УДК 624.072.31

DOI: 10.17673/Vestnik.2021.01.2

С. С. МОРДОВСКИЙ
А. А. КИСЕЛЁВА

ИСТОРИЯ ПОЯВЛЕНИЯ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА. ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

HISTORY OF THE APPEARANCE OF EULER'S FORMULA. ISSUES OF STABILITY OF COMPRESSED REINFORCED CONCRETE ELEMENTS

Представлен краткий обзор жизненного пути швейцарского математика и механика Леонарда Эйлера. Рассматривается история появления формулы для расчета устойчивости. Показаны варианты учета гибкости элемента в расчетах железобетонных конструкций, недостатки кривой Эйлера и особенности её применения применительно к конструкциям из высокопрочного бетона и бетона, твердеющего под давлением. Приведен пример результата использования в расчетах внецентренно сжатых железобетонных элементов нелинейной деформационной модели с введением в алгоритм расчета коэффициента, учитывающего влияние продольного изгиба (прогиба) элемента на его несущую способность.

Ключевые слова: *устойчивость, формула Эйлера, критическая сила, сжатые элементы, колонны, железобетон, строительные конструкции*

The article presents a brief overview of the life path of the Swiss mathematician and mechanic Leonard Euler, considers the history of the emergence of the formula for calculating stability, shows options for taking into account the flexibility of an element in the calculations of reinforced concrete structures, the disadvantages of the Euler curve and the features of its application in relation to structures made of high-strength concrete and concrete hardening under pressure. An example of the result of using a non-linear deformation model in the calculations of eccentrically compressed reinforced concrete elements with the introduction into the algorithm for calculating a coefficient that takes into account the effect of buckling (deflection) of an element on its bearing capacity is given.

Keywords: *stability, Euler formula, critical force, compressed elements, columns, reinforced concrete, building structures*

Леонард Эйлер родился в 1707 г. в семье Пауля и Маргариты Эйлер в селении Базель (в настоящее время город Базель в северо-западной части Швейцарии). Пауль Эйлер в своё время учился математическим наукам у Якоба Бернулли, что позволило дать сыну начальное образование дома [1]. Отец, являясь пастором, хотел, чтобы старший сын пошёл по его стопам и поэтому занимался с ним подготовкой к духовной карьере. В промежутках между занятиями в качестве развлечения и для развития логического мышления он проводил с сыном математические уроки, что дало свои плоды и Леонард рано стал проявлять математические способности.

Учась в гимназии, он продолжал с интересом изучать математику. Заметив успехи и увлечённость гимназиста, в 1720 г. его допустили к посещению публичных лекций в Базельском университете. В то время там трудился профессор Иоганн Бернулли – младший брат Якоба Бернулли. Знаменитый учёный обеспечил доступ одарённому гимназисту к научным трудам по математике, при этом предложив помощь в разборе сложных мест [1].

Практически вся жизнь Эйлера связана с математикой. Результаты его многолетнего труда описывались в многочисленных научных статьях, которые посмертно публиковались еще в течение почти сорока лет. Математический метод, который теперь называется вариационным исчислением, также является открытием Эйлера.

Важный результат, полученный Эйлером применительно к строительным конструкциям, сейчас называется формулой Эйлера для критической нагрузки потери устойчивости продольно сжатого стержня.

Эйлер не ставил себе задачу определения несущей способности сжатого стержня как конструкционного элемента. Он применил математический метод (позже вариационное исчисление) для определения наименьшей высоты тонкого вертикального стержня, при которой этот стержень начнет выпучиваться под собственным весом [2]. Понятия напряжения и деформации появились значительно позже этого события. Полученная формула [3, 4] носит имя Эйлера и имеет вид:

$$P = \pi^2 \cdot (E \cdot I/L^2), \qquad (1)$$

где P – величина нагрузки, при которой выпучивается стержень или панель; E – модуль упругости материала; I – момент инерции поперечного сечения стержня или панели; L – расчетная длина стержня.

Формула (1) применяется в нормативных документах [5, 6] по расчету железобетонных конструкций с тем различием, что изгибная жесткость в формулах норм определяется с учетом жесткостей применяемого бетона и арматуры и коэффициентов k_b и k_s.

Для стержня (системы) с малой гибкостью исчерпание несущей способности произойдет не по причине его выпучивания, а за счет потери прочности материалов в сечении элемента при сжатии. Выпучивание стержня или панели по сути является свидетельством потери устойчивости равновесия этими элементами. Для раскрытия такого понятия, как устойчивость существуют различные определения.

Большую часть своей сознательной жизни Эйлер провёл в России и оказал огромное влияние на становление российской науки [7]. Во времена Эйлера происходило активное становление Российского флота. И хотя уже к 1714 г. в России был свой собственный парусный флот, вопрос устойчивости судов на воде являлся актуальным. Самая большая судоверфь страны располагалась в Санкт-Петербурге, где жил и работал Эйлер, поэтому он не мог не принять участия в таком важном вопросе. Леонардом было дано следующее определение термина «устойчивость» применительно к плавательным средствам – «тела равновесное положение будет устойчиво, ежели оное тело, будучи несколько наклонено, опять справится».

Первые упоминания понятия устойчивости содержались в научных трудах Эйлера. Если перенести данный термин устойчивости, по Эйлеру, на упругие системы, то оно будет выглядеть примерно так: упругая система при заданных внешних силовых воздействиях будет находиться в устойчивом состоянии равновесия, если после кратковременного статического нагружения и последующего разгружения система возвращается к своему исходному состоянию. Если же такого не происходит, то исходное состояние равновесия системы считается неустойчивым.

Несколько позже вопросами устойчивости занимался учёный Жозеф Луи Лагранж. Он трактовал данное понятие применительно к упругим системам следующим образом: исходное состояние равновесия, в котором пребывает система, устойчиво, если после отклонения её от этого состояния она, предоставленная самой себе, стремится вернуться к первоначальному исходному состоянию равновесия, совершая малые затухающие со временем колебания при наличии сил внешнего и внутреннего сопротивления. Если малые возмущения вызывают динамические перемещения системы, лежащие в определенных пределах, то начальное состояние является устойчивым. При наличии устойчивости всегда можно подобрать такие начальные возмущения, чтобы при последующем движении системы перемещения её точек не вышли за некоторые наперед заданные границы. Такой подход к решению задачи устойчивости называют динамическим.

Частота собственных колебаний системы стремится к нулю при нарастании силы сжатия. При достижении этой силой некоторой величины движение становится апериодически неустойчивым.

Для консервативных (потенциальных) внешних сил величину критической нагрузки можно определить, приравняв к нулю частоту собственных колебаний системы. Эта нагрузка совпадает с эйлеровой. Работа консервативных сил зависит только от начального и конечного положений точек приложения и не зависит от траекторий перемещения этих точек.

Существует понятие бифуркации, которое обозначает два варианта развития предстоящих событий и применяется для определения происходящих изменений, перестроек. Применительно к конструкциям (системам) состояние бифуркации соответствует минимальному значению силы P, при котором система (стержень или панель) впервые не возвращается к исходному состоянию. При этой величине силы происходит нарушение единственности решения задачи, так как появляется отклонённая форма равновесия стержня наряду с исходной прямолинейной.

В трудах Н.В. Карнаухова и А.Ф. Смирнова [8] более полувека назад были введены понятия о состояниях стесненной и принужденной бифуркации отдельных частей конструкции, испытывающей общую потерю устойчивости. Длительное время эти понятия имели чисто качественное значение. Однако для определения вида бифуркации стержня в момент потери устойчивости не были указаны количественные признаки. Критерий, позволяющий определить вид бифуркации стержня, впервые был предложен совсем недавно в работах А.В. Александрова [9], А.В. Перельмутера и В.И. Сливкера [10].

Пластические деформации, возникающие в конструкциях от внешних нагрузок, не исчезают после разгрузки системы, и, как следствие, она не может вернуться в своё исходное состояние равновесия. Исходя из определений Эйлера любое равновесное состояние сжатой системы за пределом упругости является неустойчивым. С практической точки зрения такое допущение является абсурдным. Развивая теорию устойчивости сжатой системы за пределом упругости, В.Г. Зубчаниновым [11] предложено следующее определение: «состояние равновесия упругопластической системы является устойчивым, если она после статического приложения и последующего снятия малой возмущающей силы стремится вернуться в своё исходное состояние, пребывая в его малой окрестности» (11, с. 30).

Величина силы P, соответствующая состоянию бифуркации, может быть отличной от максимального значения действующей на конструкцию силы. Определить дальнейшее поведение системы (конструкции) за точкой бифуркации и утверждать об устойчивости или неустойчивости конструкции возможно только при исследовании послебифуркационного состояния.

Бифуркационная теория Эйлера при расчёте стержней и стержневых систем на устойчивость стала успешной, так как при достижении предельного значения прогибы катастрофически нарастают вплоть до разрушения без увеличения сжимающей нагрузки.

Быстрый рост прогибов после бифуркации наблюдается вначале также и для пластин [12] в некоторой окрестности исходного состояния. В тонких пластинах и панелях образуются и становятся заметными выпуклости. С ростом величины нагрузки в послебифуркационной стадии прогибы продолжают увеличиваться, но пластина остаётся в малой окрестности своего исходного плоского состояния до достижения предельного значения нагрузки.

У оболочек в послебифуркационном состоянии происходит резкое падение сжимающей нагрузки, и потому они весьма чувствительны к начальным несовершенствам.

Величины нагрузок, при которых происходит катастрофическое развитие перемещений и деформаций в системе, называют критическими или пределами устойчивости. Они соответствуют предельным точкам – точкам бифуркации Пуанкаре.

В предельных точках прогиб (перемещение) элемента резко возрастает:

$$fd/dP \to \infty. \qquad (2)$$

Данное условие (2) принимается за критерий неустойчивости при квазистатическом нагружении упругопластических систем.

Исследование послекритического поведения системы есть нелинейная задача. Своеобразие нелинейной задачи состоит в том, что здесь одной и той же системе нагрузок может соответствовать несколько различных деформированных состояний, одни из которых являются устойчивыми, а другие – неустойчивыми. При исследовании характера равновесных состояний нелинейных систем применяются те же критерии, что и для линейных систем: статический, энергетический и динамический. После выбора критерия необходимо выбрать определенный метод решения задачи: дифференциальное уравнение равновесия или движения заменяется уравнением в конечных разностях или интегральным – метод последовательных приближений, метод Бубнова-Галеркина, метод проб, метод оптимального программирования и т. д.

Работа систем (конструкций) в течение некоторого промежутка времени и при определённого рода нагрузках (например температурных) неразрывно связана с понятием ползучести материалов. Данное явление оказывает влияние на поведение систем при работе под нагрузкой, поэтому при формировании концепции устойчивости его необходимо учесть. Процесс нагружения систем может быть двух видов: мгновенный и растянутый во времени при постоянной внешней нагрузке, на котором и проявляется ползучесть.

Величина нагрузки Р в формуле (1), при которой выпучивается стержень или панель в нормах по железобетону [3, 4] носит название «условная критическая сила» и обозначается N_{cr}. Это предельное значение силы является бифуркационным, по достижении которого прогибы катастрофически нарастают и для их развития не требуется увеличение сжимающей нагрузки. То есть при этом значении происходит потеря устойчивости стержня и стержневой системы.

Каким образом было получено математическое выражение для определения условной критической силы, используемое в отечественных нормах проектирования железобетонных конструкций?

Формула для критической силы была выведена Эйлером на примере идеального прямого стержня постоянного поперечного сечения с шарнирными закреплениями концов. «Формула Эйлера справедлива при условии, что деформация сжатия стержня вплоть до момента потери устойчивости подчиняется закону Гука» [13]. Иными словами, критическое напряжение не должно превышать предела пропорциональности для данного материала.

Формула (1) и формула для условной критической силы N_{cr} в отечественных нормах проектирования [14] получены «на основании экспериментальных исследований шарнирно закрепленных стоек на кратковременное действие продольных сил с постоянными по длине стойки начальными эксцентриситетами» (15, с. 108). Изменения условий закрепления концов стойки и распределения начальных эксцентриситетов приведут к возникновению некоторой погрешности в запас прочности при определении расчетной длины стойки из классического расчета на устойчивость. При этом в формуле для определения условной критической силы N_{cr} в качестве изгибной жесткости $E \cdot I$ принимается усредненная жесткость колонны в предельной стадии [16]. Эта величина D определена путём анализа и обобщения многочисленных опытных данных со стойками длиной L, концы которых шарнирно закреплены. При этом начальный эксцентриситет по длине образца постоянен, а воздействие продольных сил является кратковременным.

Принятая в СНиП 2.03.01-84* и пособии к нему [14] «зависимость для определения N_{cr} железобетонного элемента содержит в себе некоторые коэффициенты, снижающие итоговое значение. Их использование обосновано для расчётов реальных конструкций» (17, с. 25). Однако для выявления сходимости результатов расчёта опытных образцов с реальными экспериментальными данными такой запас прочности не требуется, и формула для определения условной критической силы в [17] была принята по данным [18]. Она имеет вид:

$$N_{cr} = \frac{8 \cdot E_b}{(l_0)^2} \cdot \left[\frac{I}{\phi_l} \cdot \left(\frac{0{,}11}{0{,}1 + \frac{\delta_e}{\phi_\text{p}}} + 0{,}1\right) + \alpha \cdot I_s\right]. \quad (3)$$

В работе [19] разобраны примеры расчёта конструкций, приведенные в источниках [12, 14]. Расчёт производился по недеформированной схеме, влияние прогиба на несущую способность учитывалось с помощью коэффициента. Значения условной критической силы вычислялись по формулам из различных документов. Было выявлено, что в действующих нормах [11] при расчете жесткости, необходимой для получения условной критической силы, не учитывается прочность бетона, в отличие от расчетов по [14, 18], что оказывает значительное влияние на получаемые результаты, особенно сегодня, когда высокопрочный бетон находит повсеместное применение.

В работе Санжаровского [20] и в других его работах рассматриваются проблемы устойчивости сжатых элементов и методики их расчёта. Описываются чуждые сжатым конструкциям постулаты и принципы работы, характерные изгибаемым и заимствованные у них.

Бетон – это комплексный анизотропный материал, состоящий из жидкой, твёрдой и газообразной фаз. Для элементов конструкций, выполненных из железобетона, неупругими является значительная часть возникающих деформаций. Жесткость отдельных участков элементов зависит от возникающих в них усилий моментов от внешних нагрузок, а жесткость элемента по его длине является переменной величиной.

Используя деформированную схему в расчетах железобетонных конструкций, целесообразно учитывать физическую нелинейность [21]. Действующие нормы [5], в частности, рекомендуют применение нелинейной деформационной модели. При этом производят разбивку каждой колонны в пределах между жесткими участками по длине на несколько равных участков. Размер участка примерно может быть принят равным высоте сечения элемента, а жесткость на каждом из них принимается постоянной и соответствующей максимальному усилию момента от внешней нагрузки на этом участке.

В январе 2014 г. в России и ряде стран СНГ введен в действие ГОСТ 31914-2012 «Межгосударственный стандарт. Бетоны высокопрочные тяжелые и мелкозернистые для монолитных конструкций. Правила контроля и оценки качества», устанавливающий «правила определения, контроля и оценки прочности, морозостойкости и водонепроницаемости с учетом специфики свойств и особенностей испытаний высокопрочных тяжелых и мелкозернистых бетонов» классов по прочности при сжатии В60 и выше. Высокопрочные бетоны и конструкции из них обладают высокой надежностью и набором свойств, позволяющих эффективно применять их при проектировании и строительстве. Используя высокопрочные бетоны, можно добиться нового уровня строительства, в долгосрочной перспективе – снизить затраты и повысить рентабельность.

Высокопрочные бетоны подразделяются на бетоны: цементные (до 80 МПа на осевое сжатие), цементно-полимерные (до 120 МПа), композитные (до 100 МПа), полимерные (до 100 МПа). Более подробное описание представлено в [22].

Для высокопрочных бетонов параметрические точки диаграммы деформирования должны быть уточнены в каждом конкретном случае, так как бетоны могут обладать как повышенными пластическими свойствами, так и иметь повышенную хрупкость.

Кроме применения различных добавок и особых материалов с целью получения высокопрочных бетонов для железобетонных конструкций, возможно использование специальных технологических приемов обработки бетонной смеси. К одному из таких приемов относится использование давления на смесь до достижения ею необходимой прочности. Таким образом, получают бетон, названный «бетон, твердеющий под давлением» (БТД). Однако для массового применения этого материала пока есть сдерживающий фактор – стоимость изготовления оснастки. БТД обладает повышенными пластическими свойствами, повышенной прочностью, малым диаметром пор, вследствие чего наблюдается повышенная морозостойкость [22].

Применение высокопрочных бетонов, в том числе БТД, при расчетах железобетонных конструкций по действующим нормам проектирования [5] сопряжено с некоторыми сложностями, одновременно являющимися особенностями: начальные модули упругости высокопрочных бетонов, а также предельные и краевые деформации могут значительно отличаться в зависимости от способа получения того или иного типа бетона.

В БТД краевые и предельные деформации значительно превышают аналогичные величины стандартных высокопрочных бетонов, что делает материал более пластичным, исключая или уменьшая возможность хрупкого разрушения.

В [23] авторы предлагают учесть особенности работы железобетонных колонн из высокопрочного бетона при расчете по недеформированной схеме, введя эмпирический коэффициент k в числитель первого слагаемого поправки к упругой жесткости:

$$N_{cr} = \frac{8 \cdot E_b}{(l_0)^2} \cdot \left[\frac{I}{\phi_l} \cdot \left(\frac{0{,}11 \cdot k}{0{,}1 + \frac{\delta_e}{\phi_p}} + 0{,}1\right) + \alpha \cdot I_s\right]. \qquad (4)$$

«Сопоставление теоретических и экспериментальных значений несущей способности и прогибов показывает недооценку нормами несущей способности и, наоборот, превышение теоретических значений прогибов над экспериментальными» (23, с. 41). Анализируя полученные результаты, авторы рекомендуют внести коэффициент *Ψa* в формулу кривизны для сечений с трещинами в растянутой зоне. Данный коэффициент учитывает особенности работы высокопрочного бетона в элементах с трещинами.

Тенденция совершенствования теории железобетона путём внедрения нелинейной деформационной модели расчёта, предусматривающей использование диаграмм деформирования материалов, активно развивается последние десятилетия. Такая модель всесторонне исследуется и уже внедрена в различные международные и национальные нормы проектирования железобетонных конструкций. В СП 63.13330.2012 [5] для расчёта железобетонных элементов предлагается использовать кусочно-линейные деформационные модели в виде двух- или трёхлинейных диаграмм деформирования бетона и арматуры, а также криволинейные, в том числе с ниспадающей ветвью (диаграмма деформирования бетона, предложенная Н.И. Карпенко, по приложению А СП 63.13330.2012).

Метод анализа напряжённо-деформированного состояния поперечного сечения элементов с применением деформационной модели включен в Еврокоды, строительные нормы и своды правил России, Беларуси и других стран. Таким образом, нелинейные деформационные модели постепенно вытесняют привычные ранее методы расчёта по предельным усилиям, что стало возможным благодаря развитию компьютерной техники и технологии.

Рассмотрим внецентренно сжатый железобетонный элемент прямоугольного сечения с армированием по углам, методика расчёта данного элемента с использованием диаграмм деформирования материалов подробно изложена в статье [21]. Элемент является коротким жёстким, поэтому прогиб не оказывает влияния на его несущую способность и фактически прочность сечения образца является прочностью всего элемента, т. е. его несущей способностью. Выполним модернизацию данного алгоритма расчёта применительно к гибким элементам . Условную критическую силу определим в соответствии с рекомендациями норм [5] по формуле (8.15). Расчёт выполняется по недеформированной схеме, влияние прогиба на несущую способность учитывается с помощью коэффициента η.

Используя методику расчёта внецентренно сжатых железобетонных элементов [21] без учёта гибкости элемента, интегрируем в алгоритмы расчёта значения коэффициента «эта» из [5, 6], учитывающего рост величины эксцентриситета продольного усилия под влиянием прогиба элемента. Из графиков наглядно видно, что влияние прогиба повышается с ростом продольной силы и уменьшается при её падении (рис. 1, 2).

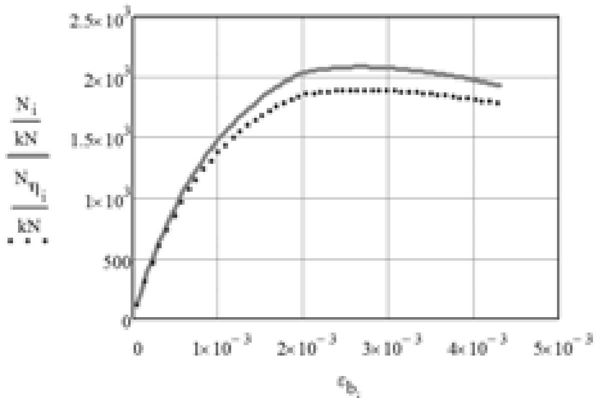

Рис. 1. Графики зависимости несущей способности от относительной деформации крайнего сжатого волокна бетона:
——— – *линия N* – без учёта влияния прогиба,
· · · · · · · – *линия Nη* – с учётом влияния прогиба

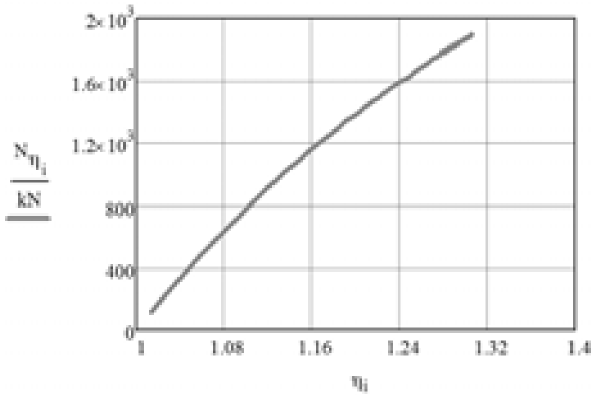

Рис. 2. График зависимости продольного усилия от величины η

Выводы. 1. Решение задач устойчивости сжатых железобетонных конструкций необходимо выполнять с применением нелинейной деформационной модели, что позволит учесть работу материалов, наиболее приближенную к реальной.

2. Используя в расчетах нелинейную деформационную модель, удаётся определять влияние прогиба элемента на величину эксцентриситета, что в конечном итоге оказывает влияние на величину максимального продольного усилия, воспринимаемого элементом, на каждой ступени нагружения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Пекарский П.П.* История Императорской академии наук в Петербурге. Т.1. СПб., 1870. 774 с.

2. *Подножкина В.Н.* Применение формулы Эйлера // Известия ЮФУ. Технические науки. Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2008. № 1(78). С. 204–208.

3. Euler L. Methodus niveniendineas curvas…, Lausanne et Geneve, 1744; Additamentum 1: De curvis elasticis, p. 267.

4. Euler L. Sur la force des colonnes, Mem. de I`Acad., Berlin, 13, (1757), 251–282.

5. СП 63.13330.2012. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003. М.: ФАУ «ФЦС», 2012. 156 с.

6. Пособие по проектированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжелого бетона без предварительного напряжения арматуры (к СП 52-101-2003) / ЦНИИПромзданий, НИИЖБ. М.: ОАО ЦНИИПромзданий, 2005. 214 с.

7. *Таланов Е. Жил*, пока вычислял // СТТ: Строительная техника и технологии. 2015. № 7 (115). С. 84–88.

8. Строительная механика. Стержневые системы / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лащеников, Н.Н. Шапошников. М.: Стройиздат, 1981. 512 с.

9. *Александров А.В.* Роль отдельных элементов стержневой системы при потере устойчивости // Вестник МИИТа. 2001. Вып. 5. С. 46.

10. *Перельмутер А.В., Сливкер В.И.* Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Киев: ВПП «Компас», 2001. 400 с.

11. *Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Субботин С.Л.* Устойчивость тонкостенных элементов конструкций за пределом упругости с учетом сложного нагружения // Известия высших учебных заведений. Строительство. 1995. № 11. С.26–32.

12. *Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Соколов С.А.* Решение задачи бифуркации цилиндрической оболочки с учетом сложного характера деформирования в момент потери устойчивости при сложном докритическом нагружении // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2010. № 2. С.16–20.

13. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.

14. Пособие по проектированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжелых и легких бетонов без предварительного напряжения арматуры (к СНиП 2.03.01-84). М.: ЦНИИпромзданий Госстроя СССР, 1984. 280 с.

15. Расчет железобетонных конструкций по прочности, трещиностойкости и деформациям / А.С. Залесов, Э.Н. Кодыш, Л.Л. Лемыш, И.К. Никитин. М.: Стройиздат, 1988. 320 с.

16. *Кодыш Э.Н., Никитин И.К., Трекин Н.Н.* Расчет железобетонных конструкций из тяжелого бетона по прочности, трещиностойкости и деформациям: монография. М.: АСВ, 2010. 352 с.

17. *Аксёнов В.Н.* К расчету колонн из высокопрочного бетона по недеформированной схеме // Бетон и железобетон. 2009. № 1. С. 24–26.

18. Новое в проектировании бетонных и железобетонных конструкций / А.А. Гвоздев, С.А. Дмитриев, Ю.П. Гуща, А.С. Залесов, Н.М. Мулин, Е.А. Чистяков. М.: Стройиздат, 1978. 204 с.

19. *Мордовский С.С.* К вопросу определения условной критической силы // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. Строительство: сборник статей [Электронный ресурс] / под ред. М.И. Бальзанникова, К.С. Галицкова, В.П. Попова; АСИ СамГТУ. Самара, 2017. С.66–69.

20. *Санжаровский Р.С.* Ошибки в стандартах по расчёту железобетона // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 3. С. 57–65.

21. *Мурашкин Г.В., Мордовский С.С.* Применение диаграмм деформирования для расчёта несущей способности внецентренно сжатых железобетонных элементов // Жилищное строительство. 2013. № 3. С. 38–40.

22. *Мурашкин Г.В., Мурашкин В.Г.* Особенности деформативных характеристик бетона, твердеющего под давлением в процессе твердения // Вестник Волжского Регионального отделения Российской

Академии Архитектуры и Строительных Наук. Н. Новгород, 2016. № 19. С. 232–237.

23. Особенности расчета железобетонных колонн из высокопрочного бетона по нормативным методам / В.Н. Аксенов, Д.Р. Маилян, А.М. Блягоз, А.М. Хутыз // Новые технологии. 2012. № 4. С. 36–43.

REFERENCES

1. Pekarskiy P.P. *Istoriya Imperatorskoy akademii nauk v Peterburge* [History of the Imperial Academy of Sciences in St. Petersburg.]. St. Petersburg, 1870. 774 p.

2. Talanov E. Lived while he calculated. *STT: Stroitelnaya tehnika i tehnologii* [STT: Construction equipment and technologies], 2015, no.7(115), pp.84-88. (in Russian)

3. Podnozhkina V.N. Application of the Euler formula. *Izvestiya Yufu.Tehnicheskie nauki* [IZVESTIA SFU. TECHNICAL SCIENCES], 2008, no.1(78), pp.204-208. (in Russian)

4. L. Euler, Methodus niveniendineas curvas…, Lausanne et Geneve, 1744; Additamentum 1: De curvis elasticis, p. 267.

5. L. Euler, Sur la force des colonnes, Mem. de I`Acad., Berlin, 13, (1757), 251–282.

6. Rule Book 63.13330.2012. Concrete and reinforced concrete structures. Basic provisions. Updated edition of building code 52-01-2003. Moskow, FAU «FTsS», 2012. 156 p.

7. Manual for the design of concrete and reinforced concrete structures made of heavy concrete without prestressing reinforcement (to Rule Book 52-101-2003). Moskow, CRI IndustryBuild, 2005. 214 p.

8. Smirnov A.F., Aleksandrov A.V., Laschenikov B.Ya., Shaposhnikov N.N. *Stroitelnaya mehanika. Sterzhnevyie sistemyi* [Construction mechanics. Rod systems]. Moskow, Standartinform Publ., 1981. 512 p.

9. Aleksandrov A.V. The role of the individual elements of the rod system when buckling. *Vestnik MIITa* [Scientific and technical journal], 2001, no 5, p.46. (in Russian)

10. Perelmuter A.V., Slivker V.I. *Raschetnyie modeli sooruzheniy i vozmozhnosti analiza* [Design models of structures and possibility of their analysis]. Kiev, Publishing house «Compass», 2001. 369 p.

11. Zubchaninov V.G., Ohlopkov N.L., Subbotin S.L. Stability of thin-walled structural elements beyond the limit of elasticity considering complex loading. *Izvestiya Vyisshih Uchebnyih Zavedeniy.Stroitelstvo* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Construction], 1995, no.11, pp.26-32. (in Russian)

12. Zubchaninov V.G., Ohlopkov N.L., Sokolov S.A. Problem solving bifurcation cylindrical shel with stockaing complex disposition waping in moment loss of stability by complex subcritical weighting. *Fundamentalnyie I prikladnyie problem i tehniki i tehnologii* [Fundamental and applied problems of technology and technology], 2010, no.2, pp.16-20. (in Russian)

13. Volmir A.S. *Ustoychivost deformiruemyih sistem* [Stability of deformable systems]. Moskow, Publishing house «Science», 1967. 984 p.

14. Manual for the design of concrete and reinforced concrete structures from heavy and lightweight concrete without prestressing reinforcement (to building code 2.03.01-84). Moskow, CRI IndustryBuild GOSSTROY of the USSR, 1984. 280 p.

15. Zalesov A.S., Kodyish E.N., Lemyish L.L., Nikitin I.K. *Raschet zhelezobetonnyih konstruktsiy po prochnosti, treschinostoykosti I deformatsiyam* [Calculation of reinforced concrete structures by strength, crack resistance and deformations]. Moskow, Standartinform Publ., 1988. 320 p.

16. Kodyish E.N., Nikitin I.K., Trekin N.N. *Raschet zhelezobetonnyih konstruktsiy iz tyazhelogo betona poprochnosti, treschinostoykosti i deformatsiyam* [Calculation of reinforced concrete structures of heavy concrete by strength, crack resistance and deformations]. Moskow, Publishing House of the Association of Building Universities, 2010. 352 p.

17. Aksenov V.N. To calculation of columns from high-strength concrete according to non-deformed scheme. *Beton i zhelezobeton* [Concrete and reinforced concrete], 2009, no.1, pp.24-26. (In Russian)

18. Gvozdev A.A., Dmitriev S.A., Guscha Yu.P., Zalesov A.S., Mulin N.M., Chistyakov E.A. *Novoe v proektirovanii betonnyih i zhelezobetonnyih konstruktsiy* [New in the design of concrete and reinforced concrete structures]. Moskow, Standartinform Publ., 1978. 204 p.

19. Mordovsky S.S. To the question of determining the conditional critical force. *sbornik statey ASI SamGTU «Traditsii i innovatsii v stroitelstve i arhitekture. Stroitelstvo»* [collection of articles ABI SamSTU «Traditions and innovations in construction and architecture. Construction»], 2017, pp.66-69.

20. Sanzharovskiy R.S. Errors in standards for calculation of reinforced concrete. *Stroitelnaya mehanika inzhenernyih konstruktsiy i sooruzheniy* [Structural mechanics of engineering structures and structures], 2012, no.3, pp.57-65. (In Russian)

21. Murashkin G.V., Mordovsky S.S. Application of deformation diagrams for calculating the bearing capacity of eccentrically compressed reinforced concrete elements. *Zhilishhnoe stroitel'stvo* [Housing construction], 2013, no 3, pp. 38-40. (In Russian)

22. Murashkin G.V., Murashkin V.G. Peculiarities of deformation characteristics of concrete hardening under pressure during hardening. *Vestnik Volzhskogo Regionalnogo otdeleniya Rossiyskoy Akademii Arhitekturyi i Stroitelnyih Nauk* [Bulletin of the Volga Regional Branch of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences], 2016, no.19, pp. 232-237. (In Russian)

23. Aksenov V.N., Mailyan D.R., Blyagoz A.M., Khoutyz A.M. Features of the caculation of ferro-concrete columns of durable concrete using normative method. *Novyiy zhurnal* [New Journal], 2012, no.4, pp. 36-43. (In Russian)

Об авторах:

МОРДОВСКИЙ Сергей Сергеевич
кандидат технических наук, доцент кафедры железобетонных конструкций
Самарский государственный технический университет
Академия строительства и архитектуры
443100, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244,
тел. (846)339-56-35
E-mail: qaer1@yandex.ru

MORDOVSKIY Sergey S.
PhD in Engineering Science, Associate Professor of the Reinforced Concrete Structures Chair
Samara State Technical University
Academy of Architecture and Civil Engineering
443100, Russia, Samara, Molodogvardeyskaya str., 244
E-mail: qaer1@yandex.ru

КИСЕЛЁВА Анна Андреевна
магистрант, профиль промышленное и гражданское строительство: проектирование
Самарский государственный технический университет
Академия строительства и архитектуры
443100, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

KISELEVA Anna A.
Master's Degree Student of the Faculty of Industrial and Civil Engineering
Samara State Technical University
Academy of Architecture and Civil Engineering
443100, Russia, Samara, Molodogvardeyskaya str., 244

Для цитирования: *Мордовский С.С., Киселёва А.А.* История появления формулы Эйлера. Вопросы устойчивости сжатых железобетонных элементов // Градостроительство и архитектура. 2021. Т.11, № 1. С. 18–25. DOI: 10.17673/Vestnik.2021.01.2.
For citation: Mordovskiy S.S., Kiseleva A.A. History of the Appearance of Euler's Formula. Issues of Stability of Compressed Reinforced Concrete Elements. *Gradostroitel'stvo i arhitektura* [Urban Construction and Architecture], 2021, vol. 11, no. 1, Pp. 18–25. (in Russian) DOI: 10.17673/Vestnik.2021.01.2.