УДК 624.131.6:627.8

В.А. ШАБАНОВ

кандидат технических наук, профессор кафедры природоохранного и гидротехнического строительства, президент университета
Самарский государственный архитектурно-строительный университет

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ИНФИЛЬТРАЦИИ НА ТЕРРИТОРИЯХ, ЗАТОПЛЕННЫХ ВСЛЕДСТВИЕ ЧРЕЗВЫЧАЙНЫХ СИТУАЦИЙ

PREDICTING INFILTRATION FEATURES ON THE TERRITORIES SUBMERGED AS A RESULT OF EXTREME SITUATION

Рассматривается процесс проникновения жидкости с поверхности земли в грунт при постоянном напоре. В исследовании принята модель идеального грунта. Проникновение жидкости рассматривается как движение капли переменной массы. Подробно исследуется начальный момент движения жидкости.

Ключевые слова: *инфильтрация, переменная масса жидкости, модель идеального грунта.*

The article discusses the process of liquid penetration of the surface of the earth into soil at a constant pressure. The ideal soil model is adopted in the study. The penetration of liquid is considered as a movement of a drop with variable mass. The initial moment of fluid motion was studied in detail.

Key words: *infiltration, variable mass of liquid, ideal soil model.*

Рассмотрим динамику проникновения жидкости в грунт при наличии постоянного слоя её на поверхности грунта.

В качестве модели грунта обычно используются следующие модели:

- модель сплошной среды, введенная Н.Е. Жуковским и Н.Н. Павловским;
- модель фиктивного грунта, состоящего из шаров равного диаметра, предложенная Ч. Слихтером;
- модель идеального грунта, состоящего из цилиндрических трубок с параллельными осями, которую использовал Л.С. Лейбензон для исследования зависимости скорости фильтрации от свойств жидкости и грунта.

Само наличие нескольких моделей свидетельствует как о сложности процесса фильтрации, так и о том, что с помощью частной модели могут решаться те задачи, для которых она создана.

Все эти модели используют уравнение неразрывности потока.

Однако в природе существуют и такие процессы, в которых участвуют конечные массы жидкости. К ним можно отнести и процесс инфильтрации жидкости с поверхности в глубь грунтового массива.

Пусть на поверхности грунта находится вода (жидкость) слоем толщиной Δ, которая инфильтрует вглубь под действием силы тяжести. Толщина слоя жидкости на поверхности остается постоянной. Эти условия примерно соответствуют полевым определениям коэффициента фильтрации по способу Г.Н. Каменского или Н.С. Нестерова.

В качестве модели грунта возьмем модель идеального грунта с вертикальными цилиндрическими круговыми порами диаметром d. Будем исследовать процесс проникновения жидкости в пору.

Ось y направим вниз, а началом отсчета будем считать поверхность грунта.

Будем считать, что часть жидкости над порой движется вместе с жидкостью в поре. Они образуют жидкий цилиндр высотой $\Delta + y$ и диаметром d. По мере проникновения в пору масса цилиндра возрастает за счет присоединения частиц с поверхности. Присоединяющиеся частицы движутся нормально к оси y.

На жидкий цилиндр, движущийся в поре, действуют силы:

• сила тяжести $Fg = g\rho \frac{\pi d^2}{4}(\Delta + y)$;

• силы вязкого трения, которые в общем случае можно представить в виде суммы двух составляющих, одна из которых - $T1$ - пропорциональна первой степени скорости, а вторая – $T2$ пропорциональна квадрату скорости [1]. Они также пропорциональны площади контакта жидкого цилиндра со стенками поры.

$$T1 = R1\pi dy \cdot \frac{dy}{dt} ,$$

$$T2 = R2\pi dy \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 .$$

Коэффициенты $R1$ и $R2$ учитывают как свойства жидкости, так и свойства грунта.

На жидкий цилиндр, поскольку движение его не стационарно, действуют и силы инерции.

Поскольку масса цилиндра изменяется по мере проникновения жидкости в пору, будем рассматривать её (массу цилиндра) как материальную точку переменной массы.

Для определения силы инерции используем второй закон Ньютона в такой формулировке:

$$Fi = \frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right) .$$

Масса $m = \rho \dfrac{\pi d^2}{4}(\Delta + y)$,

$$Fi = \frac{d}{dt}\left(\rho \frac{\pi d^2}{4}(\Delta + y)\frac{dy}{dt} \right).$$

Дифференцируя по времени, получим:

$$Fi = \rho \frac{\pi d^2}{4}(\Delta + y)\frac{d^2 y}{dt^2} + \rho \frac{\pi d^2}{4}\left(\frac{dy}{dt} \right)^2.$$

Составим уравнение движения жидкого цилиндра переменной массы:

$$Fi + T1 + T2 = Fg \quad . \tag{1}$$

Подставив выражения для действующих сил в (1), получим:

$$\rho \frac{\pi d^2}{4}(\Delta + y)\frac{d^2 y}{dt^2} + \rho \frac{\pi d^2}{4}\left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + R1\pi d \cdot \frac{dy}{dt} + R2\pi d \cdot \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = g\rho \frac{\pi d^2}{4}(\Delta + y) \cdot \tag{2}$$

Разделив правую и левую части уравнения (2) на массу, что можно сделать, поскольку она всегда отлична от нуля, получим:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \cdot \frac{1}{\Delta + y} + \frac{4R1}{\rho d}\frac{dy}{dt} \cdot \frac{y}{\Delta + y} + \frac{4R2}{\rho d}\left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \cdot \frac{y}{\Delta + y} = g \; . \tag{3}$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. В нем явно не присутствует переменная t, и, следовательно , оно допускает понижение порядка.

Введем новую переменную $p(y) = \dfrac{dy}{dt}$.

Тогда $\dfrac{d^2 y}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dt} \right) = \dfrac{pd}{dt} = \dfrac{pd}{dy}\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{pd}{dy}p$.

Подставив данное выражение в уравнение (3), получим:

$$\frac{pd}{dy}p + \frac{p^2}{\Delta + y} + \frac{4R1}{\rho d} \cdot p \cdot \frac{y}{\Delta + y} + \frac{4R2}{\rho d} \cdot p^2 \cdot \frac{y}{\Delta + y} = g \; . \tag{4}$$

Получили уравнение первого порядка, т.н. уравнение Абеля второго порядка класса В.

Исследуем решение на границах интервала.

Пусть y достаточно велико и $\Delta \ll y$. Тогда силами инерции можно пренебречь и $\dfrac{y}{\Delta + y} \approx 1$. Уравнение (4) запишется так:

$$\frac{4R1}{\rho d} \cdot p + \frac{4R2}{\rho d} \cdot p^2 = g \; .$$

Получено общее уравнение инфильтрации под действием гравитационных сил.

Предположим, что имеет место линейная фильтрация – закон Дарси, который записывается как $v = kI$. Здесь $I = 1$, градиент, $k -$ коэффициент фильтрации. То есть скорость течения в поре будет равняться истинной скорости течения, $p = \dfrac{k}{m}$, где $m -$ пористость.

Для рассматриваемого случая уравнение инфильтрации запишется так:

$$\frac{4R1}{\rho d} \cdot \frac{k}{m} = g; \text{ откуда } \frac{4R1}{\rho d} = \frac{mg}{k}.$$

Если же имеет место квадратичная инфильтрация, то скорость инфильтрации определяется законом Краснопольского $v = k\sqrt{I}$.

Или $v^2 = k^2 I$, $p^2 = \left(\dfrac{k}{m} \right)^2$.

Из уравнения $\dfrac{4R2}{\rho d} \cdot p^2 = g$ найдем

$$\frac{4R2}{\rho d} = g\left(\frac{m}{k} \right)^2 .$$

Подставим найденные значения сил сопротивления в уравнение движения (4):

$$\frac{dp}{dy}p + \frac{p^2}{\Delta + y} + r1 \cdot \frac{gm}{k} \cdot p \cdot \frac{y}{\Delta + y} + r2 \cdot \left(\frac{m}{k} \right)^2 \cdot g \cdot p^2 \cdot \frac{y}{\Delta + y} = g \cdot \tag{5}$$

Теперь исследуем уравнение движения при малых значениях y .

Предположим, что $y \ll \Delta$ и имеет место квадратичная инфильтрация. При этих предположениях уравнение(5) запишется так:

$$\frac{dp}{dy}p + \frac{p^2}{\Delta} + \left(\frac{m}{k} \right)^2 \cdot g \cdot p^2 \cdot \frac{y}{\Delta} = g. \tag{6}$$

В начальный момент влияние присоединенной массы на движение невелико и им можно пренебречь. Тогда уравнение движения будет:

$$\frac{dp}{dy}p + \left(\frac{m}{k} \right)^2 \cdot g \cdot p^2 \cdot \frac{y}{\Delta} = g. \tag{7}$$

Обозначим $r = \left(\dfrac{m}{k} \right)^2 \cdot \dfrac{g}{\Delta}$.

И тогда
$$\frac{dp}{dy}p + r \cdot p^2 \cdot \frac{y}{\Delta} = g. \tag{8}$$

При начальной скорости $v(0) = v0$,или $p(0) = v0$ уравнение (8) имеет решение вида:

$$p^2 = \frac{\dfrac{g\sqrt{\pi} * erf(\sqrt{-r} \cdot y}{\sqrt{-r}} + v0^2}{\exp(ry^2)} \quad . \qquad (9)$$

Численный эксперимент показал, что скорости инфильтрации и ускорения быстро меняются. Эпюры скоростей и ускорения представлены на рис. 1.

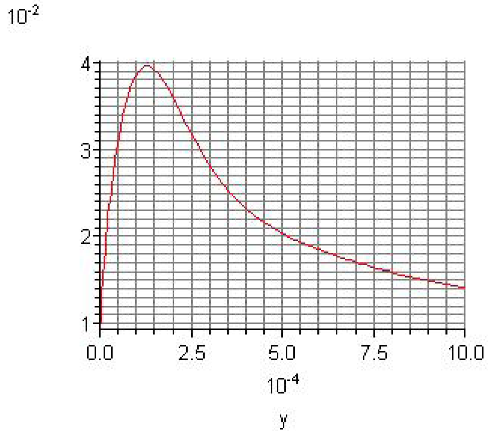

Рис. 1

Из рисунка видно, что при глубине проникновения свыше 1 мм влияние ускорения становится малым и им можно пренебречь, а для расчета скоростей будем использовать упрощенное уравнение движения (5) в общем виде:

$$\frac{p^2}{\Delta + y} + r1 \cdot \frac{mg}{k} \cdot p \cdot \frac{y}{\Delta + y} + r2 \cdot \left(\frac{m}{k}\right)^2 \cdot g \cdot p^2 \cdot \frac{y}{\Delta + y} = g \cdot \qquad (10)$$

А для ламинарного движения

$$\frac{p^2}{\Delta + y} + \frac{mg}{k} \cdot p \cdot \frac{y}{\Delta + y} + = g \quad . \qquad (11)$$

Если же в вышерассмотренных уравнениях заменить Δ на $\Delta - my$, то будет иметь место случай впитывания воды в грунт. Именно он был исследован экспериментально [3].

Уравнение (11) является алгебраическим относительно скорости $p = \dfrac{dy}{dt}$.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{mgy - \sqrt{m^2 g^2 y^2 + 4g k^2 (\Delta + y)}}{2k} . \qquad (12)$$

Уравнение (12) интегрируется, но результат очень громоздкий и мы его не приводим.

Нами получены характеристики инфильтрации при постоянном напоре.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Полубаринова-Кочина, П.Я. Теория движения грунтовых вод [Текст] / П.Я. Полубаринова-Кочина. –М.:Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1952.- 678 с.
2. Пыхачев, Г.Б. Подземная гидравлика [Текст] / Г.Б. Пыхачев. -М.:Гостоптехиздат, 1961. - 387с.
3. Шабанов, В.А. Математическая модель распространения загрязняющих веществ в грунте [Текст] / В.А. Шабанов, Ю.М. Галмцкова // Известия научного центра Российской академии наук. - Т. 11, № 1(6) / Самарский научный центр Российской академии наук. – Самара, 2009.