ЭНЕРГЕТИКА

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СТАНЦИИ И ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 531.5:532.556.6

DOI: 10.17673/Vestnik.2019.01.18

Е. А. КРЕСТИН

ВЛИЯНИЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ СТЕНКИ ПЛОСКОГО ДИФФУЗОРА НА ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ПОТОКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

INFLUENCE OF FLAT WALL DIFFUSER WALL OSCILLATION ON HYDRODYNAMIC PARAMETERS OF VISCOUS FLUID FLOW

С целью снижения энергоемкости, увеличения надежности работы гидравлического привода строительных машин и механизмов проведены исследования гидродинамических параметров потока вязкой жидкости в плоском диффузоре при осцилляции одной из стенок канала. Для построения полей скоростей и давлений использованы уравнения Навье-Стокса совместно с уравнением неразрывности. Задача решена в полярных координатах с граничными условиями. Получено общее решение задачи, которое соответствует автомодельному граничному условию на подвижной стенке. Профиль радиальной скорости имеет участки прямого и обратного течений и представляет собой стоячую волну по угловой координате. Определены силы, действующие на подвижную и неподвижную стенки диффузора. Полный интегральный расход через диффузор равен нулю.

***Ключевые слова**: гидропривод, диффузор, осцилляция, гидродинамические параметры, профиль скорости, утечки жидкости, сила вязкого трения, локальные и интегральные характеристики*

In order to reduce the energy consumption, increase the reliability of the hydraulic drive of construction machines and mechanisms, studies of the hydrodynamic parameters of the viscous fluid flow in a flat diffuser during the oscillation of one of the walls of the channel are carried out. Navier-Stokes equations together with the continuity equation are used to construct velocity and pressure fields. The problem is solved in polar coordinates with boundary conditions. The General solution of the problem, which corresponds to the self-similar boundary condition on the moving wall, is obtained. The radial velocity profile has sections of forward and reverse currents and is a standing wave along the angular coordinate. The forces acting on the movable and stationary walls of the diffuser are determined.

***Keywords**: hydraulic drive, diffuser, oscillation, hydrodynamic parameters, velocity profile, fluid leakage, viscous friction force, local and integral characteristics*

Гидравлический привод нашел широкое применение во многих отраслях производства, и в частности, в строительстве. Границы области применения гидравлического привода определяются его преимуществами и недостатками. Наряду с простотой управления, надежностью эксплуатации, большой передаваемой мощностью на единицу массы привода, а также возможностью получения больших сил и мощностей при малых размерах и весе передаточного механизма, гидравлический привод имеет ряд недостатков. В первую очередь к ним относятся утечки рабочей жидкости через уплотнения и зазоры. Особенно эта проблема актуальна при высоких значениях давления в гидросистеме.

В настоящее время для дальнейшего развития систем гидропривода важную роль играют разрабатываемые и внедряемые новые уплотнительные материалы. В частности, развитие нанотехнологий позволяет повысить прочность материалов на износ и истирание, а это ведет к уменьшению массы оборудования, его размеров, повышает надежность исполнительных механизмов, снижает энергоемкость всего гидропривода.

Наряду с эластичными прокладками из различных материалов, герметиками, пробками, уплотнительными шайбами между подвижными соединениями широко используются бесконтактные уплотнения, заполненные рабочей жидкостью. При таком уплотнении не наступает износа подвижных соединений в результате трения. Поэтому такие уплотнения чаще всего используют при возвратно-поступательных перемещениях, а также при высоких окружных скоростях, когда температура рабочей жидкости достаточно высока.

Как известно, несоосность и перекос плунжера в обойме приводят к изменению гидродинамических параметров в зазоре бесконтактного уплотнения [1–5]. Выясним влияние этих обстоятельств на ресурс работы и энергоемкость системы гидропривода. Для этого найдем профиль скорости рабочей жидкости в канале переменной высоты, а также вычислим расход утечек через диффузор и силу вязкого трения на подвижной и неподвижной стенках канала.

Рассмотрим динамику вязкой жидкости в плоском диффузоре с углом раскрытия α, одна из стенок которого совершает в своей плоскости гармонические колебания (рис.1).

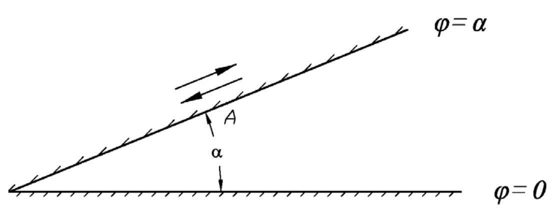

Рис. 1. Расчетная модель диффузора

Внутри диффузора находится несжимаемая вязкая жидкость. Для исследования полей скоростей и давлений при решении задачи будем исходить не из уравнений для функции тока, а из уравнений Навье-Стокса [6]:

$$\frac{\partial v_\tau}{\partial t}+v_\tau\frac{\partial v_\tau}{\partial \tau}+\frac{v_\varphi}{\tau}\cdot\frac{\partial v_\tau}{\partial \varphi}-\frac{v_\varphi^2}{\tau}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial \tau}+\nu\left(\Delta v_\tau-\frac{v_\tau}{\tau^2}-\frac{2}{\tau^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right), \qquad (1а)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}+v_\tau\frac{\partial v_\varphi}{\partial \tau}+\frac{v_\varphi}{\tau}\cdot\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{v_\tau v_\varphi}{\tau\nu}=-\frac{1}{\rho\tau}\cdot\frac{\partial p}{\partial \varphi}+\nu\left(\Delta v_\varphi-\frac{v_\varphi}{\tau^2}-\frac{2}{\tau^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right), \qquad (1б)$$

решая их совместно с уравнением неразрывности

$$\frac{\partial v_\tau}{\partial \tau}+\frac{v_\tau}{\tau}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}=0. \qquad (2)$$

Для определения гидродинамических параметров используем полярные координаты τ, φ, в которых оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta=\frac{\partial \tau^2}{\partial \tau^2}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial \tau}+\frac{1}{\tau^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\ . \qquad (3)$$

Определим граничные условия на подвижной и неподвижной стенках:

$$\text{при} \quad \varphi=0, v_\tau(\tau,\varphi)=v_\varphi(\tau,\varphi)=0\ , \qquad (4)$$

$$\text{при} \quad \varphi=\alpha, v_0\cdot\cos\omega t, v_\varphi=0\,. \qquad (5)$$

Предположим, что скорость движения стенки канала $\nu_0 = \nu_0(\tau)$.

Так как в граничных условиях угловая скорость равна нулю, то решение краевой задачи (1а) – (5) будем искать в виде

$$v_\tau=v_\tau(t,\tau,\varphi);\ \ v_\varphi=0\,.$$

Отсюда получаем, что движение жидкости в диффузоре чисто радиальное.

Выразим зависимость скорости ν_τ от параметра t с учетом граничных условий (5) в виде реальной части выражения

$$\left.\begin{aligned} v_\tau&=v(\tau,\varphi)e^{i\omega t},\\ v_\varphi&=0.\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Тогда уравнение неразрывности в этом случае будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\tau v_\tau)=0\,, \qquad (7)$$

откуда следует, что

$$v=\frac{\Phi(\varphi)}{\tau}\ . \qquad (8)$$

Подставляя теперь выражения (6) – (8) в исходные уравнения (1а) – (1б), получим:

$$i\omega\frac{\Phi}{\tau}e^{i\omega t}+\frac{\Phi}{\tau}e^{i\omega t}\cdot\left(-\frac{\Phi}{\tau^2}\right)e^{i\omega t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \tau}+\nu\frac{\Phi''}{\tau^3}e^{i\omega t}\,; \qquad (9)$$

$$0=-\frac{1}{\rho\tau}\cdot\frac{\partial p}{\partial \varphi}+\frac{2\nu}{\tau^3}\Phi'\cdot e^{i\omega t}\,. \qquad (10)$$

Из уравнения (9) следует, что решение в форме (6) могло бы удовлетворить исходным уравнениям, если бы не квадратичный по Ф второй член в левой части уравнения (9). При малых значениях скорости колебания стенки указанным слагаемым можно пренебречь. Математическим выражением малости скорости будет следующее условие:

$$v_0 << \min\left(\omega\tau,\frac{\nu}{\tau}\right). \qquad (11)$$

Диапазон полученного решения при указанных условиях будет определяться неравенством

$$\tau_{\min}=\frac{v_0}{\omega} << \tau << \frac{\nu}{v_0}=\tau_{\max}\,. \qquad (12)$$

Следует отметить, что чем меньше скорость движения стенки диффузора v_0, тем будет шире интервал (12).

Таким образом, с учетом вышеизложенных ограничений уравнения (9) и (10) можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} i\omega\frac{\Phi}{\tau}e^{i\omega t} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\tau} + \nu\frac{\Phi''}{\tau^3}e^{i\omega t},\\ 0 &= -\frac{1}{\rho\tau}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + \frac{2\nu}{\tau^3}\Phi' e^{i\omega t}.\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Из уравнений (13) следует, что давление следует искать в виде функции

$$p(\tau,\varphi,t) = \left[\frac{f(\varphi)}{\tau^2} + g(\varphi)\ln\tau\right]e^{i\omega t}. \qquad (14)$$

Подставляя (14) в (13), приравнивая коэффициенты при одинаковых зависимостях от τ в левых и правых частях, после преобразований получим

$$g'(\varphi) = 0;\ g(\varphi) = const = c. \qquad (15)$$

$$\left.\begin{aligned} i\omega\frac{\Phi}{\tau} &= \frac{2}{\rho\tau^3}f(\varphi) - \frac{1}{\rho\tau}g(\varphi) + \nu\frac{\Phi''}{\tau^3},\\ 0 &= -\frac{1}{\rho\tau^3}f'(\varphi) - \frac{g'(\varphi)}{\rho\tau}\ln\tau + \frac{2\nu}{\tau^3}\Phi'.\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} i\omega\Phi &= -\frac{c}{\rho},\\ \frac{f'}{\rho} &= 2\nu\Phi',\\ \frac{2f}{\rho} &= -\nu\Phi''.\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

При больших и средних частотах ω система (17) имеет только тривиальное решение, а это означает, что при таких частотах осцилляции стенки движение жидкости не будет чисто радиальным, т. е. это движение нельзя описать решением типа (17). При больших частотах линии тока в диффузоре будут искривлены. При малых частотах из первого уравнения системы (17) следует, что

$$c = 0. \qquad (18)$$

Функции $f(\varphi)$ и $\Phi(\varphi)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} f' &= 2\nu\rho\Phi',\\ 2f &= -\nu\rho\Phi''.\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Данная система уравнений эквивалентна двум уравнениям типа

$$\left.\begin{aligned} \Phi''' + 4\Phi' &= 0,\\ f''' + 4f' &= 0.\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Поскольку уравнения эти одинаковые, то достаточно записать решение одного из них [7]:

$$\Phi = c_1\sin 2\varphi + c_2\cos 2\varphi + c_3. \qquad (21)$$

Решения для функции f будут отличаться только константами в (21).

Таким образом, величина радиальной скорости и давления имеют вид:

$$v_\tau = \frac{c_1\sin 2\varphi + c_2\cos 2\varphi + c_3}{\tau}\cos(\omega t + \varphi_1); \qquad (22)$$

$$p = \frac{A_1\sin 2\varphi + A_2\cos 2\varphi + A_3}{\tau}\cos(\omega t + \varphi_2). \qquad (23)$$

В формулах (22) и (23) все постоянные слагаемые вещественные, так как комплексность в уравнении (21) была учтена фазами φ_1 и φ_2.

Из граничного условия (5) следует, что $\varphi_1 = 0$. Из второго уравнения системы (19) находим $\varphi_2 = 0$. Это же уравнение позволяет связать постоянные c_i и A_i.

$$A_{1,2} = 2\nu\rho c_{1,2};\ A_3 = 0. \qquad (24)$$

Таким образом, решение можно записать в виде:

$$v_\tau = \frac{c_1\sin 2\varphi + c_2\cos 2\varphi + c_3}{\tau}\cos\omega t; \qquad (25)$$

$$p = 2\nu\rho\frac{c_1\sin 2\varphi + c_2\cos 2\varphi + c_3}{\tau}\cos\omega t. \qquad (26)$$

При постановке задачи предполагалось, что задача решается только в том случае, если

$$v_0(\tau) = \frac{\psi}{\tau}, \qquad (27)$$

где $\psi = const$.

Следовательно, чтобы задача имела решение, необходимо, чтобы граничные условия были автомодельными. Это обусловлено тем, что наше решение справедливо все-таки на ограниченном участке (12). Тогда можно выбирать функцию ψ в (27) таким образом, чтобы средняя по интервалу автомодельная скорость была равна истинной скорости движения стенки диффузора. Именно эту истинную скорость необходимо использовать в условиях (11) и (12). Тогда в пределах этого интервала полученное решение будет справедливо, а если интервал (12) будет не слишком велик, то решение будет достаточно точно отвечать поставленной задаче.

Фактически речь идет о том, чтобы на рис. 2 сплошная линия (1) не отклонялась бы значительно от пунктирной линии (2) – от истинной автомодельной скорости на границе диффузора.

Перейдем к определению постоянных величин в общем решении.

Необходимо определить прежде всего ψ в выражении (27):

$$\frac{1}{\tau_{\max} - \tau_{\min}}\int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}}\frac{\psi}{\tau}d\tau = V, \qquad (28)$$

где V – истинная скорость стенки, т. е. это коэффициент при функции $\cos\omega t$.

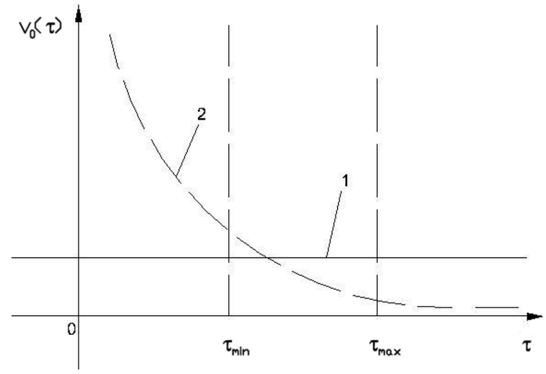

Рис. 2. К вопросу о граничных условиях

Из соотношения (28) имеем

$$\psi = \frac{V(\tau_{\max} - \tau_{\min})}{\ln \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}}}. \quad (29)$$

Поскольку в начале диффузора нет ни источников, ни стоков, то получаем

$$\int_0^{\alpha} \tau_0 v(\tau_0, \varphi) d\varphi = 0, \quad (30)$$

которое будет справедливо при любых значениях $\tau_0 \in (r_{max}; \tau_{min})$.

Для определения постоянных c_1, c_2 и c_3 получили следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &c_1 + c_3 = 0, \\ &c_1 \sin 2\alpha - 2c_2 \sin^2 2\alpha = \psi, \\ &c_1 \sin^2 \alpha - c_2\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Решая эту систему, найдем:

$$\left.\begin{aligned} &c_1 = \psi \frac{\sin\alpha \cos\alpha - \alpha}{2\sin\alpha(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)}, \\ &c_2 = -\frac{\psi}{2} \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha} = -c_3. \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

С учетом (32) выражения (25) и (26) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} &v_\tau = \frac{c_1 \sin 2\varphi - 2c_2 \sin^2 \varphi}{\tau} \cos\omega t, \\ &p = 2\nu p \frac{c_1 \sin 2\varphi + c_2 \cos 2\varphi}{\tau^2} \cos\omega t. \\ &v_\varphi = 0 \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Ко второму уравнению системы (33) необходимо добавить давление «на бесконечности» p_∞.

Исследуем теперь полученное решение. Рассмотрим прежде всего профиль скорости как функцию угла φ.

$$\frac{\partial v_\tau}{\partial \varphi} = \frac{2}{\tau}(c_1 \cos 2\varphi - c_2 \sin 2\varphi)\cos\omega t; \quad (34)$$

$$\frac{\partial^2 v_\tau}{\partial \varphi^2} = -\frac{4}{\tau}(c_1 \sin 2\varphi + c_2 \cos 2\varphi)\cos\omega t. \quad (35)$$

Имеется луч, вдоль которого жидкость покоится:

$$v_\tau(\tau, \varphi_0) = 0, tg\varphi_0 = \frac{c_1}{c_2} > 0, \quad (35а)$$

так как коэффициенты c_1 и c_2 имеют одинаковые знаки. Выше луча $\varphi = \varphi_0$ жидкость движется в направлении перемещения стенки, ниже этого луча жидкость движется в противоположную сторону. В области обратного течения имеется луч, на котором величина скорости будет максимальная:

$$\frac{\partial v_\tau}{\partial \varphi} = 0, tg 2\varphi_1 = \frac{c_1}{c_2} > 0. \quad (35б)$$

Отсюда следует, что $\varphi_1 = \varphi_0/2$. Величина скорости на экстремальном луче

$$v_\tau(\tau, \varphi_1) = \frac{\cos\omega t}{\tau}\left(-\sqrt{c_1^2 + c_2^2} - c_2\right). \quad (36)$$

Точка перегиба профиля скорости определяется соотношением

$$\frac{\partial^2 v_\tau}{\partial \varphi^2} = 0, tg 2\varphi_2 = -\frac{c_2}{c_1} < 0.$$

Так как коэффициенты c_1 и c_2 имеют одинаковые знаки, то необходимым условием наличия точки перегиба является условие:

$$\alpha > \alpha_{\min} = \frac{\pi}{4}.$$

Причем при меньших углах раствора диффузора профиль скорости не имеет перегибов.

Найдем величину напряжения на стенке при $\varphi = 0$:

$$\tau_0 = \mu \tfrac{\partial v_\tau}{\tau \partial \varphi} |_{\varphi=0} = \frac{2\mu}{\tau^2} c_1 \cos\omega t, \quad (37)$$

а напряжение на стенке при $\varphi = \alpha$ составит

$$-\tau_\alpha = \frac{2\mu}{\tau^2}(c_1 \cos 2\alpha - c_2 \sin 2\alpha)\cos\omega t. \quad (38)$$

Перейдем к анализу локальных характеристик поля давления:

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 2\nu p \frac{\cos\omega t}{\tau^2} 2(c_1 \cos 2\varphi - c_2 \sin 2\varphi); \quad (39)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} = -8\nu p \frac{\cos\omega t}{\tau^2}(c_1 \sin 2\varphi - c_2 \cos 2\varphi). \quad (40)$$

Как известно, давление имеет нулевое значение на том же луче, где находится перегиб. На этом же луче происходит и перегиб профиля скорости $\varphi_1 = \varphi_2$. Максимальные значения давления и скорости будут на одном и том же луче $\varphi = \varphi_1$. Экстремальное значение давления составляет

$$p(\tau, \varphi_1) = -2\nu\rho \frac{\cos\omega t}{\tau^2}\sqrt{c_1^2 + c_2^2}. \quad (41)$$

Давление на нижней стенке (φ = 0) является величиной переменной:

$$p(\tau,0) = 2\nu\rho\frac{c_2}{\tau_2}\cos\omega t\,. \tag{42}$$

Таким образом, все локальные характеристики поля течения зависят от угла раскрытия α диффузора.

На рис. 3 показана качественная картина профилей скорости и давления диффузора с углом раскрытия $\alpha = \pi/6$.

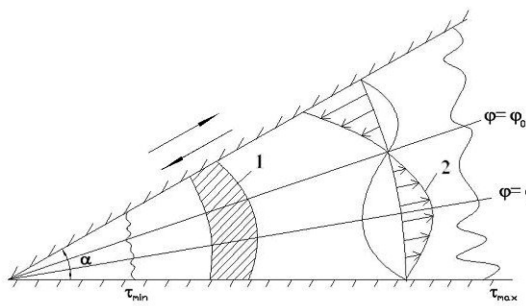

Рис. 3. Качественный вид профилей давления (1) и скорости (2)

Отметим, что необходимым условием наличия точки перегиба на профиле скорости является соотношение

$$\pi - arctg\frac{c_2}{c_1} \le 2\alpha\,. \tag{43}$$

Анализ трансцендентного уравнения (43) показывает, что при углах раскрытия диффузора $\alpha < \pi/3$ профили скорости v_τ и эпюра давления p точек перегиба иметь не будут.

При решении задачи рассматривался интервал $\tau_{\min} << \tau << \tau_{\max}$, в котором течение является чисто радиальным (при малых частотах осцилляции стенки). За пределами указанного интервала линии тока будут иметь искривления. Причем границей этого искривления можно считать

$$\tau = \tau_{\min} = \frac{v_0}{\omega} \approx V/\omega\,.$$

Предадим, наконец, математическую корректность понятию малых частот колебаний. Из первого уравнения системы (15) следует, что частота должна быть мала, если $\omega = \nu/\tau^2$. Данное условие не противоречит интервалу (12). Тогда, объединяя указанное ограничение с интервалом (12), получим:

$$\tau_{\min} = \frac{\nu}{\omega} < \tau < \min\left(\frac{\nu}{V'}\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\right) = \tau_{\max}\,. \tag{44}$$

Отсюда следует, что интервал (12) всего лишь «урезался» со стороны $\tau_{\max}$.

Рассмотрим теперь интегральные характеристики поля течения. Так как подвижная стенка представляет собой границу канала, то найдем силы, действующие вдоль этой подвижной стенки. Причем расчеты отнесем к участку $\tau_{\min} < \tau_1 < \tau_2 < \tau_{\max}$, а конкретно – к расстоянию $\tau_2 - \tau_1$.

На подвижную стенку со стороны жидкости в направлении её движения действует только сила трения:

$$F_\alpha^{(1)} = -2\mu(c_1\cos 2\alpha - c_2\sin 2\alpha)\cos\omega t\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right). \tag{45}$$

На неподвижную стенку в направлении движения верхней стенки действует как сила давления, так и сила трения.

Сила давления, действующая на участок (τ_1, τ_2) и направленная по нормали к нему, равна

$$P = 2\mu c_2\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)\cos\omega t\,, \tag{46}$$

а проекция этой силы на направление движения верхней стенки равна

$$P_\alpha = -2\mu c_2\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)\sin\alpha\cdot\cos\omega t\,. \tag{47}$$

Сила трения, действующая на участок (τ_1, τ_2) нижней стенки и направленная тангенциально к ней, составляет

$$F = 2\mu c_1\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)\cos\omega t\cdot\cos\alpha\,. \tag{48}$$

Суммарная сила, действующая на неподвижную стенку в направлении движения верхней стенки, равна

$$F_\alpha^{(2)} = P_\alpha + F_a = 2\mu(c_1\cos\alpha - c_2\sin\alpha)\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)\cos\omega t\,. \tag{49}$$

Теперь определим вращательный момент, действующий на участок (τ_1, τ_2) неподвижной стенки, относительно начала диффузора.

Из определения вращательного момента сил имеем:

$$dM_2 = dF_\perp(\tau)\cdot\tau\,, \tag{50}$$

где $dF_\perp(\tau)$ – сила, действующая на элемент $d\tau$ нижней (неподвижной) стенки, в направлении нормали к ней.

Величина силы вязкого трения направлена тангенциально, а ее проекция на нормаль равна нулю. Сила $dF_\perp$ целиком обусловлена давлением на нижней стенке

$$dF_\perp = 2\mu c_2\frac{d\tau}{\tau^2}\cos\omega t\,,$$

а величина момента этой силы будет равна

$$dM_z = 2\mu c_2\frac{d\tau}{\tau}\cos\omega t\,.$$

Интегрируя это выражение по τ от τ_1 до τ_2, получим

$$M_2 = 2\mu c_2\ln\frac{\tau_2}{\tau_1}\cos\omega t\,. \tag{51}$$

Зависимость (51) определяет переменную (временную) часть момента. Однако есть еще и постоянная часть момента, обусловленная постоянным слагаемым в давление, т. е. давлением «на бесконечности» – p_∞:

$$m_2 = \frac{p_\infty}{2}\left(\tau_2^2 - \tau_1^2\right). \qquad (52)$$

Полный момент сил, действующих на участок (τ_1, τ_2) относительно начала диффузора, можно выразить в виде

$$M = \frac{p_\infty}{2}\left(\tau_2^2 - \tau_1^2\right) + 2\mu c_2 \ln\frac{\tau_2}{\tau_1}\cos\omega t. \qquad (53)$$

Рассмотрим физический смысл момента M по (53). Если нижняя (неподвижная) стенка диффузора может свободно, без трения, вращаться вокруг оси, проходящей через начало диффузора, то для компенсирования вращающего воздействия внутреннего давления необходимо приложить извне к участку (τ_1, τ_2) указанный момент сил.

Следует отметить, что первое слагаемое в уравнении (53) значительно больше второго. Следовательно, полный вращательный момент, изменяясь по величине, остается постоянным по направлению.

Полный расход жидкости, проходящий через все сечения диффузора, согласно (30) равен нулю. Определим величину расхода между лучами $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \alpha$. Между этими лучами направление скорости движения жидкости совпадает с направлением скорости осцилляции стенки

$$Q = \int_{\varphi_0}^{\alpha} v_r \tau d\varphi = \cos\omega t \int_{\varphi_0}^{\alpha}\left[c_1 \sin 2_\varphi - c_2\left(1-\cos 2\varphi\right)\right]d\varphi =$$
$$\cos\omega t\left[\frac{c_1}{2}\left(\cos 2\varphi_0 - \cos 2\alpha\right) + \frac{c_2}{2}\left(\sin 2\alpha - \sin 2\varphi_0\right) - c_2\left(d - \varphi_0\right)\right]. \qquad (54)$$

Последнее выражение можно представить в виде:

$$Q = \frac{\tau}{4\left[\frac{\partial v_\tau}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_0} - \frac{\partial v_\tau}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_2}\right]} - c_2\left(d - \varphi_0\right)\cos\omega t. \qquad (55)$$

В формулах (54) и (55) угол φ_0 определен соотношением (35а). Расход между лучами $\varphi_0 = 0$ и $\varphi = \varphi_0$ также определяется выражением (55), но с противоположным знаком, т. е. направлен в обратную сторону.

В случае (α - φ_0) << π разложим выражение (54) в ряд Тейлора [8] и найдем:

$$Q \approx \psi\left(\alpha - \varphi_0\right)\cos\omega t. \qquad (56)$$

Используя это выражение для определения расхода, следует иметь в виду, что $\psi = \mathrm{const}$, $\varphi = \varphi_0(\alpha)$. Причем величина расхода Q линейно зависит от угла раствора диффузора ($\alpha = \varphi_0$).

Выводы. 1. Исследуемое чисто радиальное течение при малых числах Рейнольдса и малых частотах осцилляций стенки реализуется в интервале

$$\tau_{\min} = \frac{V}{\omega} < \tau < \min\left(\frac{\nu}{V'}\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\right) = \tau_{\max}.$$

В интервалах $\tau < \tau_{\min}$ или $\tau > \tau_{\max}$ линии тока будут искривлены.

2. Исследование радиального течения соответствует автомодельному граничному условию на подвижной стенке:

$$v_\tau = \left(\frac{\psi}{\tau}\right)\cos\omega t.$$

При $v_\tau = \mathrm{const}$ линии тока будут искривлены. Аппроксимируя отношение (ψ/τ) постоянной величиной на расчетном интервале ($\tau_{\min}$, $\tau_{\max}$), данным искривлением линий тока можно пренебречь.

3. Профиль радиальной скорости имеет участки прямого и обратного течений. Интегральный расход через сечение диффузора равен нулю.

4. Имеется луч $\varphi = \varphi_0$, вдоль которого жидкость покоится. По разные стороны этого луча жидкость движется в противоположных направлениях. Имеется луч $\varphi = \varphi_1$, ($\varphi_1 = \varphi_0/2$), вдоль которого скорость обратного течения максимальная. Профиль радиальной скорости представляет собой стоячую волну по угловой координате. При угле раскрытия диффузора $\pi/3 < \alpha < \pi/2$ профиль скорости имеет точку перегиба на луче.

5. Давление по времени изменяется в фазе со скоростью. Причем величина давления изменяется как поперек диффузора $\left(\frac{\partial p}{\partial\varphi} \neq 0\right)$, так и вдоль него $\left(\frac{\partial p}{\partial\tau} \neq 0\right)$. В частности, давление на нижней неподвижной стенке является величиной переменной. Если радиальная скорость пропорциональна $1/\tau$, то давление пропорционально $1/\tau^2$.

6. На луче $\varphi = \varphi_1$ давление осциллирует с наибольшей амплитудой. Если профиль скорости имеет точку перегиба при $\varphi = \varphi_2$, то на этом луче $\varphi = \varphi_2$ давление не испытывает колебаний и сохраняется свое постоянное значение.

7. Определена сила трения на подвижной и неподвижной стенках диффузора. Найден вращательный момент, действующий на расчетный участок (τ_1, τ_2) нижней стенки.

8. Величина расхода жидкости в области «одностороннего» движения между лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_0$ или $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \alpha$ определена зависимостью

$$Q = \cos\omega t\left[\frac{c_1(\alpha)}{2}\left(\cos 2\varphi_0 - \cos 2\alpha\right) + \frac{c_2(\alpha)}{2}\left(\sin 2\alpha - \sin 2\varphi_0\right) - c_2\left(\alpha - \varphi_0\right)\right].$$

Для узких диффузоров, когда $(\alpha - \varphi_0) << \pi$, величина расхода равна

$$Q \approx \psi(\alpha - \varphi_0)\cos\omega t .$$

9. Если средняя на интервале (τ_{min}, τ_{max}) автомодельная скорость верхней стенки равна истинной экспериментальной, но не зависящей от τ, то коэффициент ψ равен значению

$$\psi = V(\tau_{max} - \tau_{min})\ln^{-1}\frac{\tau_{max}}{\tau_{min}},$$

где V – амплитуда осцилляций во времени истинной скорости верхней стенки.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Крестин Е.А.* Определение утечек жидкости через зазор бесконтактного уплотнения поршня гидравлического вибратора // Научное обозрение. 2014. № 5. С. 108–110.

2. *Галицков С.Я., Дуданов И.В.* Автоматизированный гидропривод поворотной платформы экскаватора // Труды секции «Строительство». Строительный вестник Российской инженерной академии. М., 2007. Вып. 8. С. 15–18.

3. *Вайсман Н.М., Рыбаков В.Н.* Расчет объемного гидропривода возвратно-поступательного движения дроссельного регулирования. СПб.: Издательство СПбГТУ, 1994. 352 с.

4. *Лозовецкий В.В.* Гидро- и пневмосистемы транспортно-технологических машин. СПб., 2012. 560 с.

5. Гидравлика и гидропневмопривод. Ч 2: Гидравлические машины и гидропневмопривод / под ред. А.А. Шейпака. 4-е изд., доп. и перераб. М.: МГИУ, 2009. 352 с.

6. *Слезкин Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гос. изд. техн.-теорет. лит., 1995. 519 с.

7. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.

8. *Башта Т.М., Руднев С.С.* Гидравлика, гидромашины, гидропривод. М.: Машиностроение, 2002. 423 с.

Об авторе:

КРЕСТИН Евгений Александрович
кандидат технических наук, профессор кафедры теплогазоснабжения и вентиляции
Самарский государственный технический университет
Академия строительства и архитектуры
443100, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 194
E-mail: krestin@bk.ru

KRESTIN Evgeny A.
PhD in Engineering Science, Professor of the Heat and Gas Supply and Ventilation Chair
Samara State Technical University
Academy of Architecture and Civil Engineering
443001, Russia, Samara, Molodogvardeyskaya str., 194
E-mail: krestin@bk.ru

Для цитирования: *Крестин Е.А.* Влияние осцилляции стенки плоского диффузора на гидродинамические параметры потока вязкой жидкости // Градостроительство и архитектура. 2019. Т.9, №1. С. 119–125. DOI: 10.17673/Vestnik.2019.01.18.
For citation: *Krestin E.A.* Influence of flat wall diffuser wall oscillation on hydrodynamic parameters of viscous fluid flow // Urban Construction and Architecture. 2019. V. 9, 1. Pp. 119–125. DOI: 10.17673/Vestnik.2019.01.18.