

**М. Н. НИКИТИН**  
**Т. С. СОЛОВЬЕВА**  
**О. В. ШЛЯХТИНА**

## РЕШЕНИЯ В ЯВНОЙ ФОРМЕ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОМУ ПОТОКУ

SOLUTIONS IN EXPLICIT FORM FOR DETERMINING THE HYDRAULIC RESISTANCE COEFFICIENT FOR TURBULENT FLOW

Проведен сравнительный анализ явных решений уравнения Колбрука–Уайта. Получены значения медиан относительных отклонений, коэффициентов детерминации и временных вычислительных сложностей для каждой аппроксимации. В качестве «истинного» решения использовались результаты итерационного решения уравнения Колбрука–Уайта методом подстановки. Аппроксимации Б. Эка и А. Ватанкаха были выделены как наиболее эффективные с точки зрения вычислительной сложности. Показано, что широко используемые аппроксимации П. Блазиуса, А.Д. Альтшуля и И. Никурадзе при своей простоте обеспечивают приемлемую точность только для ограниченных значений критерия Рейнольдса и относительной шероховатости.

A comparative analysis of explicit solutions of the Colebrook-White equation is carried out. The median values of relative deviations, coefficients of determination and computational complexities for each approximation were obtained. The results of the iterative solution of the Colebrook-White equation by successive substitution method were used as the intrinsic solution. Approximations by B. Eck and A.R. Vatankhah were identified as the most effective in terms of computational complexity. It was shown that widely used approximations by P.R.H. Blasius, A.D. Altshul and J. Nikuradze although simple, provide acceptable accuracy only within restricted ranges of Reynolds and relative roughness.

**Ключевые слова:** гидравлическое сопротивление, турбулентное течение, аппроксимация, явное решение, вентиляция, относительная шероховатость

**Keywords:** friction losses, turbulent flow, approximation, explicit solution, ventilation, dimensionless roughness

### Введение

Гидравлическое сопротивление канала движущемуся в нем потоку рабочей среды является ключевым фактором при расчете инженерных систем, в частности систем вентиляции. Для движущейся в канале среды выделяют три режима течения: ламинарный, переходный (критический) и турбулентный. На режим течения влияют не только параметры потока, но и шероховатость стенок канала. Поэтому для разграничения режимов используют коэффициент шероховатости Рейнольдса [1]:

$$Re_* = \frac{\bar{\Delta}}{\sqrt{8}} (Re\sqrt{\lambda}), \quad (1)$$

где  $\bar{\Delta} = \Delta/D_h$  – относительная шероховатость стенок канала;  $\Delta$  – абсолютная шероховатость стенок канала, м;  $D_h$  – гидравлический диаметр канала, м;  $Re = U \cdot D_h / \nu$  – критерий Рейнольдса для потока;  $U$  – скорость потока, м/с;  $\nu$  – кинематическая вязкость потока, м<sup>2</sup>/с;  $\lambda$  – коэффициент сопротивления потоку.

В ламинарном режиме ( $Re < 2000$ ) поток можно условно разделить на слои (ламиналии), в которых выполняется условие  $\partial \bar{u} / \partial y = 0$ .

Поскольку толщина ламиналии превышает величину абсолютной шероховатости стенки при коэффициенте шероховатости Рейнольдса  $Re_* < 3$  [2], коэффициент гидравлического сопротивления для большинства каналов зависит только от параметров потока [3]:

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \quad (2)$$

В переходном (критическом) режиме течения происходит резкий скачок гидравлического сопротивления. Данный режим соответствует диапазону значений числа Рейнольдса  $2000 < Re < 3000$  и описывается полуэмпирическими выражениями Л.А. Самойленко [4, 5].

Для турбулентного режима течения ( $Re > 3000$ ) выделяют три степени влияния шероховатости стенок канала на сопротивление потоку. При канал считают гидравлически гладким и коэффициент сопротивления может быть определен итерационным методом по уравнению Прандтля-фон Кармана [6, 7]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \left( \frac{Re\sqrt{\lambda}}{2.51} \right) \approx 1.93 \log (Re\sqrt{\lambda}) - 0.537. \quad (3)$$

При  $3 < Re_* < 70$  на сопротивление потоку влияют не только его параметры (скорость и вязкость), но и параметры канала (диаметр и шероховатость его стенок). В этом случае коэффициент сопротивления может быть определен итерационным методом по уравнению Колбрука–Уайта (И.Е. Идельчик [9] свидетельствует о схожем выражении, полученном Г.А. Мурином [8]) [9]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left( \frac{\bar{\Delta}}{3.715} + \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} \right). \quad (4)$$

В развитом турбулентном режиме ( $Re_* > 70$ ) толщина пристеночного слоя минимальна и не зависит от  $Re$  [2]. Поэтому сопротивление потоку определяется только величиной шероховатости по квадратичному закону [2, 10]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \left( \frac{3.715}{\bar{\Delta}} \right). \quad (5)$$

Точные значения коэффициентов сопротивления турбулентному потоку при  $Re_* < 70$  могут быть получены только путем итерационного решения уравнений (3) или (4), поскольку они представлены в неявной форме. Это ограничивает их применимость для инженерных расчетов. Поэтому на практике используются аппроксимации, которые с определенной степенью точности позволяют определять коэффициенты сопротивления потоку в явной форме.

### Существующие аппроксимации

Для гидравлически гладких каналов ( $Re_* < 3$ ) обычно используются выражения Пауля Блази-

Аппроксимации уравнения Колбрука–Уайта

Авторы	Аппроксимация	Уравнение	Ограничения	m(E) %	R <sup>2</sup>	T(n)
П. Блазиус (1913) [11]	$\lambda = \frac{0.3164}{Re^{0.25}}$	(6)	$2300 < Re < 10^5$ ; $\bar{\Delta} = 0$	26.05	0.24	2
И. Никурадзе (1933) [12]	$\lambda = 0.0032 + \frac{0.221}{Re^{0.237}}$	(7)	$10^5 < Re < 10^6$ ; $\bar{\Delta} = 0$	20.70	0.238	3
Л. Прандтль (1936) [13]	$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \lg \left( \frac{\varepsilon}{3.71D} \right)$	(8)	$Re > 560/\bar{\Delta}$	16.21	0.745	4
Л.Ф. Муди (1947) [14]	$\lambda = 0.0055 \left( 1 + \sqrt[3]{20000\bar{\Delta} + \frac{10^6}{Re}} \right)$	(9)	$4000 < Re < 10^8$ ; $\bar{\Delta} < 0,01$	0.56	0.982	6
Филоненко–Альтшуль (1948) [15, 16]	$\lambda = \frac{1}{(1.8 \lg Re - 1.64)^2}$	(10)	$Re > 4000$ ; $\bar{\Delta} = 0$	9.36	0.246	5
А.Д. Альтшуль (1952) [15]	$f = 0.11 \left( \frac{68}{Re} + \varepsilon/D \right)^{0.25}$	(11)	$4000 < Re < 10^7$ ; $\bar{\Delta} < 0,01$	8.03	0.9355	4
Б. Эк (1973) [17]	$\frac{1}{\sqrt{f}} \cong -2 \lg \left( \frac{\varepsilon}{3.715D} + \frac{15}{Re} \right)$	(12)	– [18]	-0.02	0.993	6
С. Черчилль (1973) [19]	$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \lg \left( \frac{\varepsilon/D}{3.7} + \left( \frac{7}{Re} \right)^{0.9} \right)$	(13)	–	-0.54	0.999	7
Н. Чен (1979) [20]	$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \lg \left[ \frac{\varepsilon/D}{3.7065} - \frac{5.0452}{Re} \cdot \log \left( \frac{1}{2.8257} \left( \frac{\varepsilon}{D} \right)^{1.1098} + \frac{5.8506}{Re^{0.8981}} \right) \right]$	(14)	$4000 < Re < 10^8$ ; $5 \cdot 10^{-7} < \bar{\Delta} < 0,05$	-0.08	0.99997	13
Д. Зигранг и Н. Сильвестр (1982) [21]	$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \lg \left[ \frac{\varepsilon/D}{3.7} - \frac{5.02}{Re} \log \left( \frac{\varepsilon/D}{3.7} - \frac{5.02}{Re} \log \left( \frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{13}{Re} \right) \right) \right]$	(15)	$4000 < Re < 10^8$ ; $10^{-5} < \bar{\Delta} < 0,05$	-0.09	1	16
Т. Сергхайдс (1984) [22]	$\frac{1}{\sqrt{f}} = A - \frac{(B-A)^2}{C-2B+A}$ , $A = -2 \lg \left( \frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{12}{Re} \right)$ , $B = -2 \lg \left( \frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51A}{Re} \right)$ , $C = -2 \lg \left( \frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51B}{Re} \right)$	(16)	$2300 < Re < 1,5 \cdot 10^8$ ; $\bar{\Delta} < 0,05$	-0.05	1	28

Окончание таблицы

Авторы	Аппроксимация	Уравнение	Ограничения	m(E) %	R <sup>2</sup>	T(n)
Е. Ромео (2002) [23]	$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left\{ \frac{\varepsilon/D}{3.7065} - \frac{5.0272}{Re} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{3.827} - \frac{4.657}{Re} \log \left( \left( \frac{\varepsilon/D}{7.7918} \right)^{0.9924} + \left( \frac{5.3326}{208.815 + Re} \right)^{0.9345} \right) \right] \right\}$	(17)	3000 < Re < 10 <sup>8</sup> ; $\bar{\Delta} < 0,05$	-0.05	1	19
Д. Буззелли (2008) [24]	$\frac{1}{\sqrt{f}} = A - \frac{A+2 \log \left( \frac{B}{Re} \right)}{1 + \frac{2.18}{B}}$ <p>where  <math>A = \frac{0.7441 \ln(Re) - 1.41}{1 + 1.32 \sqrt{\varepsilon/D}}</math>  <math>B = \frac{\varepsilon/D}{3.7} Re + 2.51A</math></p>	(18)	2300 < Re < 10 <sup>8</sup> ; $\bar{\Delta} < 0,05$	-0.08	1	22
Дж. Соннед (2006) [25]	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.8686 \ln \left( \frac{0.4587 Re}{S \left( \frac{S}{S+1} \right)} \right)$ <p>where  <math>S = 0.124(\varepsilon/D) Re + \ln(0.4587 Re)</math></p>	(19)	4000 < Re < 10 <sup>8</sup> ; $10^{-6} < \bar{\Delta} < 0,05$	-0.32	0.9999	14
А. Ватанках (2009) [26]	$f = \left( \ln \left( d / (S - 0.28) \frac{S}{S+0.98} \right) \right)^{-2}$ <p>where  <math>a = 0.8686</math>, <math>d = 0.4587 Re</math>, and  <math>S = 0.1240(\varepsilon/D) Re + \ln(0.4587 Re)</math></p>	(20)	10 <sup>4</sup> < Re < 10 <sup>8</sup> ; $10^{-6} < \bar{\Delta} < 0,01$	-0.04	1	15
Д. Бркич (2011) [27]	$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( 10^{-0.4343\beta} + \frac{\varepsilon}{3.7D} \right)$ <p>where  <math>\beta = \ln(1 + 0.4587 Re) \left( 1 - \frac{\ln(1 + \ln(1 + 0.4587 Re))}{2 + \ln(1 + 0.4587 Re)} \right)</math></p>	(21)	4000 < Re < 10 <sup>8</sup> ; $\bar{\Delta} < 0,05$	-0.06	0.999	22
Ш. Фанг (2011) [28]	$f = 1.613 \cdot \left[ \ln(0.234(\varepsilon/D)^{1.1007}) - \frac{60.525}{Re^{1.1105}} + \frac{56.291}{Re^{1.0712}} \right]^{-2}$	(22)	3000 < Re < 10 <sup>8</sup> ; $\bar{\Delta} < 0,05$	-0.15	0.9999	11
Б. Ашур (2012) [29]	$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{10.04}{\bar{R}} \right)$ <p>where  <math>\bar{R} = 2Re \left[ -\log_{10} \left( \frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{5.5}{Re^{0.9}} \right) \right]^{-1}</math></p>	(23)	2300 < Re < 10 <sup>8</sup> ; $\bar{\Delta} < 0,05$	-0.08	0.9999	13
Д. Бркич (2016) [30]	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log_{10} \left( \frac{2.51 \left( 1.14 - 2 \cdot \log_{10} \left( \frac{\varepsilon}{D} \right) \right)^{0.75}}{Re} + \frac{\varepsilon}{3.71 \cdot D} \right)$	(24)	10 <sup>4</sup> < Re < 10 <sup>8</sup> ; $10^{-6} < \bar{\Delta} < 0,05$	1.11	0.995	11

уса (6), Ивана Ильича Никурадзе (7) и Филоненко–Альтшуля (10). Причем данные выражения практикуются для всех инженерных расчетов вне зависимости от режима течения [9], поэтому они будут рассмотрены наравне с выражениями для вполне шероховатых каналов.

Первая аппроксимация (9) для уравнения Колбрука–Уайта (4) была предложена американским инженером Льюисом Муди в 1947 г. Впоследствии принимались попытки уточнить эту аппроксимацию и расширить диапазон ее применимости (хронологию см. в таблице). Наиболее широким диапазоном параметров потока ( $Re$ ) и поверхности ( $\bar{\Delta}$ ) характеризуются аппроксимации Б. Эка (12), С. Черчилля (13), Т. Сергхайдса (16), Е. Ромео (17), Д. Бузелли (18), Д. Бркича (21), Б. Ашура (23).

### Методика анализа

Приведенные выше аппроксимации оценивались по точности и сложности. Точность определялась для полного диапазона значений критерия Рейнольдса ( $2000 < Re < 10^8$ ) и относительной шероховатости ( $0 < \bar{\Delta} < 0,05$ ) вне зависимости от рекомендованных значений (ограничений). Точность аппроксимаций определялась по медиане относительных ошибок ( $m(E) = m\left(\frac{\lambda_{ист} - \lambda_{аппрокс}}{\lambda_{ист}}\right)$ ) и коэффициенту детерминации ( $R^2$ ).

В качестве «истинных» значений ( $\lambda_{ист}$ ) принимались результаты итерационного решения уравнения (3) методом подстановки [29]. Из множества, ограниченного рассмотренным диапазоном  $Re$  и  $\bar{\Delta}$ , была сделана выборка 42 точек, которые и использовались в анализе. Количество точек в выборке ( $n = 42$ ) было определено методом экстраполяции Ричардсона [31], который показал асимптотическое приближение использованных критериев (медианы относительных ошибок и коэффициента детерминации) к своим «истинным» значениям при  $n \geq 42$ .

Сложность каждой аппроксимации оценивалась по критерию временной вычислительной сложности  $T(n)$ , которая для простейших арифметических операций имеет постоянную асимптотику ( $T(n) = O(1)$ ) и равняется их сумме [32], а для операций возведения в степень — логарифмическую ( $T(n) = O(\log(n))$ ) [32]. Исключение составили выражения (16), (18), (19) и (20), где использование комплексов сокращает вычислительную нагрузку.

### Результаты

В рассмотренном диапазоне значений критерия Рейнольдса ( $2000 < Re < 10^8$ ) и относительной шероховатости ( $0 < \bar{\Delta} < 0,05$ ) аппрок-

симации (6)–(8) и (10), показали неудовлетворительные результаты ( $R^2 < 0,8$ ). Наиболее точными ( $R^2 > 0,999$ ) оказались аппроксимации (14), (15)–(23).

Анализ рассмотренных аппроксимаций показал, что повышение точности решения неизбежно сопровождается увеличением вычислительной нагрузки. При этом наиболее эффективные решения достаточно точно описываются степенными законами для медиан ошибок (штриховая линия на рисунке «а»:

$$m(E) = \frac{0,8}{T(n)^3} + 0,0003; \quad (25)$$

и для коэффициентов детерминации (штриховая линия на рисунке «б»:

$$R^2 = 0,3T(n)^{0,65}. \quad (26)$$

В соответствии с (26) можно выделить аппроксимации, обеспечивающие недостаточную точность при соответствующих вычислительных нагрузках (крестики на рисунке). К ним относятся аппроксимации с достаточно узкими заявленными диапазонами  $Re$  и  $\bar{\Delta}$  (выражения (6), (7) и (10), которые не предназначены для описания рассматриваемых условий.

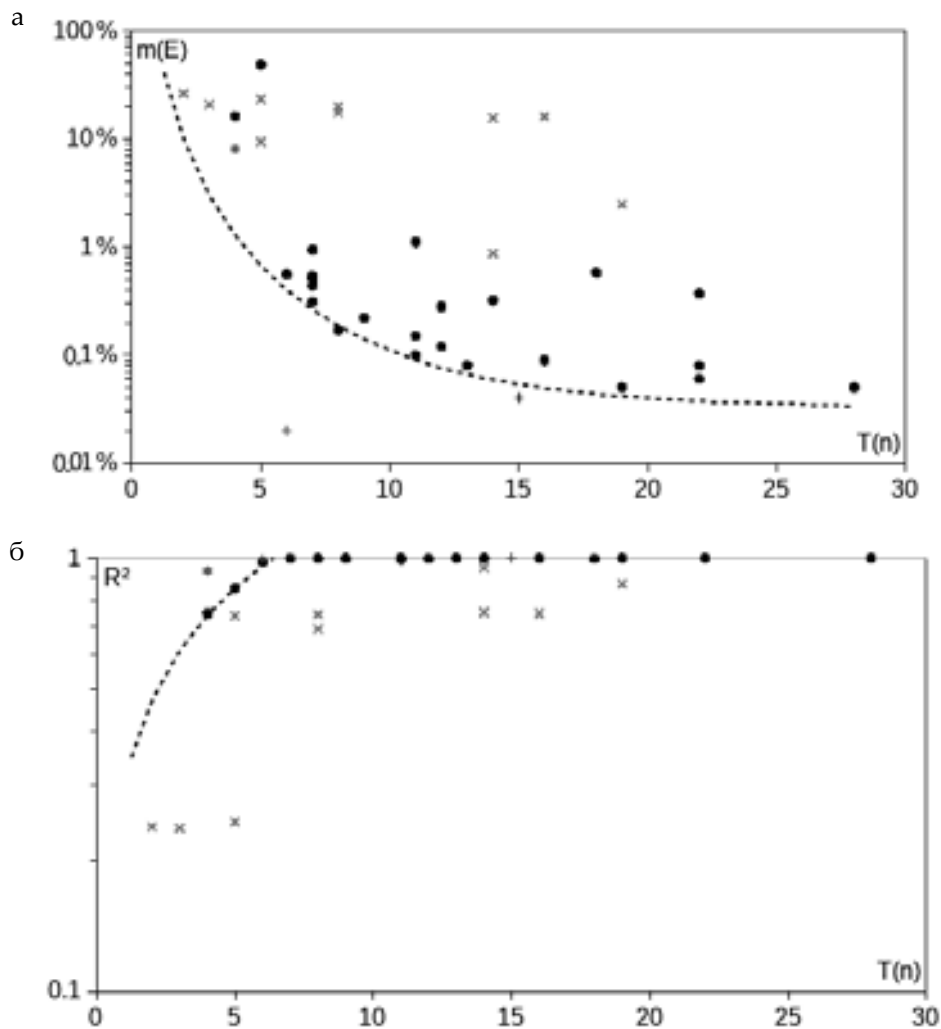
Очевидно, что аппроксимации Б. Эка (12) и А. Ватанкаха (20) (плюсы на рисунке) преодолевают общий ограничивающий тренд и обеспечивают исключительно малые медианы относительных отклонений  $m(E)$  в своих категориях вычислительной сложности ( $T(n) = 6$  и  $T(n) = 15$ ). Эти же выражения характеризуются коэффициентами детерминации, превышающими ожидаемые значения для своих категорий вычислительной сложности.

Отдельно следует отметить аппроксимацию А.Д. Альтшуля (11) (звездочки на рисунке), которая при вычислительной сложности  $T(n) = 4$  обеспечивает приемлемую точность ( $R^2 = 0,985$ ) в достаточно широком заявленном диапазоне ( $4000 < Re < 10^7$ ;  $\bar{\Delta} < 0,01$ ). Вместе с тем, даже в заявленном диапазоне относительная ошибка при использовании выражения А.Д. Альтшуля может достигать 30 % ( $Re = 10^7$ ;  $\bar{\Delta} = 0$ ).

Остальные (жирные круглые) точки на рисунке соответствуют результатам расчета по аппроксимациям, удовлетворяющим требованиям точности при средней вычислительной сложности.

### Заключение

Гидравлические потери по длине канала, несмотря на небольшую удельную величину, оказывают существенное влияние на работу систем трубопроводов, в частности вентиляционных систем. При этом коэффициент сопротивления потоку по длине канала  $\lambda$  является



Зависимости точности аппроксимаций уравнения Колбрука–Уайта от их сложности:

а – точность в модулях медиан относительных отклонений; б – точность в коэффициентах детерминации

определяющим критерием при аэродинамическом расчете вентиляционных систем.

Коэффициент  $\lambda$  с высокой точностью может быть получен в результате итерационного решения уравнения Колбрука–Уайта. В настоящее время подобная задача легко решается средствами электронных таблиц (табличного редактора), существует целый ряд калькуляторов в свободном доступе в сети Интернет [33]. Однако в инженерных расчетах по-прежнему широко используются приближенные решения (аппроксимации) этого уравнения, выражающие коэффициент через явную функцию  $\lambda = f(Re, \Delta)$ .

Проведенный анализ наиболее известных аппроксимаций позволил сделать следующие **выводы:**

1. Точность аппроксимаций находится в степенной зависимости от их вычислительной сложности.

2. Точность аппроксимации может быть выражена через медиану относительных отклонений по выражению (25) и через коэффициент детерминации по выражению (26).

3. С точки зрения вычислительной сложности наиболее эффективными аппроксимациями являются выражения Б. Эка (12) ( $R^2 = 0,993$ ) и А. Ватанкаха (20) ( $R^2 = 1$ ).

4. Аппроксимация А.Д. Альтшуля (11) при незначительной вычислительной сложности ( $T(n) = 4$ ) обеспечивает приемлемую точность ( $R^2 = 0,985$ ) в достаточно широком заявленном диапазоне ( $4000 < Re < 10^7$ ;  $\Delta < 0,01$ ).

5. Широко используемые в российской инженерной практике аппроксимации (П. Блазиуса, А.Д. Альтшуля и И. Никурадзе) при своей простоте обеспечивают весьма малую, но приемлемую точность.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Nikuradse J.* Laws of flow in rough pipes. –Berlin, In translation, NACA TM 1292: 1933. – 361 p.
2. *Elemér B.* Fluid Mechanics. –Miskolci, Hungary, TÁMOP Press.: 2014. –303 p.
3. *Sutera S.P., Skalak R.* The History of Poiseuille's Law // Annual Review of Fluid Mechanics, 1993. – No.25. – P. 1–19.
4. *Презер Е.А., Самойленко Л.А.* Исследование гидравлического сопротивления трубопроводов при переходном режиме движения жидкостей и газов // Труды ЛИСИ. Л.; 1966. №5. С.27–39.
5. *Самойленко Л.А.* Исследование гидравлических сопротивлений трубопроводов в зоне перехода ламинарного движения в турбулентное: дис. ... к.т.н. Л.: ЛИСИ, 1968. 172 с.
6. *Rouse H.* Elementary Mechanics of Fluids. –New York, John Wiley and Sons publ.: 1946. – 376 p.
7. *Zeghadnia L., Robert J. L., Achour B.* Explicit solutions for turbulent flow friction factor: A review, assessment and approaches classification // Ain Shams Engineering Journal, 2019. – No. 10. – P. 243-252. DOI:10.1016/j.asej.2018.10.007.
8. *Colebrook C.F., White C.M.* Experiments with fluid friction in roughened pipes // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1937. – No. 904(161). – P. 367-381. DOI: 10.1098/rspa.1937.0150
9. *Идельчик И.Е.* Справочник по гидравлическим сопротивлениям. 3-е издание. М.: Машиностроение, 1992. 672 с.
10. *Murin G.A.* Gidravlichesкое soprotivlenie stalnykh trub // Izvestiya VTI, [VTI Proceeding], 1948. – No. 10. – P. 21–27.
11. *Blasius P. R. H.* The law on the compatibility of friction processes in liquid systems // Forschungsheft, 1913. – Vol. 131. – P. 1–41.
12. *Nikuradze J.* Stromungsgesetze in rauhen Rohren // VDI-Forschungsheft, 1933. – No. 361. – P. 16–53.
13. *Прандтль Л.* Результаты работ последнего времени по турбулентности // Проблемы турбулентности. М.; 1936. С. 9–34.
14. *Moody L.F.* An approximate formula for pipe friction factors // Trans ASME, 1947. – No. 12(69). – P. 1005–1006.
15. *Альтшуль А.Д.* Гидравлические сопротивления М.: Недра, 1970, 224 с.
16. *Филоненко Г.К.* Формула для коэффициента гидравлического сопротивления гладких труб // Известия ВТИ. 1948. №10(162). С 17–23.
17. *Eck B.* Technical Current Theory. – New York, Springer-Verlag Berlin Heidelberg: 1973. – 466 p.
18. *Samadianfard S.* Gene expression programming analysis of implicit Colebrook- White equation in turbulent flow friction factor calculation // Journal of Petroleum Science and Engineering, 2012. – Vol. 92-93. – P. 48-55. DOI: 10.1016/j.petrol.2012.06.005
19. *Churchill, S.W.* Empirical Expressions for the Shear Stress in Turbulent Flow in Commercial Pipe // American Institute of Chemical Engineering Journal, 1973. – No.19(2). – P. 375–376.
20. *Chen N.H.* An explicit equation for friction factor // American Institute of Chemical Engineering Journal, 1979. – No. 18(3). – P. 296–297.
21. *Zigrang, D.J., Sylvester, N.D.,* Explicit Approximations to the Solution of Colebrook's Friction Factor Equation // American Institute of Chemical Engineering Journal, 1982. – No.28. – P. 514–602.
22. *Serghides T.K.* Estimate friction factor accurately // Chemical Engineering, 1984. – Vol. 91, Is. 5. – P. 63-64.
23. *Romeo, E., Royo, C., Monzon, A.,* Improved Explicit Equations for Estimation of the Friction Factor in Rough and Smooth Pipes // Chemical Engineering Journal, 2002. – No.86. – P. 369–374.
24. *Buzzelli D.* Calculating friction in one step // Machine Design, 2008. – No. 80(12). – P. 54–55.
25. *Sonnad J.R., Goudar C.T.* Turbulent flow friction factor calculation using a mathematically exact alternative to the Colebrook-White equation // J Hydr Eng ASCE, 2006. – No. 132(8). – P. 863–867.
26. *Vatankhah A.R., Kouchakzadeh S.* Exact equations for pipe-flow problems // Journal of Hydraulic Research, 2009. – No.47(4). – P. 537-538. DOI: 10.1080/00221686.2009.9522031
27. *Brkić D.* An explicit approximation of the Colebrook equation for fluid flow friction factor // Petrol Sci Technol, 2011. – Vol. 29, N.15. – P.1596–1602.
28. *Fang X., Xu Y., Zhou Z.* New correlations of single-phase friction factor for turbulent pipe flow and evaluation of existing single-phase friction factor correlations // Nuclear Engineering and Design, 2011. – Vol. 241(2). – P. 897–902. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2010.12.019
29. *Salmasi F., KHATIBI R., GHORBANI M.A.* A study of friction factor formulation in pipes using artificial intelligence techniques and explicit equations // Turkish J. Eng. Env. Sci., 2012. – No.36. – P. 121–138.
30. *Brkić D.* A note on explicit approximations to Colebrook's friction factor in rough pipes under highly turbulent cases // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2016. – No. 93. – P. 513–515. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.08.109.
31. *Richardson, L. F.* The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems including differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam // Philosophical Transactions of the Royal Society A, 1911. – Vol. 210. – P.307–357.
32. *Sipser M.* Introduction to the Theory of Computation, 2nd edition. –Bostin, Thomson Course Technology: 2006. –431 p.
33. *Colebrook Online Calculator* // The Engineering ToolBox [https://www.engineeringtoolbox.com/colebrook-equation-d\\_1031.html](https://www.engineeringtoolbox.com/colebrook-equation-d_1031.html).

## REFERENCES

1. *Nikuradse J.* Laws of flow in rough pipes. Berlin, In translation, NACA TM 1292, 1933. 361 p.



2. Elemér B. Fluid Mechanics. Miskolci, Hungary, TÁMOP Press., 2014. 303 p.
3. Suter S.P., Skalak R. The History of Poiseuille's Law. Annual Review of Fluid Mechanics, 1993, no. 25, pp. 1–19.
4. Preger E.A., Samoilenko L.A. *Issledovanie gidravlicheskikh soprotivleniy truboprovodov pri perehodnom dvizhenii zhidkosti i gazov* [Investigation of the hydraulic resistance of pipelines during the transitional regime of the movement of liquids and gases]. *Trudy LISI. [LISI Proceedings]*, 1966, no 5, pp. 27–39. (In Russian).
5. Samoilenko L.A. *Issledovanie gidravlicheskikh soprotivleniy truboprovodov v zone perekhoda laminarnogo dvizheniya v turbulentnoe. Cand. Sc., Diss* [Study of hydraulic resistance of pipelines in the zone of transition of laminar motion to turbulent. *Cand. Sc. Diss.*]. Leningrad, 1968. 172 p. (In Russian).
6. Rouse H. Elementary Mechanics of Fluids. New York, John Wiley and Sons publ., 1946. 376 p.
7. Zeghadnia L., Robert J. L., Achour B. Explicit solutions for turbulent flow friction factor: A review, assessment and approaches classification. *Ain Shams Engineering Journal*, 2019, no. 10, pp. 243–252. DOI:10.1016/j.asej.2018.10.007.
8. Colebrook C.F., White C.M. Experiments with fluid friction in roughened pipes. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1937, no. 904(161), pp. 367–381. DOI: 10.1098/rspa.1937.0150
9. Idelchik I.E. *Spavochnik po gidravlicheskim soprotivleniyam* [Handbook of hydraulic resistance. 3rd edition]. Moscow, Mechanical Engineering, Publ., 1992. 672 p. (In Russian).
10. Murin G.A. *Gidravlichesкое soprotivlenie stalnykh trub*. *Izvestiya VTI, [VTI Proceeding]*, 1948, no. 10, pp. 21–27. (In Russian).
11. Blasius P. R. H. The law on the compatibility of friction processes in liquid systems. *Forschungsheft*, 1913, vol. 131, pp. 1–41.
12. Nikuradze J. Stromungsgesetze in rauhen Rohren. *VDI-Forschungsheft*, 1933, no. 361, pp. 16–53. (In German).
13. Prandtl L. *Rezultaty rabot poslednego vremeni po turbulentnosti*, Problems of turbulence, 1936, pp. 9–34.
14. Moody L.F. An approximate formula for pipe friction factors. *Trans ASME*, 1947, no. 12(69), pp. 1005–1006.
15. Altshul A.D. *Gidravlicheskie soprotivleniya* [Hydraulic resistance: second edition]. Moscow: Nedra, 1970, 224 pp.
16. Filonenko G.K. *Formula dlya koeffitsienta gidravlicheskogo soprotivleniya gladkikh trub* [Formula for the Coefficient of Fluid Resistance of Smooth Pipes]. *Izvestiya VTI*, 1948, No. 10 (162), pp. 17–23.
17. Eck B. Technical Current Theory. New York, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1973. 466 p.
18. Samadianfard S. Gene expression programming analysis of implicit Colebrook-White equation in turbulent flow friction factor calculation. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2012, Volume 92–93, pp. 48–55. DOI: 10.1016/j.petrol.2012.06.005
19. Churchill, S.W. Empirical Expressions for the Shear Stress in Turbulent Flow in Commercial Pipe. *American Institute of Chemical Engineering Journal*, 1973, no. 19(2), pp. 375–376.
20. Chen N.H. An explicit equation for friction factor, *American Institute of Chemical Engineering Journal*, 1979, no. 18(3), pp. 296–297.
21. Zigrang, D.J., Sylvester, N.D., Explicit Approximations to the Solution of Colebrook's Friction Factor Equation. *American Institute of Chemical Engineering Journal*, 1982, no. 28, pp. 514–602.
22. Serghides T.K. Estimate friction factor accurately. *Chemical Engineering*, 1984, Volume 91, Issue 5, pp. 63–64.
23. Romeo, E., Royo, C., Monzon, A., Improved Explicit Equations for Estimation of the Friction Factor in Rough and Smooth Pipes. *Chemical Engineering Journal*, 2002, no. 86, pp. 369–374.
24. Buzzelli D. Calculating friction in one step. *Machine Design*, 2008, no. 80(12), pp. 54–55.
25. Sonnad J.R., Goudar C.T. Turbulent flow friction factor calculation using an mathematically exact alternative to the Colebrook-White equation. *J Hydr Eng ASCE*, 2006, no. 132(8), pp. 863–867.
26. Vatankhah A.R., Kouchakzadeh S. Exact equations for pipe-flow problems. *Journal of Hydraulic Research*, 2009, no. 47(4), pp. 537–538. DOI: 10.1080/00221686.2009.9522031
27. Brkic D. An explicit approximation of the Colebrook equation for fluid flow friction factor. *Petrol Sci Technol*, 2011, vol. 29, i. 15. p. 1596–1602.
28. Fang X., Xu Y., Zhou Z. New correlations of single-phase friction factor for turbulent pipe flow and evaluation of existing single-phase friction factor correlations. *Nuclear Engineering and Design*, 2011, vol. 241, no. 2. 897–902 pp. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2010.12.019
29. Salmasi F., KHATIBI R., GHORBANI M.A. A study of friction factor formulation in pipes using artificial intelligence techniques and explicit equations. *Turkish J. Eng. Env. Sci.*, 2012, no. 36, pp. 121–138.
30. Brkić D. A note on explicit approximations to Colebrook's friction factor in rough pipes under highly turbulent cases. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2016, no. 93, pp. 513–515. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.08.109.
31. Richardson, L. F. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems including differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 1911, vol. 210, pp. 307–357.
32. Sipser M. Introduction to the Theory of Computation, 2nd edition. Boston, Thomson Course Technology, 2006. 431 p.
33. Colebrook Online Calculator // The Engineering ToolBox [https://www.engineeringtoolbox.com/colebrook-equation-d\\_1031.html](https://www.engineeringtoolbox.com/colebrook-equation-d_1031.html).

Об авторах:

**НИКИТИН Максим Николаевич**

кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры теплогазоснабжения и вентиляции Самарский государственный технический университет Академия строительства и архитектуры 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 194 E-mail: nikitin-pro@mail.ru

**NIKITIN Maxim Nikolaevich**

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Heat and Gas Supply and Ventilation Samara State Technical University, Academy of Architecture and Civil Engineering 443001, Russia, Samara, str. Molodogvardeyskaya, 194. E-mail: nikitin-pro@mail.ru

**СОЛОВЬЕВА Татьяна Сергеевна**

студентка, 2 курс, ФИСПОС, направление: Энергоэффективность систем обеспечения микроклимата зданий и сооружений, гр.МТ-82 Самарский государственный технический университет Академия строительства и архитектуры 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 194 E-mail: tatyana.solowiewa17@mail.ru

**SOLOVYOVA Tatyana Sergeevna**

Student, 2 year, FISPOS, direction: Energy Efficiency of Microclimate Maintenance Systems for Buildings and Structures, group MT-82. Samara State Technical University, Academy of Architecture and Civil Engineering 443001, Russia, Samara, str. Molodogvardeyskaya, 194. E-mail: tatyana.solowiewa17@mail.ru

**ШЛЯХТИНА Ольга Владимировна**

студентка, 2 курс, ФИСПОС, направление: Энергоэффективность систем обеспечения микроклимата зданий и сооружений, гр.МТ-82 Самарский государственный технический университет Академия строительства и архитектуры 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 194 E-mail: o\_shlyakhtina@mail.ru

**SHLYANTINA Olga Vladimirovna**

Student, 2 year, FISPOS, direction: Energy Efficiency of Microclimate Maintenance Systems for Buildings and Structures, group MT-82. Samara State Technical University, Academy of Architecture and Civil Engineering 443001, Russia, Samara, str. Molodogvardeyskaya, 194. E-mail: o\_shlyakhtina@mail.ru

Для цитирования: *Никитин М.Н., Соловьева Т.С., Шляхтина О.В.* Решения в явной форме для определения коэффициента гидравлического сопротивления турбулентному потоку // Градостроительство и архитектура. 2019. Т. 9, № 4. С. 39–46. DOI: 10.17673/Vestnik.2019.04.7.

---

ПОДПИСКА – 2020  
на январь–июнь по Объединенному каталогу  
«Пресса России»

Уважаемые читатели!

Обратите внимание, что с 1 сентября 2019 г. проводится  
подписная кампания первого полугодия 2020 г.  
на журнал Самарского государственного технического университета

«ГРАДОСТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА»

Условия оформления подписки Вы найдете  
в I томе каталога «Пресса России» на странице 178