УДК 624.15+531

Г.В. ПАВЛОВ

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры сопротивления материалов и строительной механики
Самарский государственный архитектурно-строительный университет

М.А. КАЛЬМОВА

ассистент кафедры сопротивления материалов и строительной механики
Самарский государственный архитектурно-строительный университет

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ БАЛКИ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ДВИЖЕНИЕМ КРУГЛОГО ДИСКА – ГРУНТОУПЛОТНИТЕЛЯ

VISCO-ELASTIC BEAM TRANSVERSE VIBRATIONS GENERATED BY ENERATED BY CIRCULAR DISC (SOIL COMPRESSOR) MOTIN

Решена новая задача о движении диска по реологической балке модели Кельвина. С применением энергетического варианта метода усреднения построены амплитудно-фазовые уравнения. Показана неустойчивость движения диска по балке.

Ключевые слова: *ядро релаксации, энергетический метод, энергия потенциальная, движение невозмущенное, малый параметр.*

A new problem for disk motion along Kelvin rheological beam is solved. Amplitude-phase equations are set up according to the energy type averaging method. Instability of the disc motion along the beam is shown.

Keywords: *relaxation kernel, energy method, potential energy, undisturbed motion, small parameter.*

Задача об устойчивости движения диска на релаксирующем основании тела Кельвина решалась в работах авторов [1,2], где моделями основания было деформируемое вязкоупругое полупространство, работающее на растяжение – сжатие [1], или балка с распределенной массой, совершающая продольные колебания, вызываемые движением диска [2]. Но деформации вязкоупругого основания носят локальный характер, занимая область в малой окрестности точки касания диска с основанием. Поэтому вязкоупругое полупространство может служить моделью при продольных колебаниях балки. Но при поперечных колебаниях локальные деформации вязкоупругого полупространства выступают всего лишь как перемещения относительные, т.е. неполно описывают влияние деформируемой балки на динамику диска. Поэтому вопрос об устойчивости движения диска при изгибных колебаниях реологической балки, по-видимому, остается открытым.

Для построения амплитудно-фазовых уравнений первого приближения для нестационарного процесса – поперечных колебаний балки, вызванных медленным движением диска и неконсервативной реологической силой реакции стержня, применим энергетический метод, который хорошо известен в уравнениях математической физики. Пусть механическая система «диск – реологическая балка» имеет следующие параметры: А – площадь поперечного сечения балки, удовлетворяющая определению длинного стержня; R – радиус круглого диска; Iz – момент инерции диска; ρ, E – плотность и модуль Юнга материала балки; J – момент инерции поперечного сечения балки относительно оси z (рис. 1); L – длина балки.

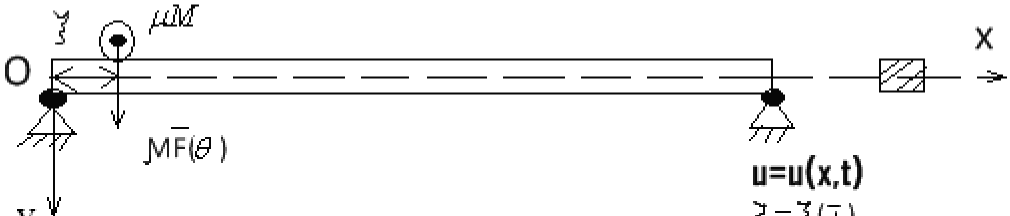

Рис. 1

Предположим, что масса диска μM по сравнению с массой балки М мала.

Влияние внешней нагрузки на стержень будем моделировать малой вертикальной периодической по θ силой $\mu F(\theta) = \mu F_0 \sin\theta$, приложенной в точке касания диска с балкой и обусловленной статической неуравновешенностью диска. Полагаем, что на некотором отрезке времени выполняется равенство, $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau) = \omega_1$ т.е. наблюдается главный резонанс.

Предварительно изложим методику нахождения потенциальной энергии стандартного наследственного материала балки. Напряженно-деформированное состояние балки определим выражением в интегральной релаксационной форме [3]:

$$\sigma_x(x,y,t) = E[\varepsilon_x(x,y,t) - \mu\int_0^t R(t-\tau)\varepsilon_x(x,y,\tau)dx], \quad (1)$$

где $\sigma_x(x,y,t)$ - нормальное напряжение в поперечном сечении балки на удалении x от левого края балки в точке на расстоянии y от нейтральной оси: $R(t-\tau) = \frac{E-\widetilde{E}}{nE} e^{\frac{-(t-\tau)}{n}}$ - ядро релаксации стандартного наследственного материала.

Здесь $E, \widetilde{E}$ - соответственно мгновенный и длительный модули упругости балки при растяжении; n – время релаксации; μ - малый положительный параметр.

Используя гипотезу плоских сечений, можно принять $\varepsilon_x(x,y,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} y$.

Тогда изгибающий момент в произвольном сечении балки определим по формуле

$$M = \iint\limits_{(A)} \sigma_x(x,y,t)y = EJ[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \mu\int_0^t R(t,\tau)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}d\tau], \quad (2)$$

где $J = \iint\limits_{(A)} y^2 dA$, а работа, производимая изгибающим моментом, будет равна потенциальной энергии

$$\Pi = EJ\int_\varphi^0 [\frac{\partial^2 u(x.t)}{\partial x^2} - \mu\int_0^t R(t-\tau)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}d\tau d\varphi(x,t).$$

Принимая во внимание, что тангенс угла наклона касательной к нейтральной оси равен $tg\varphi(x,t) \approx \varphi(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, а $d\varphi(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dx$, и, интегрируя по длине балки, запишем предыдущее равенство в виде:

$$\Pi = \frac{EJ}{2}\int_0^L [(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2})^2 - \mu\int_0^t R(t-\tau)(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2})^2 d\tau]dx.$$

При данных допущениях выражения для кинетической и полной потенциальной энергии запишем в виде

$$T = \frac{\rho A}{2}\int_0^L (\frac{\partial u(x,t)}{\partial t})^2 dx + \mu M(\frac{\partial u}{\partial t})^2|_{x=\xi} = T_0 + \mu T_1,$$

$$\Pi = \frac{TJ}{2}\int_0^L (\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2})^2 dx - \mu[Mgu(x,t) +$$

$$+\mu\frac{EJ}{2}\int_0^L [(\int_0^t R(t-\tau))(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2})^2 d\tau)dx - F_0\sin\theta u(x,t) +$$

$$+M\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}u(x,t)]\Big|_{x=\xi} = \Pi_0 + \mu\Pi_1.$$

При нахождении «возмущающей» кинетической энергии диска μT_1 энергией вращения диска как величиной второго порядка малости пренебрегаем, поэтому вопрос об ограничениях, наложенных на скорость точки касания, здесь не рассматривается.

Уравнение невозмущенного движения, описывающее собственные колебания балки, как известно, имеет вид

$$\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{EJ}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

Решение этого уравнения с граничными условиями, когда концы балки шарнирно закреплены, следующее:

$$u(x,t)\big|_{x=0} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Big|_{x=0} = u(x,t)\big|_{x=L} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Big|_{x=L} = 0. \quad (4)$$

Разыскивая решение дифференциального уравнения (3) по методу Фурье, запишем уравнение, определяющее собственные функции:

$$\frac{\partial^4 x}{\partial x^4} - k^4 x = 0, \text{ где } k^4 = \frac{\rho\omega^2 A}{EJ}. \quad (5)$$

Здесь ω – частота главного колебания.

Решение дифференциального уравнения (5) ищем в форме $X = Ce^{\lambda t}$, что приводит к характеристическому уравнению $\lambda^4 - k^4 = 0$ (6), корни которого $\lambda_{1,2} = \pm k$, $\lambda_{3,4} = \pm ik$. Общее решение уравнения (5) представим формулой

$$X(x) = C_1\sin kx + C_2\cos kx + C_3 Shkx + C_4 Chkx.$$

Постоянные интегрирования определим из граничных условий

$$X\big|_{x=0} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\Big|_{x=0} = X\big|_{x=L} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\Big|_{x=L} = 0.$$

В результате получаем частотное уравнение $\sin kL = 0$, корни которого имеют вид $k_n = \frac{n\pi}{L}$,

($n=\overline{1,\infty}$). Тогда формы нормальных колебаний невозмущенного движения представим равенством $X_n(x)=\varphi_n(x)=\sin(\frac{n\pi x}{L})$ ($n=\overline{1,\infty}$), а их собственных частоты $\omega_n=\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2}\sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$, $n=\overline{1,\infty}$.

В соответствии с методом асимптотических разложений [4] , первое приближение в режиме одночастотных колебаний, близком к первому нормальному колебанию, в случае главного резонанса ($\omega_1=\nu(\tau)$) запишем в виде

$$u^{(1)}=a\sin(\frac{\pi x}{L})\cos(\theta+\psi)\cdot \tag{7}$$

Найдем выражения для «возмущающей» потенциальной энергии $\mu\Pi_1(\tau,\theta,\frac{du}{dt},\frac{d^2u}{dt^2})$

в режиме синусоидальных колебаний:

$$u^{(1)}(t,x)=a\varphi^{(1)}(x)\cos(\theta+\psi),$$

$$\frac{\partial^2u^{(1)}}{\partial t^2}=-a\omega_1^2\varphi^{(1)}(x)\cos(\theta+\psi),$$

где $\varphi^{(1)}(x)=\sin\frac{\pi x}{L}\cdot$

В результате для модели стандартного наследственного тела Кельвина получим:

$$\mu\Pi_1^{(1)}=\mu a\cos(\theta+\phi)[(1-e^{-\frac{t}{n}})(E-\tilde{E})J\cdot a\cos(\theta+\psi)$$

$$\int_0^L(\frac{\partial^2\phi^{(1)}(x)}{\partial x^2})dx+(0,5F_0\sin\theta+M(L-\omega_1^2))\varphi^{(1)}(x)]. \tag{8}$$

Варьируя выражения возмущающей потенциальной энергии (8) по амплитуде и фазе первого нормального колебания и затем, усредняя по полной фазе за цикл колебания, получим

$$\delta\bar{\Pi}_1^{(1)}=\frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta\Pi_1^{(1)}d(\theta+\psi)=-0,5\mu[\frac{a^2}{2}(1-e^{-\frac{t}{n}})(E-\tilde{E})J\frac{\pi^4}{L^3}\delta a+$$

$$+F_0\sin\frac{\pi x}{L}(a\delta\psi\cos\psi+\delta a\sin\psi)+M\omega_1^2\sin^2\frac{\pi x}{L}a\delta a]_{|x=\xi}.$$

Найдем «частные производные»

$$\frac{\delta\bar{\Pi}_1^{(1)}}{\delta\psi}=-0,5\mu aF_0\cos\psi\sin\frac{\pi\xi}{L},$$

$$\frac{\delta\bar{\Pi}_1^{(1)}}{\delta a}=-\mu[a^2(1-e^{-\frac{t}{n}})(E-\tilde{E})\frac{J\pi^4}{4L^3}+0,5aM\omega_1^2\sin^2\frac{\pi\xi}{L}+0,5F_0\sin\frac{\pi\xi}{L}\sin\psi].$$

Теперь запишем амплитудно-фазовые уравнения

$$\frac{da}{dt}=-\frac{2\mu}{m_1\omega_1}F_0\cos\psi\sin\frac{\pi\xi}{L},$$

$$\frac{d\psi}{dt}=\omega_1-\nu-\frac{2\mu}{m_1\omega_1 a}[\frac{a^2(1-e^{-\frac{t}{n}})(E-\tilde{E})J\pi^4}{4L^3}+$$

$$+0,5aM\omega_1^2\sin^2\frac{\pi\xi}{L}+0,5F_0\sin\frac{\pi\xi}{L}\sin\psi],$$

где $m_1=\rho A\int_0^L\sin^2\frac{\pi x}{L}dx=\frac{\rho AL}{2}\cdot$ (9)

Замечаем, что реологические свойства стержня влияют только на изменение фазы колебаний. Уравнения (9) были проинтегрированы при следующих числовых параметрах: $F_0=1H$, $\xi=\nu t$ см, $L=100$ см, $J=\frac{bh^3}{12}=50$ $см^4$, $E=1\frac{H}{м^2}$, $\tilde{E}=0.7E\frac{H}{м^2}$, $\rho=0.05$ $\frac{кг}{м^3}$, $n=50$ с, $\nu=14-0.01\mu t$, $\omega_1=\frac{\pi^2}{\alpha^2}\sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}=13,2\frac{рад}{с}$, $A=0,1$ $м^2$, $M=80$ $кг$.

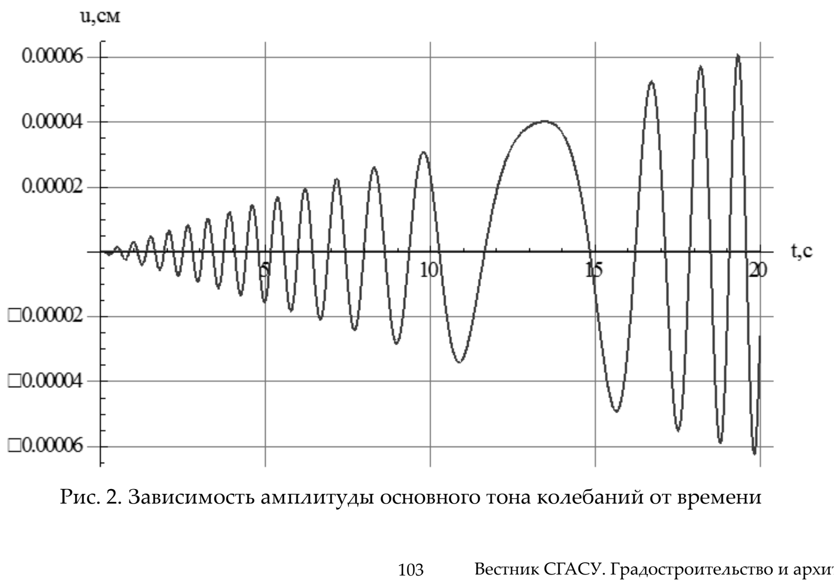

Рис. 2. Зависимость амплитуды основного тона колебаний от времени

На рис. 2 показано, что движение диска по вязкоупругой балке в режиме нестационарных колебаний носит явно резонансный характер и движение диска неустойчиво.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Специфика движения диска на реологическом основании [Текст] / Г.В. Павлов, М.А. Кальмова // Вестник Томского госуниверситета. Математика и Механика.- 2012. - №3 (19). – С.68-78.

2. Моделирование силового взаимодействия движущегося диска - грунтоуплотнителя по реологической балке с распределенной массой [Текст] / Г.В. Павлов, М.А. Кальмова // Вестник Московского государственного строительного университета. – 2012. – №7. - С.60-65.

3. Аналитичка динамика (механика) дискретных наследних систем [Текст] / О.А. Горошко, К. Хедрих // На сербск. Издавачка Университета у Нишу. – 2000. – 429 с.

4. Асимпототические решения уравнений в частных проиводных [Текст] / Ю.А. Митропольский, Б.И. Мосеенков. – Киев: Вища школа, 1976. – 589 с.