

Е.А. КРЕСТИН

## ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ЗАЗОРОВ БЕСКОНТАКТНЫХ УПЛОТНЕНИЙ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ИЗМЕНЕНИИ ДАВЛЕНИЯ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ РАСХОДА УТЕЧЕК ЖИДКОСТИ

DYNAMIC CALCULATION OF NON-CONTACT SEALS GAPS AT PULSE PRESSURE CHANGES DURING LEAKAGE FLOW RATING

Определение расхода утечек жидкости через щелевые кольцевые зазоры в динамических исследованиях приводит к расхождению теоретических и экспериментальных результатов. Особенно это расхождение велико при нестационарных процессах в гидравлических системах. Найдены динамические характеристики кольцевых уплотнительных щелей бесконтактных уплотнений при типовом единичном импульсном воздействии давления. Найден профиль скорости в зазоре, определен расход утечек, вычислена сила вязкого трения на стенке канала, рассмотрено релаксационное течение, определена весовая функция уплотнительной щели.

**Ключевые слова:** нестационарные процессы, единичная импульсная функция давления, бесконтактные уплотнения, релаксационное движение, весовая функция уплотнительной щели, расход утечек жидкости.

Исследования по определению величины расхода утечек жидкости через щелевые зазоры в динамических исследованиях приводят к расхождению теоретических и экспериментальных результатов [1-24]. Особенно это расхождение велико с существенно нестационарным режимом работы гидравлических систем [1-5].

В настоящей работе рассмотрен переходный процесс течения жидкости в канале с постоянной величиной зазора при  $\delta$ -образном изменении перепада давления.

Рассмотрим плоскопараллельный канал, заполненный рабочей жидкостью. Предположим, что на вход в канал подан перепад давления в виде единичного импульса.

В момент времени  $t < 0$  в канале было течение с паузейлевским профилем скорости, затем произошел  $\delta$ -образный скачок перепада давления. После этого скачка перепад давления вернулся к прежнему значению. Но жидкость в канале приобрела импульс и релаксирует к тому же течению, которое имело место до мгновенного  $\delta$ -образного скачка давления.

Detection of leakage flow through slotted annular gaps in dynamic studies leads to the discrepancy between theoretical and experimental results. This discrepancy is particularly large for non-stationary processes in hydraulic systems. Dynamic characteristics of annular sealing cracks of contactless seals in a typical single pulse action of pressure are found. The velocity profile in the gap is viewed, leakage flow is rated, the force of viscous friction at the channel wall is calculated, the relaxation current is considered, the weight function of the sealing gap is determined.

**Key words:** nonstationary processes, unit impulse function of pressure, contactless seals, relaxation movement, tweight function of sealing gap, leakage flow.

Качественный вид импульсной функции  $f(t)$  изображен на рис. 1.

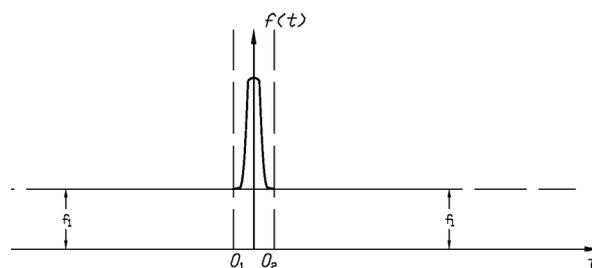


Рис. 1. График функции давления при единичном импульсном воздействии

Математическая формулировка краевой задачи с начальными данными имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(t). \quad (1)$$

$$u\left(\frac{h}{2}\right) = u\left(-\frac{h}{2}\right) = 0. \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = \frac{f_1}{2\nu} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (3)$$

Предельным режимом течения, к которому будет стремиться переходный режим, является распределение (3).

Функцию  $f(t)$  можно представить в следующем виде:

$$f(t) = f_1 + A\delta(t), \quad (4)$$

где  $f_1, A$  - константы.

Смысл  $f_1$  ясен из рис. 1. Постоянная  $A$  имеет геометрический смысл площади под максимумом. Физический ее смысл – импульс, сообщенный единице массы жидкости в результате ударного изменения перепада давления. Функция  $\delta(t)$  – дельта-функция Дирака, являющаяся обобщенной функцией. Основные ее свойства: четность и единичная нормировка:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Задачу (1) - (3) решаем методом преобразования Лапласа по времени  $t$ . Домножим уравнение (1) на  $\exp(-pt)$ , где  $p$  – параметр, и проинтегрируем по  $t$  от  $0_-$  до  $+\infty$ . Введем обозначение для изображения продольной скорости

$$W(y, p) = \int_0^{\infty} u(y, t) e^{-pt} dt. \quad (5)$$

Скорость, как физическая величина, испытывает конечные изменения. Поэтому нижний предел в уравнении (5)  $0_-$  можно заменить на нижний предел 0.

Для изображения левой части уравнения (1) запишем изображения правой части [6] в виде

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} (f_1 + A\delta t) e^{-pt} dt = \frac{f_1}{p} + A. \quad (6)$$

В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение для изображения

$$v \frac{d^2 W}{dy^2} - pW = \frac{f_1}{2v} \left( y^2 - \frac{h^2}{4} \right) - \frac{f_1}{p} - A \quad (7)$$

с граничными условиями

$$W\left(\frac{h}{2}, p\right) = W\left(-\frac{h}{2}, p\right) = 0. \quad (8)$$

Решение уравнения (7)

$$W = C_1 e^{y\sqrt{p/v}} + C_2 e^{-y\sqrt{p/v}} + \frac{f_1}{2vp} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) + \frac{A}{p} -$$

есть сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного.

Удовлетворяя граничным условиям (8), получим:

$$W = \frac{A}{p} \left( 1 - \frac{ch \cdot y \sqrt{p/v}}{ch \cdot h/2 \sqrt{p/v}} \right) + \frac{f_1}{2vp} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (9)$$

Чтобы определить теперь профиль скорости  $u(y, t)$ , следует найти оригинал [7] по изображению (9)  $W(y, p)$ :

$$u(y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} W(y, p) e^{pt} dp, \quad (10)$$

где  $C$  лежит правее всех особых точек  $W(y, p)$  в комплексной плоскости параметра  $p$ . Особыми точками изображения (9) являются простые полюса (нули  $ch \cdot h/2 \sqrt{p/v}$ ):

$$p_k = -\frac{v}{h^2} \pi^2 (1 + 2k)^2 \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

и  $p_* = 0$ . Поскольку все полюса  $W(y, p)$  – простые и  $W(y, p)$  – мероморфная функция комплексного переменного  $p$ , можно разложить ее в бесконечный ряд простых дробей:

$$W(y, p) = \frac{C_k}{p} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{p - p_k}. \quad (12)$$

Определяем  $C_*$  в виде

$$C_* = \frac{f_1}{2v} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (13)$$

Коэффициенты  $C_k$  вычисляются с помощью стандартной техники теории вычетов [7-9]:

$$C_k = \frac{\pi}{2} (-1)^k \frac{A}{k + 1/2} ch \pi i \left( k + 1/2 \right) \frac{2y}{h}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (14)$$

Суммируя вычеты (13) и (14), получим следующее выражение для скорости ( $u(y, t)$ ):

$$u(y, t) = \frac{f_1}{2v} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) + \frac{2A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k + 1/2} \cos \left[ \pi \left( k + 1/2 \right) \frac{2y}{h} \right] e^{-4t^2 \frac{v^2}{h^2} \left( k + 1/2 \right)^2}. \quad (15)$$

Формула (15) определяет профиль скорости  $u(y, t)$  переходного процесса. Существенным характером этой формулы является наличие скачка профиля скорости в момент времени  $t = 0$  ударного изменения давления. Математически это выражается следующим образом:

$$u(y, t)|_{t=0-} \neq u(y, t)|_{t=0+}.$$

В самом деле, до ударного воздействия давления профиль скорости имел вид

$$u(y, t)|_{t=0-} = \frac{f_1}{2\nu} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

- начальное распределение. Чтобы получить  $u(y, t)|_{t=0+}$ , необходимо положить  $t = 0$  в формуле (15). В результате получим:

$$u(y, 0_+) = \frac{f_1}{2\nu} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) + \frac{2A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k + 1/2} \cos \left[ \pi \left( k + \frac{1}{2} \right) \frac{2y}{h} \right].$$

Используя формулу из работы [6]

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(2k + 1)x}{2k + 1} = \frac{\pi}{4}, \quad (x \neq \pm \pi/2),$$

получим

$$u(y, 0_+) = \frac{f_1}{2\nu} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) + A, \quad (y = \pm h/2).$$

Таким образом, мгновенный импульс, переданный жидкости вследствие  $\delta$ -образного изменения давления, сопровождается скачком профиля скорости:

$$\text{при } (y \neq \pm h/2) \quad u(y, 0_+) - u(y, 0_-) = A; \quad (16)$$

$$\text{при } (y = \pm h/2) \quad u(y, 0_+) - u(y, 0_-) = 0 - 0 = 0.$$

Это имеет место в силу граничных условий.

Рис. 2 можно объяснить таким образом: в момент времени  $t = 0$  произошел скачок в профиле скорости, причем такой, что новый профиль  $u(y, 0_+)$  имеет разрывы на стенках канала:

$$u(\pm h/2, 0_+) = 0,$$

но

$$\lim u(y, 0_+) = A \neq 0.$$

Таким образом, скачкообразное изменение  $u(y, t)$  по времени сопровождается разрывом по координате  $y$  на стенках канала. Такой двойной скачок (по  $t$  и по  $y$ ) или двойной разрыв обусловлен сохранением граничных условий на стенках. В дальнейшем момент времени этот скачок вблизи стенок канала сглаживается вследствие вязкости и диссипативных процессов в жидкости.

Такое распределение показано на рис. 2, в. При  $t \rightarrow +\infty$  профиль становится таким же, каким он был до удара.

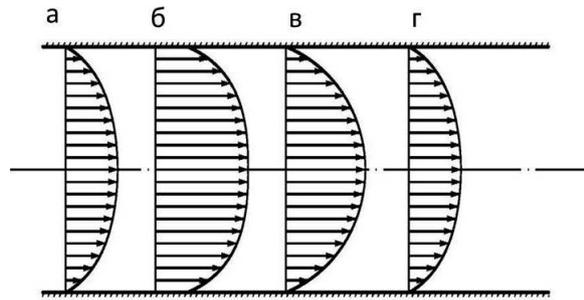


Рис. 2. Качественный вид профиля скорости в канале;  $f_1$  и  $A$  имеют одинаковые знаки:

а -  $t \leq t_0$ ; б -  $t = t_0+$ ; в -  $t < 0$ ; г -  $t \rightarrow +\infty$

Величина расхода определяется интегрированием (15) по  $y$  от  $-h/2$  до  $h/2$ :

$$Q(t) = \frac{f_1 h^3}{12\nu} + \frac{2}{\pi^2} A \cdot h \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k + 1/2)^2} e^{-4\pi^2 \frac{\nu t}{h^2} (k + 1/2)^2}. \quad (17)$$

Из формулы (17) следует, что расход также является разрывной функцией времени:

$$Q(0_-) = \frac{f_1 h^3}{12\nu};$$

$$Q(0_+) = \frac{f_1 h^3}{12\nu} + A \cdot h.$$

Таким образом, в момент ударного воздействия давления расход испытывает скачок (разрыв), равный

$$Q(0_+) - Q(0_-) = A \cdot h.$$

Если удар давления направлен "против" Пуазейлевского течения, то при достаточно сильном ударе (т.е. при достаточно большом  $A$ ) расход может обратиться в нуль в некоторый момент времени  $t = t_{**}$  (рис. 3).

Если в начальный момент жидкость покоилась, т.е.  $f_1 = 0$ , то

$$\bar{Q} = \omega(t) = \frac{Q(t)}{A \cdot h} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k + 1/2)^2} e^{-4\pi^2 \frac{\nu t}{h^2} (k + 1/2)^2}. \quad (18)$$

В результате получаем весовую функцию (рис. 4) уплотнительной щели [10].

Найдем напряжение силы трения на стенке из выражения (15):

$$\tau = -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=h/2} = \frac{\rho f_1 h}{2} + \frac{4\mu A}{h} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-4\pi^2 \frac{\nu t}{h^2} (k + 1/2)^2}.$$

Умножая напряжение трения, которое не зависит от координаты  $x$ , на длину канала  $l$ , получим силу трения:

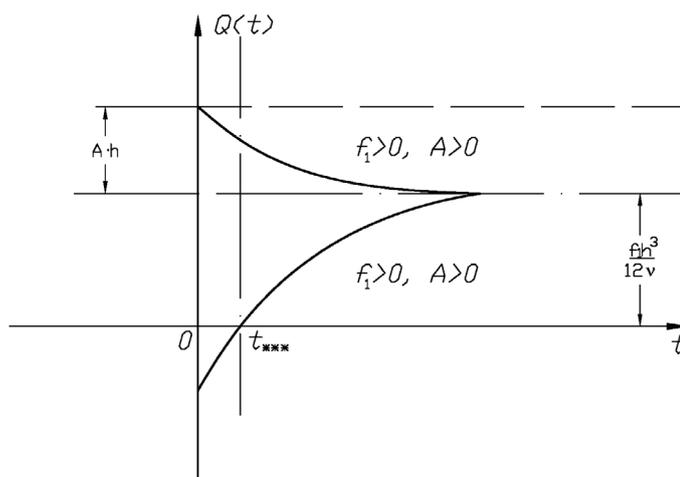


Рис. 3. График зависимости расхода жидкости как функция времени

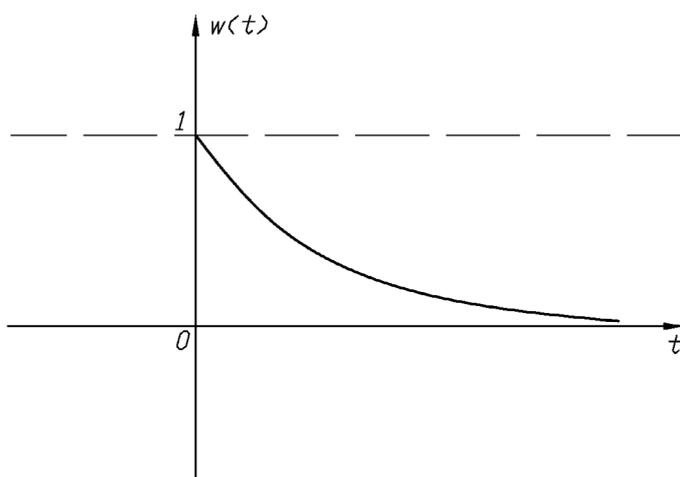


Рис. 4. График весовой функции уплотнительной щели

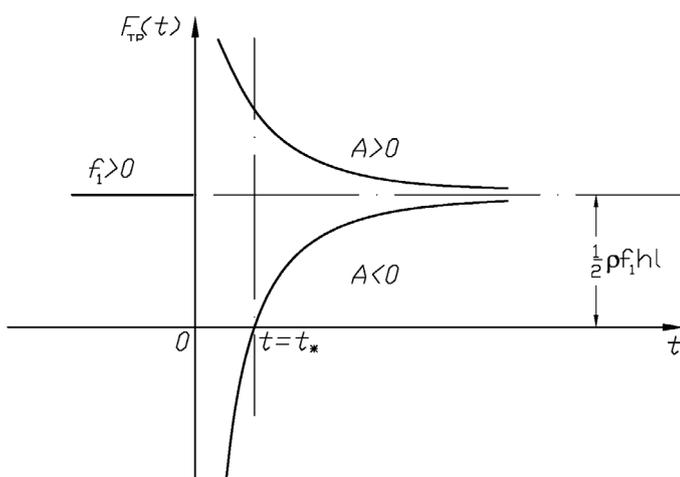


Рис. 5. Качественный вид зависимости силы трения от времени

$$F_{mp} = \frac{1}{2} \rho f_1 h l + 4 \mu A \frac{l}{h} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-4\pi^2 \frac{vt}{h^2} (k+\frac{1}{2})^2}. \quad (19)$$

Из формулы (19) следует, что сила трения в момент ударного воздействия давления обращается в бесконечность.

Из начальных условий и соотношения (19) получим

$$F_{mp}(0_-) = \frac{1}{2} \rho h f_1 l;$$

$$F_{mp}(0_+) = \frac{1}{2} \rho h f_1 l + 4 \mu A \frac{l}{h} \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty;$$

$$F_{mp}(0_+) - F_{mp}(0_-) = \infty.$$

На рис. 5 показано изменение силы трения по времени.

Если знаки величин  $f_1$  и  $A$  различны, например,  $f_1 > 0, A < 0$  (рис. 5), то сила трения в некоторый момент времени  $t = t_*$  обратится в нуль вне зависимости от “мощности” удара давления  $A$ . В этом случае профиль скорости показан на рис. 6.

Скорость в центре канала может стать равной нулю только при достаточно сильном ударе давле-

ния, направленном “против” пуазейлевского течения

$$h^2 f_1 / 8\nu + A \leq 0.$$

Если имеет место неравенство, то в некоторый момент  $t = t_{**} > 0$  скорость в центре канала обратится в нуль. При этом

$$t_{**} < t_{***} < t_*. \quad (20)$$

Следует отметить, что эволюция профиля скорости не обязательно проходит ту же последовательность стадий, которая изображена на рис. 6. Последовательность стадий зависит от безразмерного отношения

$$\lambda = \frac{\nu |A|}{f_1 h^2}.$$

Рис. 6 приблизительно соответствует случаю и  $t_{***} \cong 0_+$  и  $\lambda \cong 1/12$ . Неравенство (20) выполняется при малых  $t_{**} \ll t_0 = h^2 / \pi^2 \nu$ , т.е. при  $\lambda \gtrsim 1/8$ .

Если же  $\lambda \gg 1$ , то последовательность стадий определяется неравенством  $t_* < t_{**} < t_{**}$  (рис. 7).

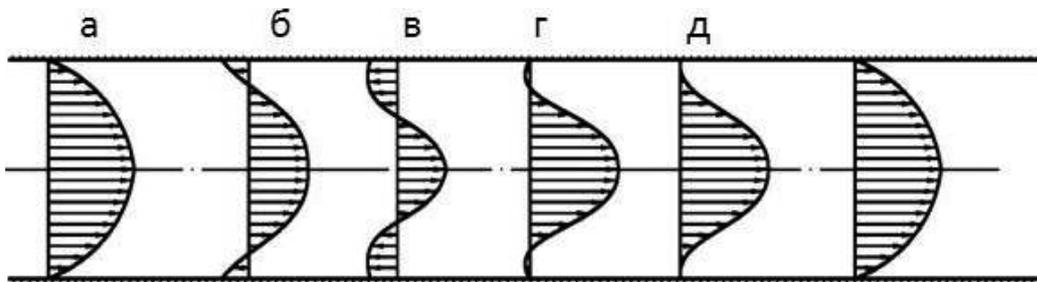


Рис. 6. Качественный вид профиля скорости в канале,  $f_1$  и  $A$  имеют разные знаки:  
а -  $t \leq t_0, t \rightarrow +\infty$ ; б -  $t = 0, v - t > 0, t = t_{**}$ ; г -  $t_{**} < t < t_*$ ; Д -  $t = t_*$

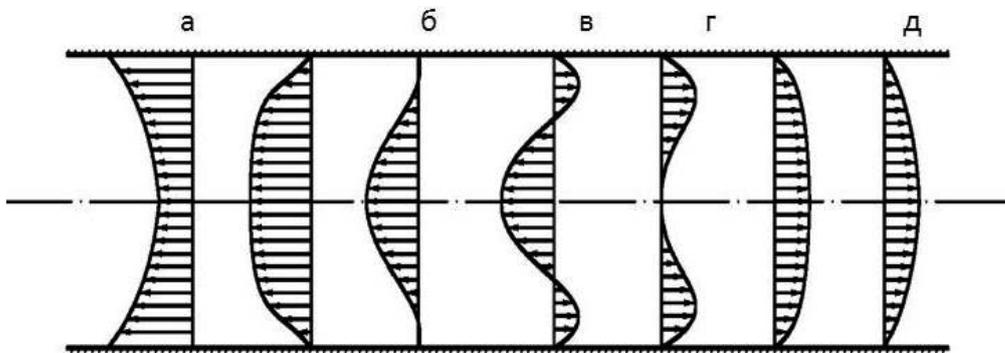


Рис. 7. Эволюции профиля скорости при  $\lambda > 1$ :  
а -  $t = 0_+$ ; б -  $t = t_*$ ; в -  $t = t_{**}$ ; г -  $t = t_{**}$ ; Д -  $t = 0$ ;  $t \rightarrow +\infty$

При этом

$$\begin{aligned} t_* &= \frac{h^2}{v\pi^2} \ln 8 \frac{v|A|}{f_1 h^2} = t_0 \ln 8\lambda; \\ t_{**} &= t_0 \ln \frac{32}{\pi} \lambda; \\ t_{***} &= t_0 \ln \frac{96}{\pi^2} \lambda. \end{aligned} \quad (21)$$

**Выводы.** Основным результатом работы является формула (15), которую можно представить в следующем виде:

$$u(y, t) = A \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) + B \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \cos \frac{y}{y_k} e^{-t/t_k},$$

где  $y_k = \frac{h}{(2k+1)\pi}$ ;

$$t_k = \frac{h^2}{(2k+1)^2 \pi^2 v} = \frac{y_k^2}{v} \quad - \text{соответственно}$$

спектр масштабов длины и спектр времени переходного процесса.

Таким образом, при импульсном изменении давления в канале индуцируется бесконечная сумма течений, каждая из которых затухает со своим собственным временем релаксации  $t_k$ . Значительно медленнее других затухает течение со временем релаксации  $t_0 = \frac{h^2}{\pi^2 v}$ , следующее  $t$  уже затухает за значительно меньшее время  $t_1 = \frac{h^2}{9\pi^2 v}$  и т.д.

Широко использованное в данной работе приближение, которое выполняется при не слишком малых временах, основано на том, что помимо стационарного течения учитывалось наибольшее медленное релаксирующее течение со временем затухания  $t_0$ . Это приближение справедливо для времен  $t \geq t_0$ , так как к этому времени течения с меньшими временами релаксации успеют затухнуть. Если бы необходимо было определить время  $t \geq t_1$ , нужно было бы удерживать вклад от течений  $C_k = 0, k = 1$  и т.д.

На основании интегральных характеристик расхода определены переходная и весовая функции уплотнительной щели, что соответствует переходным процессам в теории автоматического регулирования для типовых входных воздействий.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сосонкин В.Л. Динамический расчет кольцевых уплотнительных щелей // Вестник машиностроения. 1967. №1.
2. Крестин Е.А. Определение утечек жидкости через зазор бесконтактного уплотнения поршня гидравлического вибратора // Научное обозрение. 2014. №5.
3. Галицков С.Я., Дуданов И.В. Автоматизированный гидропривод поворотной платформы экскаватора // Труды секции «Строительство». Строительный вестник Российской инженерной академии. М., 2007. Вып. 8.
4. Лукс А.Л., Крестин Е.А., Шувалов М.В. Анализ влияния волнисто-шероховатой поверхности на гидравлическое сопротивление и теплопередачу при турбулентных течениях потока жидкостей в промышленных трубах // Вестник СГАСУ. Градостроительство и архитектура. 2013. Вып. № 1(9). С. 93-113.
5. Truesdell C., Noll W. The non-linear field theories of mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 2004. 627 p.
6. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТТЛ, 1955.
7. Крылов В.И., Скобля Н.С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М.: Наука, 1974.
8. Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1968.
9. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1967.
10. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1978.
11. Крестин Е.А. Снижение колебаний в предохранительных клапанах систем гидроприводов // Материалы 71-й Всероссийской научно-технической конференции по итогам НИР 2013 года / СГАСУ. Самара, 2014. С. 185-186.
12. Крестин Е.А. Гидравлический расчет гидромоторов // Материалы 71-й Всероссийской научно-технической конференции по итогам НИР 2013 года / СГАСУ. Самара, 2014. С. 187-188.
13. Крестин Е.А. Распределители жидкости систем гидроприводов // Материалы 71-й Всероссийской научно-технической конференции по итогам НИР 2013 года / СГАСУ. Самара, 2014. С. 188-189.
14. Крестин Е.А. Гидродинамический расчет бесконтактных уплотнений плунжерных пар // Научное обозрение. 2014. №10. С. 430-436.
15. Галицков С.Я., Дуданов И.В. Автоматизация динамических испытаний аксиально-поршневых гидромоторов // Всероссийская межвуз. научно-практ. конф. «Компьютерные технологии в науке, практике и образовании»: тез. докл. Самара: СамГТУ, 2003. С. 20-21.
16. Галицков С.Я., Дуданов И.В. Математическое моделирование гидравлических исполнительных систем экскаватора как объекта управления // Труды Международной науч.-техн. конф. «ИНТЕРСТРОИМЕХ-2005». Ч. 1. Тюмень: ТГНУ, 2005. С. 154-158.
17. Дуданов И.В. Стенд для исследования гидропривода грузоподъемной стрелы, оснащенного системой

автоматического управления, замкнутой по скорости // Материалы Международной науч.-техн. конф. «ИНТЕР-СТРОЙМЕХ-2007» / СГАСУ. Самара, 2007. С. 114-116.

18. Дуданов И.В. Автоматизация динамических испытаний гидрооборудования // Тезисы докл. на Международной научно-техн. конф. «Радиоэлектроника, электроника и энергетика». М.: МЭИ, 2004. С. 105.

19. Галицков С.Я., Дуданов И.В. Декомпозиция одного класса многомерных объектов управления // Труды секции «Строительство». Строительный вестник Российской инженерной академии. М., 2006. С. 186-191.

20. Галицков С.Я., Дуданов И.В. Одноковшовый гидравлический экскаватор как объект управления // Механизация строительства. 2008. №6. С. 9-10.

21. Гальперин Е.М., Лукс А.Л., Крестин Е.А. Сравнительный анализ отечественных и зарубежных методик расчета потерь напора в трубах кольцевой водопроводной сети // Вестник СГАСУ. Градостроительство и архитектура. 2012. Вып. №2(6). С. 80-85.

22. Галицков С.Я., Дуданов И.В. Автоматизированный гидропривод поворотной платформы экскаватора // Труды секции «Строительство». Строительный вестник Российской инженерной академии. Вып. 8. М., 2007. С. 80-87.

Об авторе:

**КРЕСТИН Евгений Александрович**

кандидат технических наук, профессор кафедры общей и прикладной физики и химии Самарский государственный архитектурно-строительный университет  
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 194,  
тел. (846) 339-14-76  
E-mail: git.2008@mail.ru

23. Лукс А.Л., Крестин Е.А., Шувалов М.В. Анализ влияния волнисто-шероховатой поверхности на гидравлическое сопротивление и теплопередачу при турбулентных течениях потока жидкостей в промышленных трубах // Вестник СГАСУ. Градостроительство и архитектура. 2013. Вып. № 1(9). С. 93-113.

24. Крестин Е.А. Определение утечек жидкости через зазор бесконтактного уплотнения поршня гидравлического вибратора // Научное обозрение. 2014. №5. С. 20-22.

25. Крестин Е.А. Нестационарные гидродинамические процессы в щелевых зазорах бесконтактных уплотнений при ступенчатом изменении давления // Вестник СГАСУ. Градостроительство и архитектура. 2015. Вып. № 1(18). С. 100-106.

© Крестин Е.А., 2015

**KRESTIN Evgeny**

PhD in Engineering, Professor of the of the General and Application-Oriented Physics and Chemistry Chair Samara State University of Architecture and Civil Engineering  
443001, Russia, Samara, Molodogvardeyskaya str., 194,  
tel. (846) 339-14-76  
E-mail: git.2008@mail.ru

Для цитирования: Крестин Е.А. Динамический расчет зазоров бесконтактных уплотнений при импульсном изменении давления при определении расхода утечек жидкости // Вестник СГАСУ. Градостроительство и архитектура. 2015. Вып. №2(19). С. 100-106. DOI: 10.17673/Vestnik.2015.02.16

For citation: Krestin E.A. Dynamic Calculation of Non-contact Seals Gaps at Pulse Pressure Changes During Leakage Flow Rating // Vestnik SGASU. Gradostroitelstvo i arhitektura [Vestnik of SSUACE. Town Planning and Architecture]. 2015. №2 (19). Pp. 100-106. DOI: 10.17673/Vestnik.2015.02.16 (in Russian)