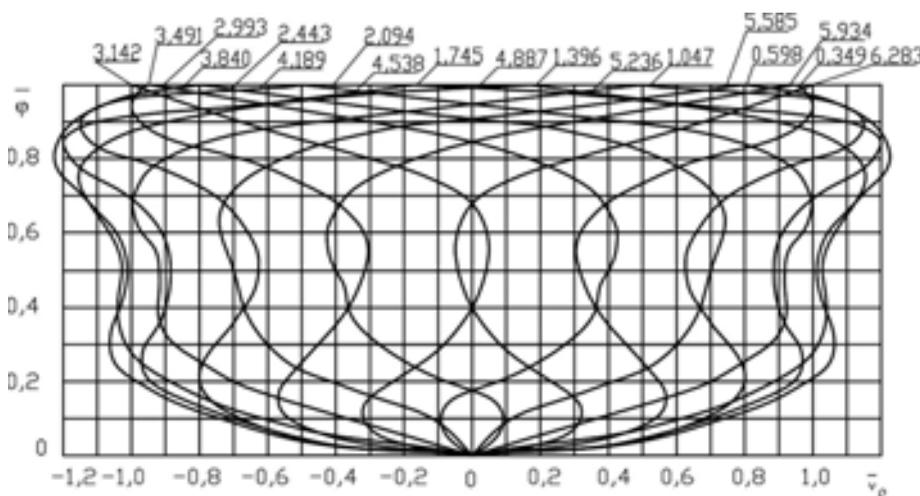


Рис. 2. Распределение местных скоростей в зазоре от совместного колебания стенки и давления при безразмерной частоте $\bar{\omega} = 100$

частных решений, причем первое слагаемое описывает стационарное напорное течение в конусном канале, а второе слагаемое вносит аддитивный вклад от пульсаций давления и осцилляций стенки.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Крестин Е.А. Определение утечек жидкости через зазор бесконтактного уплотнения поршня гидравлического вибратора // Научное обозрение. 2014. №5. С. 108–110.
2. Крестин Е.А. Релаксационное течение в щелевом зазоре при ступенчатом изменении давления // Научное обозрение. 2015 №3. С. 116–121.
3. Крестин Е.А. Исследование гидродинамических параметров в зазоре при импульсном изменении давления // Научное обозрение. 2015. №4. С. 134–140.
4. Крестин Е.А. Нестационарные гидродинамические процессы в щелевых зазорах бесконтактных уплотнений при ступенчатом изменении давления // Градостроительство и архитектура: 2015. №1. С. 100–106.
5. Лозовецкий В.В. Гидро- и пневмосистемы транспортно-технологических машин. СПб., 2012. 555 с.
6. Крестин Е.А. Расчет бесконтактного уплотнения при ступенчатом изменении давления // Тезисы докл. X международной научно-практической конференции «Научные перспективы XXI века. Достижения и перспективы нового столетия». Новосибирск, 2015. С. 84–87.
7. Крестин Е.А. Расчет пульсирующих течений в щелевых зазорах переменной высоты // Научное обозрение. 2015 №14. С. 122–126.
8. Вибрации в технике: справочник. Т. 4. Вибрационные процессы и машины / под ред. Э.Э. Левендела. М.: Машиностроение, 1981. 509 с.
9. Гидравлика и гидропневмопривод. Ч 2: Гидравлические машины и гидропневмопривод / под ред. А.А. Шейпака. 4-е изд., доп. и перераб. М.: МГИУ, 2009. 352 с.
10. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гос. издат. техн.-теорет. лит., 1955. 520 с.
11. Крестин Е.А. Определение гидродинамических характеристик вязкой жидкости в канале переменной высоты // XII международная научно-практическая конференция // Научные перспективы XXI века. Достижения и перспективы нового столетия. Новосибирск, 2015. №5. С. 69–74.
12. Численное исследование устойчивости течения Тейлора между двумя цилиндрами в двумерном случае // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. № 4. С. 754–768.
13. Гойдо М. Е. Проектирование объемных гидроприводов: справочное пособие. М.: Машиностроение, 2009. 304 с.
14. Жирных Б. Уплотнительные устройства в машиностроении. М.: Издательство МГТУ им. Баумана, 2017. 24 с.

Об авторе:

КРЕСТИН Евгений Александрович

кандидат технических наук, профессор кафедры общей и прикладной физики и химии
Самарский государственный технический университет
Академия строительства и архитектуры
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 194
E-mail: krestin@bk.ru

KRESTIN Evgeny A.

PhD in Engineering Science, Professor of the General and Applied Physics and Chemistry Chair
Samara State Technical University
Academy of Architecture and Civil Engineering
443001, Russia, Samara, Molodogvardeyskaya str., 194
E-mail: krestin@bk.ru

Для цитирования: Крестин Е.А. К вопросу о течении вязкой несжимаемой жидкости в плоском коническом щелевом канале // Градостроительство и архитектура. 2018. Т.8, №3. С. 51-54. DOI: 10.17673/Vestnik.2018.03.11.

For citation: Krestin E.A. On the Problem of Viscous Incompressible Fluid Flow in a Flat Conical Slotted Channel // Urban Construction and Architecture. 2018. V.8, №3. Pp. 51-54. DOI: 10.17673/Vestnik.2018.03.11.