

УДК 539.3

Doi: 10.31772/2712-8970-2023-24-1-18-34

Для цитирования: Сабиров Р. А. Уравнения Сен-Венана и Кармана для ортотропной предварительно растянутой пластины при воздействии температуры. 2023. Т. 24, № 1. С. 18–34. Doi: 10.31772/2712-8970-2023-24-1-18-34.

For citation: Sabirov R. A. [Saint-Venant and Karman equations for orthotropic prestretched plate when exposed to temperature]. *Siberian Aerospace Journal*. 2023, Vol. 24, No. 1, P. 18–34. Doi: 10.31772/2712-8970-2023-24-1-18-34.

Уравнения Сен-Венана и Кармана для ортотропной предварительно растянутой пластины при воздействии температуры

Р. А. Сабиров

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31
E-mail: rashidsab@mail.ru

В космической технике применяются тонкие пластины, которые предварительно растягиваются с помощью сил в ее плоскости и прикрепляются к жестким ребрам. В пожарной технике спасения разрабатываются конструкции пластин, представляющие натяжное полотно, поддерживаемое дронами, для гашения энергии падающего с высоты человека при его эвакуации как с высотного объекта, так и в других исключительных случаях. Пластины тонкие, обычно состоят из композиционного материала. В качестве нагрузок преобладают поперечные силы; для уменьшения прогиба полотно предварительно натягивается на жесткий контур.

В работе получены уравнения Б. Сен-Венана и Т. Кармана для ортотропной пластины с учетом приращения температуры. Первые представляют собой уравнения равновесия в перемещениях с начальными усилиями, а вторые – систему нелинейных уравнений неразрывности деформаций и нелинейных уравнений равновесия. Форма представления моделей дифференциальная.

Рассмотрены примеры расчета пластины на действие сосредоточенной силы и предварительного растяжения. Континуум пластины заменен дискретной областью; дифференциальные соотношения заменены конечно-разностными аналогами. Нелинейные уравнения решались итерациями.

Расчет тонкой пластинки на действие сосредоточенной силы показал, что получаемые продольные силы настолько велики, что напряжения на два-три порядка превышают напряжения, допускаемые для рассматриваемого ортотропного материала. Для уменьшения напряжений, пластину предварительно растягивают. Изгибаемая поверхность становится более монотонной, прогиб уменьшается, это влечет к понижению уровня напряжений.

Сравнение расчетов от действия сосредоточенной силы и изменения температуры показало, что в данной гибкой пластинке малой толщины эффект температурного воздействия незначителен.

Аппарат теории Кармана относительно сложен в численной реализации. Смешанная форма модели в напряжениях и перемещениях требует дополнительных исследований сходимости решений. Модель деформирования Сен-Венана как модель гибкой пластины небольшого прогиба позволяет решать задачи обеспечения жесткости и прочности сложного продольно-поперечного изгиба ортотропных пластин.

Ключевые слова: изгиб тонких гибких пластин, продольно-поперечное деформирование, ортотропная пластина.

Saint-Venant and Karman equations for orthotropic prestretched plate when exposed to temperature

R. A. Sabirov

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology
31, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation
E-mail:rashidsab@mail.ru

In space technology, thin plates are used, which are preliminarily stretched with the help of forces in its plane and attached to rigid ribs. In fire rescue technology, plate designs are being developed that represent a tension fabric supported by drones to extinguish the energy of a person falling from a height, during his evacuation both from a high-rise object and in other exceptional cases. The plates are thin and usually consist of a composite material. Shear forces predominate as loads; to reduce deflection, the fabric is pre-stretched onto a rigid contour.

In this work, the equations of B. Saint-Venant and T. Karman for an orthotropic plate are obtained, taking into account the temperature increment. The former are the equations of equilibrium in displacements with initial forces, and the latter are a system of non-linear equations of the continuity of deformations and non-linear equations of equilibrium. The form of representation of models is differential.

Examples of calculation of a plate for the action of a concentrated force and preliminary tension are considered. The plate continuum is replaced by a discrete region; differential relations are replaced by finite-difference analogs. Nonlinear equations were solved by iterations.

The calculation of a thin plate for the action of a concentrated force showed that the resulting longitudinal forces are so large that the stresses are two to three orders of magnitude higher than the stresses allowed for the considered orthotropic material. To reduce this effect, the plate is pre-stretched. The bending surface becomes more monotonous, the deflection decreases, which leads to a decrease in the stress level.

Comparison of calculations obtained from the action of a concentrated force and a change in temperature showed that in this flexible plate of small thickness, the effect of temperature exposure is insignificant.

The apparatus of the Karman theory is relatively difficult to implement numerically. The mixed form of the model in stresses and displacements requires additional studies of the convergence of solutions. The Saint-Venant deformation model, as a model of a flexible plate with a small deflection, makes it possible to solve the problems of ensuring the rigidity and strength of a complex longitudinal-transverse bending of an orthotropic plate.

Keywords: bending of thin flexible plates, longitudinal-transverse deformation, orthotropic plate.

Введение

В космической технике применяются тонкие пластины, которые крепятся к жестким ребрам и предварительно растягиваются с помощью сил в их плоскости [1; 2]. Аналогичными являются конструкции, представляющие натяжное спасательное полотно, поддерживаемое дронами, для гашения энергии падающего с высоты человека для его эвакуации как с высотного объекта, так в других исключительных случаях при отсутствии или невозможности применения других средств спасения [3].

В качестве материала пластин применяются композиты [4], зачастую однонаправленные, физические свойства которых по двум главным направлениям порой отличаются в 15 раз, а прочностные характеристики различаются до 40 раз. На рис. 1 показано полотно композиционной пластины, ориентированное в глобальной системе координат (Oxy); приведены прочностные параметры с характеристиками жесткости в его собственных главных осях $O12$.

Распределенные нагрузки, как и локальные силы, образуют существенные изгибающие моменты и перерезывающие силы, создающие концентрации напряжений [5]. Одним из приемов

уменьшения напряжений является натяжение пластины мембранными силами, приложенными по контуру. Если мембранные силы сами являются функциями поперечной нагрузки, то принцип аддитивности не действует [6]. Неравномерные температурные нагружения изменяют напряжения и деформативность.

По теории изгиба *изотропных* пластин назовем труды [6–11]; обзор и анализ моделей деформирования приведен в работах [12–18].

Цель работы. Требуется выбрать модель расчета тонких пластин из ортогонально-анизотропного материала для обеспечения жесткости и прочности при одновременном приложении поперечных и продольных нагрузок с учетом приращения температуры.

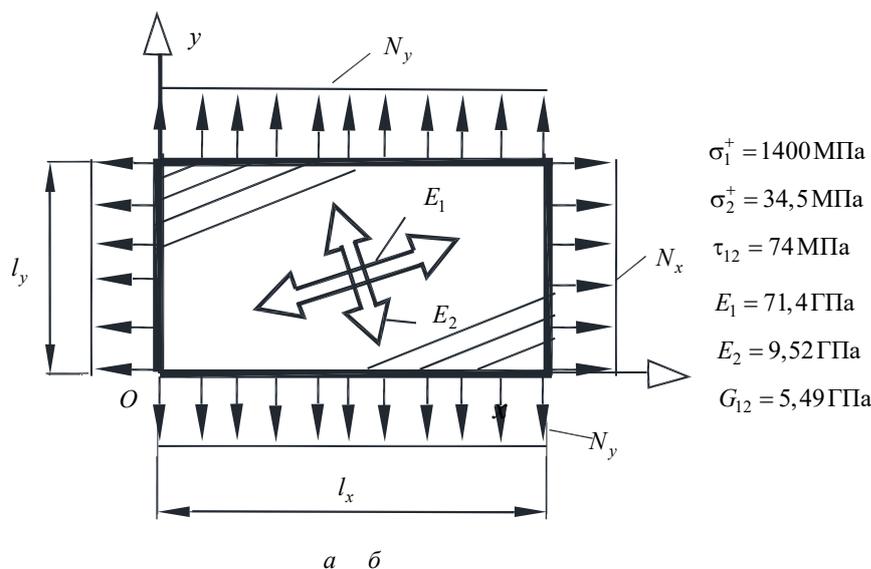


Рис. 1. Полотно из ортотропного материала, натянутое на жесткий контур:

а – силы натяжения N_x, N_y ; б – прочностные параметры $\sigma_1^+, \sigma_2^+, \tau_{12}$

и характеристики жесткости E_1, E_2, G_{12}

Fig. 1. A web of orthotropic material stretched over a rigid contour:

а – tension forces N_x, N_y ; б – strength parameters $\sigma_1^+, \sigma_2^+, \tau_{12}$ and stiffness characteristics E_1, E_2, G_{12}

1. Постановка задачи деформирования ортотропной модели растяжения и изгиба

В качестве определяющих уравнений воспользуемся законом Гука для тела, обладающего ортогонально-анизотропными свойствами, составленного в декартовой системе координат $Oxyz$ [19]

$$\begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_1 T \\ \alpha_2 T \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

Здесь $E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{21}, G_{12}$ – упругие характеристики жесткости (технические константы) ортотропного материала, определенные для главных направлений упругой симметрии $l-2$; e_{xx}, e_{yy}, e_{xy} – компоненты тензора деформаций; $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – компоненты тензора напряжений; α_1, α_2 – коэффициенты линейного температурного расширения ортотропного материала по направлениям упругой симметрии $l-2$; $T = T(x, y, z)$ – приращение температуры. Методика учета изменения температуры известна как «метод устранения деформаций» [9; 10]. В этом ме-

тоде для изотермического нагружения объемные и поверхностные силы определяются через температурное поле $T(x, y, z)$ исходной температурной задачи.

Уравнения (1) в обратной форме имеют вид

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{E}_1 & \tilde{E}_{12} & 0 \\ \tilde{E}_{12} & \tilde{E}_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{xx} - \alpha_1 T \\ e_{yy} - \alpha_2 T \\ e_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

где коэффициенты жесткости обозначим следующими символами:

$$\tilde{E}_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad \tilde{E}_2 = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad \tilde{E}_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}. \quad (3)$$

Теорию деформаций, «соответствующую каким угодно, а не только малым смещениям», применим из [12]. Для вычисления относительного удлинения ε_v рассматриваемой точки в произвольном направлении v , определяемого направляющими косинусами l, m, n ($l^2 + m^2 + n^2 = 1$), компоненты тензора деформаций имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}. \quad (4)$$

Здесь $u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$ – проекции (компоненты) вектора перемещения.

По поводу приложения уравнений (4) к изгибу пластин, приведем замечание П. Папковича: «В задачах об изгибе тонких пластин прогибы срединной поверхности $w = w_0(x, y)$ настолько значительны, что квадраты углов поворота $(\partial w_0 / \partial x)^2$ и $(\partial w_0 / \partial y)^2$ являются величинами одного порядка с мембранными деформациями срединного слоя $\partial u_0 / \partial x$ и $\partial v_0 / \partial y$ » [6]. Отсюда для модели изгибаемой гибкой пластины уравнения (4) принимают такими:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (5)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Приложение гипотезы Кирхгофа

$$\varepsilon_{zz} = 0, \quad \varepsilon_{xz} = 0, \quad \varepsilon_{yz} = 0, \quad (6)$$

дает

$$w(x, y, z) = w_0(x, y, 0) = w, \quad u(x, y, z) = u_0 - \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} z, \quad v(x, y, z) = v_0 - \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} z. \quad (7)$$

Здесь $-h/2 \leq z \leq h/2$; h – толщина пластины; $u_0 = u(x, y)$, $v_0 = v(x, y)$ – мембранные смещения срединного слоя пластины (при $z = 0$); $w = w_0(x, y)$ – функция прогиба.

Подставив (7) в первые три уравнения (5), получим:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2, \quad (8)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2, \quad (9)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} z + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y}. \quad (10)$$

Распределение температуры по толщине зададим линейным:

$$T(x, y, z) = T_c + T_h z, \quad -h/2 \leq z \leq h/2. \quad (11)$$

Здесь функции

$$T_c = [T(x, y, h/2) + T(x, y, -h/2)]/2, \quad T_h = [T(x, y, h/2) - T(x, y, -h/2)]/h \quad (12)$$

зависят от приращений температуры, заданные на лицевых поверхностях пластины.

Внутренние силовые факторы, представляющие собой мембранные усилия $N_x = N_x(x, y)$, $N_y = N_y(x, y)$ и $S_{xy} = S_{xy}(x, y)$, изгибающие $M_x = M_x(x, y)$, $M_y = M_y(x, y)$ и крутящий момент $H_{xy} = H_{yx}(x, y)$, вычисляются интегрированием по толщине h уравнений (2):

$$N_x = h \left\{ \tilde{E}_{11} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \alpha_1 T_c \right] + \tilde{E}_{12} \left[\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \alpha_2 T_c \right] \right\}, \quad (13)$$

$$N_y = h \left\{ \tilde{E}_{12} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \alpha_1 T_c \right] + \tilde{E}_{22} \left[\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \alpha_2 T_c \right] \right\}, \quad (14)$$

$$S_{xy} = G_{12} h \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad (15)$$

$$M_x = -\frac{h^3}{12} \left[\tilde{E}_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha_1 T_h \right) + \tilde{E}_{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \alpha_2 T_h \right) \right], \quad (16)$$

$$M_y = -\frac{h^3}{12} \left[\tilde{E}_{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha_1 T_h \right) + \tilde{E}_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \alpha_2 T_h \right) \right], \quad (17)$$

$$H_{xy} = H_{yx} = -\frac{h^3}{6} G_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (18)$$

Здесь $N_x = N_x(x, y)$, $N_y = N_y(x, y)$, ..., $M_x = M_x(x, y)$... – функции координат.

2. Уравнение неразрывности срединной поверхности

Уравнения неразрывности срединной поверхности пластины формулируется как для плоской задачи теории упругости [16] из уравнений (8)–(10):

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2. \quad (19)$$

устранением мембранных смещений $u_0 = u(x, y)$, $v_0 = v(x, y)$.

Воспользуемся “методой” из [6], в которой рассматривается вывод уравнения неразрывности для изотропной пластины. В левой части (19) деформации выразим через внутренние мембранные силовые факторы (13)–(15). Для этого соотношения (13) и (14) сложим, а затем вычтем друг из друга. Это даст

$$\frac{\nu_{21}}{hE_2\nu_{12}} (N_x - \nu_{12}N_y) = \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \alpha_1 T_c, \quad (20)$$

$$\frac{\nu_{12}}{hE_1\nu_{21}}(N_y - \nu_{21}N_x) = \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \alpha_2 T_c. \quad (21)$$

Продифференцируем уравнение (20) дважды по координате x , а (21) продифференцируем дважды по координате y , – затем сложим. Из полученного выражения вычтем уравнение (15), продифференцированное по координатам x, y . Получаем уравнение неразрывности срединной поверхности относительно трех неизвестных функций $N_x(x, y)$, $N_y(x, y)$, $S_{xy}(x, y)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\nu_{21}}{hE_2\nu_{12}}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(N_x - \nu_{12}N_y) + \frac{\nu_{12}}{hE_1\nu_{21}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(N_y - \nu_{21}N_x) - \\ & - \frac{1}{hG_{12}}\frac{\partial^2 S_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \alpha_1\frac{\partial^2 T_c}{\partial y^2} - \alpha_2\frac{\partial^2 T_c}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Введем в (22) функцию Эри $\varphi = \varphi(x, y)$ [18]:

$$N_x = h\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad N_y = h\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad S_{xy} = -h\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad (23)$$

получим искомое уравнение неразрывности деформаций для гибкой ортотропной пластины с температурной добавкой, относительно неизвестной функции $\varphi(x, y)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\nu_{21}}{\nu_{12}E_2}\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{\nu_{21}}{E_2} - \frac{\nu_{12}}{E_1}\right)\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\nu_{12}}{E_1\nu_{21}}\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = \\ & = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \alpha_1\frac{\partial^2 T_c}{\partial y^2} - \alpha_2\frac{\partial^2 T_c}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Для изотропной пластины, приняв $E_1 = E_2 = E$, $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu$ и $G_{12} = E / 2(1 + \nu)$, получаем:

$$\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}\right) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \alpha_1\frac{\partial^2 T_c}{\partial y^2} - \alpha_2\frac{\partial^2 T_c}{\partial x^2}, \quad (25)$$

где в круглых скобках левой части содержится двойной лапласиан над функцией напряжений $\nabla^2 \nabla^2 \varphi(x, y)$.

3. Уравнения равновесия для сочетание изгиба с растяжением или сжатием С. П. Тимошенко

Здесь различают два возможных случая распределения напряжений в пластинке [11]:

1) растягивающие напряжения малы (по сравнению с критическими напряжениями), и можно, пренебрегая их влиянием на изгиб пластинки, допустить, что общее напряжение получается с достаточной точностью, если накладывать напряжения, вызванные растяжением срединной плоскости, на изгибные напряжения, произведенные поперечной нагрузкой;

2) напряжения в срединной плоскости не малы и следует рассмотреть их влияние на изгиб пластинки.

Для составления уравнений равновесия элемента от мембранных сил (с целью согласования направлений и знаков), воспользуемся рис. 2. От мембранных сил, напряжения по толщине h распределяется равномерно, уравнения равновесия записывается без учета искривления поверхности, как для плоского напряженного состояния:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial y} + q_x(x, y) = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + q_y(x, y) = 0. \quad (27)$$

Здесь $q_x(x, y)$ и $q_y(x, y)$ силы в базисной плоскости.

Функция Эри (23) удовлетворяет уравнениям (26), (27) при $q_x = 0$ и $q_y = 0$.

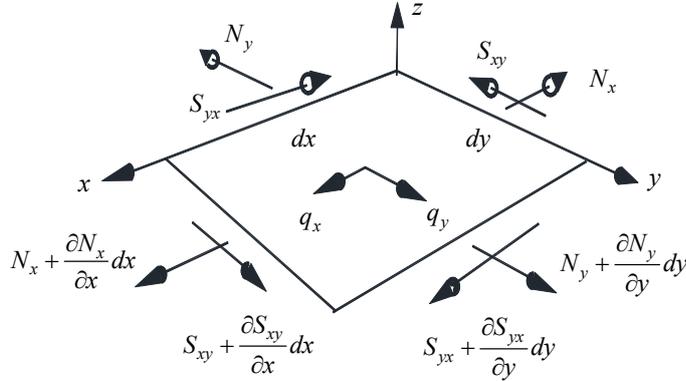


Рис. 2. Бесконечно малый элемент с приложенными мембранными усилиями

Fig. 2. An infinitesimal element with applied membrane loads

Действующие на элемент пластинки изгибающие силовые факторы рассмотрим на рис. 3. Для понимания направлений действия сил и поворотов сечений изобразим возможный изогнутый вид на рис. 4. Составим уравнение равновесия внутренних сил бесконечно-малого элемента пластинки на ось z :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx - N_x dy \sin\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx\right) dy \sin\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx\right) - \\ & - N_y dx \sin\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \left(N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy\right) dx \sin\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy\right) - \\ & - S_{yx} dy \sin\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \left(S_{yx} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial x} dx\right) dy \sin\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} dx\right) + q_z dx dy = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Линеаризуем это уравнение, заменив синусы углов их углами; приведем подобные и отбросим бесконечно малые слагаемые более высокого порядка малости. Тогда для любого внутреннего элемента $dx dy$:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + 2S_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + q_z = 0. \quad (29)$$

Добавим сумму моментов всех сил, действующих вокруг оси y и вокруг оси x :

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H_{yx}}{\partial y}, \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H_{xy}}{\partial x}. \quad (30)$$

Учтем закон парности касательных напряжений, дающий: $H_{xy} = H_{yx}$ и $S_{xy} = S_{yx}$. Подставив (30) в (29), получаем:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q_z = 0. \quad (31)$$

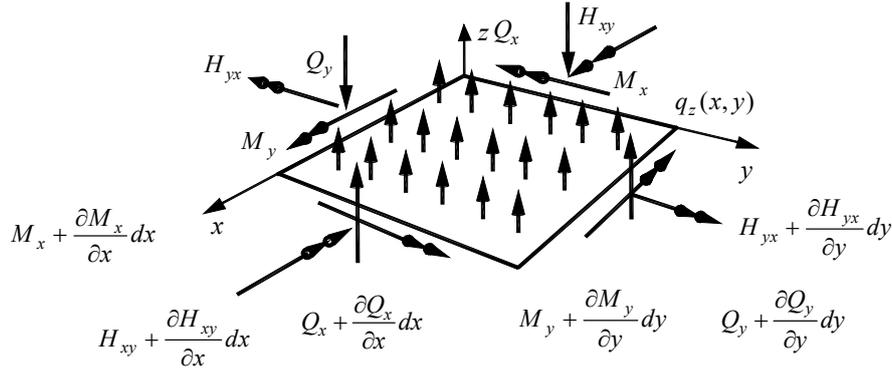


Рис. 3. Бесконечно-малый элемент базисной поверхности пластинки

Fig. 3. An infinitesimal element of the basal surface of the plate

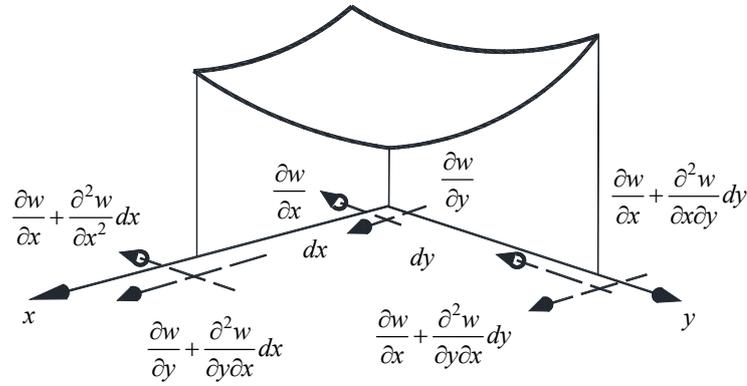


Рис. 4. Изогнутая поверхность пластинки: приведены углы поворота и приращения углов поворота по направлению осей x и y

Fig. 4. The curved surface of the record: the angles of rotation are given and increments of rotation angles in the direction of the axes x and y

Отметим, что уравнения (26), (27), (31) получены без учета физических уравнений (в частности, закона Гука). В [7] отмечается, что уравнение (31) было получено Сен-Венаном (1883 г.).

Подставив физические соотношения (16)–(18) в (31), – получаем уравнение Б. Сен-Венана для пластины из ортотропного материала:

$$\frac{h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \left\{ E_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + E_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + [E_1\nu_{21} + E_2\nu_{12} + 4G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21})] \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + E_1(\alpha_1 + \alpha_2\nu_{21}) \frac{\partial^2 T_h}{\partial x^2} + E_2(\alpha_1\nu_{12} + \alpha_2) \frac{\partial^2 T_h}{\partial y^2} \right\} = -q_z - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2S_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (32)$$

с температурным воздействием.

4. Классификация тонких пластин П. Ф. Папковичем в связи с методикой их расчета [6]

Подставив в (32) функцию напряжений (23), получаем

$$\frac{h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \left\{ E_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + E_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + [E_1\nu_{21} + E_2\nu_{12} + 4G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21})] \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + E_1(\alpha_1 + \alpha_2\nu_{21}) \frac{\partial^2 T_h}{\partial x^2} + E_2(\alpha_1\nu_{12} + \alpha_2) \frac{\partial^2 T_h}{\partial y^2} \right\} = -q_z - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (33)$$

Уравнения равновесия (26) и (27) учитывать нет необходимости.

Уравнение (33) и уравнение неразрывности (24) представляют систему дифференциальных уравнений в частных производных, полученную Т. Карманом. Классической (элементарной) теорией жестких пластин называется модель расчета, сводящаяся к интегрированию лишь одного уравнения равновесия (32).

Теория, предложенная Сен-Венаном предполагает, что пластины тонкие и поперечная нагрузка настолько мала, что и прогибы малы. Тогда в правой части (24) производные функции прогибов малы и ими можно пренебречь:

$$\frac{1}{E_1} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + \left(\frac{1}{G_{12}} - 2 \frac{\nu_{21}}{E_2} \right) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_2} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = -\alpha_1 \frac{\partial^2 T_c}{\partial y^2} - \alpha_2 \frac{\partial^2 T_c}{\partial x^2}. \quad (34)$$

Функция напряжений может быть определена из этого уравнения и граничных условий независимо от функции прогиба. Затем предполагается решение краевой задачи для (33) с известными $\varphi = \varphi(x, y)$.

В случае, предварительного растяжения пластины функция φ на контуре может быть вычислена применением «рамной аналогии» [16]. Пусть на отделенный от полотна контур пластины, действуют нормальные $\sigma_v h$ и касательные $\tau_v h$ составляющие сил натяжения (рис. 5), создающие в контуре изгибающий момент $M = \varphi$ (рис. 5, а) и продольную силу $N = d\varphi/dq$ (рис. 5, б). Например, если на раму (рис. 1), действуют растягивающие силы: $N_x = \sigma_x h$, при $x = 0$ и $x = L_x$ и $N_y = \sigma_y h$, при $y = 0$ и $y = L_y$, тогда функция φ и ее производная могут быть определены построением эпюр внутренних сил в раме (рис. 5, в и 5, г).

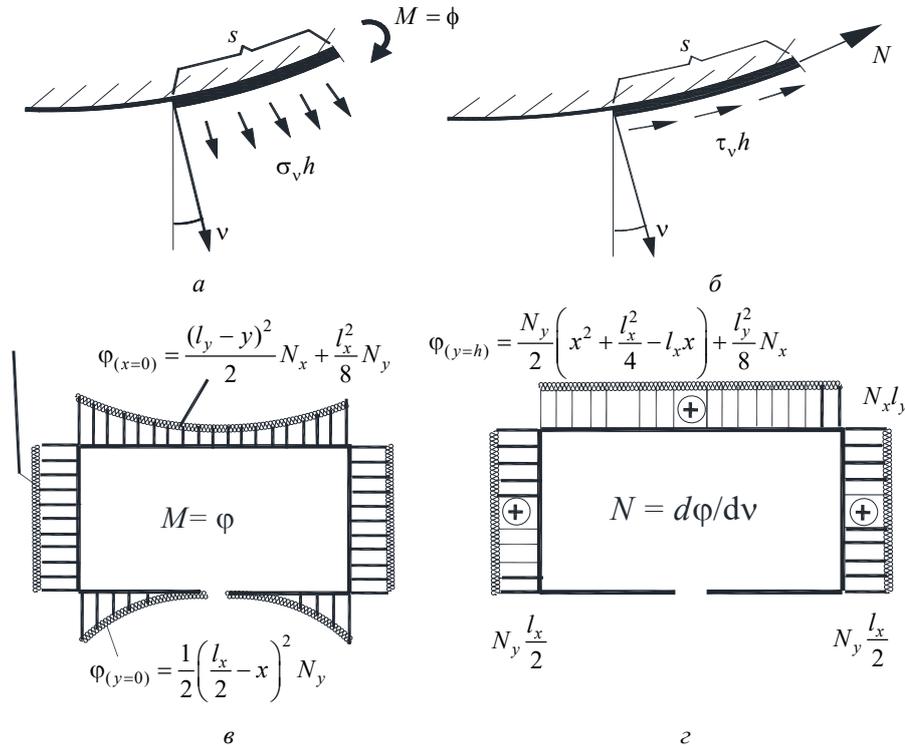


Рис. 5. Контур прямоугольной пластины: а – элемент контура s с внешней нормалью v , в котором возникает изгибающий момент M ; б – элемент контура s и продольная сила N ; в – функция φ на контуре; г – производная функции φ по нормали v

Fig. 5. The contour of a rectangular plate: а – a contour element with an external normal v , in which a bending moment occurs M ; б – kannel element s and longitudinal force N ; в – the function φ on a contour; г – the derivative φ of the function with respect to the normal v

5. Конечно-разностная постановка

Континуум пластины заменим дискретной областью. Дифференциальные соотношения заменим конечно-разностными аналогами.

Применим центральные разности [20]. Выберем на области пластинки прямоугольную равномерную сетку $\omega_{ij} = \{(x_i = i\lambda_x, y_j = j\lambda_y), i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n\}$ на отрезках $[0, l_x]$ и $[0, l_y]$. Здесь $x = x_i$ и $y = y_j$ – узлы сетки; $\lambda_x = l_x / m$ и $\lambda_y = l_y / n$ – шаг сетки, а l_x и l_y – размеры пластинки по направлениям осей координат x и y .

Конечно-разностный аналог уравнения (33) получается таким:

$$a w_{ji} + b(w_{ji+1} + w_{ji-1}) + d(w_{j+li} + w_{j-li}) + e(w_{j+li+1} + w_{j-li-1}) + g(w_{j+li-1} + w_{j-li+1}) + c(\varphi_{ji+2} + \varphi_{ji-2}) + f(\varphi_{j+2i} + \varphi_{j-2i}) = -q_z^{ji} + k T_{ji} - l(T_{ji+1} + T_{ji-1}) - m(T_{j+li} + T_{j-li}), \quad (35)$$

в котором коэффициенты вычисляются по следующим формулам:

$$D = h^3 / 12(1 - \nu_{12}\nu_{21}), \quad a = \frac{6DE_2}{\lambda_y^4} + \frac{6DE_1}{\lambda_x^4} + \frac{4DG_{12}}{\lambda_x^2\lambda_y^2} - \frac{2N_x}{\lambda_x^2} - \frac{2N_y}{\lambda_y^2},$$

$$b = -\frac{4DE_1}{\lambda_x^4} - \frac{2DG_{12}}{\lambda_x^2\lambda_y^2} + \frac{N_x}{\lambda_x^2}, \quad d = -\frac{4DE_2}{\lambda_y^4} - \frac{2DG_{12}}{\lambda_x^2\lambda_y^2} + \frac{N_y}{\lambda_y^2}, \quad e = \frac{DG_{12}}{\lambda_x^2\lambda_y^2} + \frac{2S_{xy}}{4\lambda_x\lambda_y},$$

$$g = \frac{DG_{12}}{\lambda_x^2\lambda_y^2} - \frac{2S_{xy}}{4\lambda_x\lambda_y}, \quad f = \frac{DE_2}{\lambda_y^4}, \quad c = \frac{DE_1}{\lambda_x^4}. \quad (36)$$

$$k = \frac{2DE_1}{\lambda_x^2}(\alpha_1 + \nu_{21}\alpha_2) + \frac{2DE_2}{\lambda_y^2}(\alpha_2 + \nu_{12}\alpha_1), \quad l = \frac{DE_1}{\lambda_x^2}(\alpha_1 + \nu_{21}\alpha_2), \quad m = \frac{DE_2}{\lambda_y^2}(\alpha_2 + \nu_{12}\alpha_1).$$

Конечно-разностный аналог уравнения (24) имеет вид:

$$a \varphi_{ji} + b(\varphi_{ji+1} + \varphi_{ji-1}) + d(\varphi_{j+li} + \varphi_{j-li}) + c(\varphi_{ji+2} + \varphi_{ji-2}) + f(\varphi_{j+2i} + \varphi_{j-2i}) + e(\varphi_{j+li+1} + \varphi_{j-li-1} + \varphi_{j+li-1} + \varphi_{j-li+1}) =$$

$$= \frac{1}{16\lambda_x^2\lambda_y^2} \left[w_{j+li+1}^2 + w_{j+li-1}^2 + w_{j-li-1}^2 + w_{j-li+1}^2 + 2(-w_{j+li+1}w_{j+li-1} + w_{j+li+1}w_{j-li-1} - w_{j+li+1}w_{j-li+1} - w_{j+li-1}w_{j-li-1} + w_{j+li-1}w_{j-li+1} - w_{j-li-1}w_{j-li+1}) \right] +$$

$$- \frac{1}{\lambda_x^2\lambda_y^2} \left[2w_{ji}(-w_{ji+1} - w_{j+li} - w_{j-li} - w_{ji-1}) + 4w_{ji}^2 + w_{ji+1}w_{j+li} + w_{ji+1}w_{j-li} + w_{ji-1}w_{j+li} + w_{j+li}w_{j-li} \right] +$$

$$+ T_{ji} \left(\frac{2\alpha_1}{\lambda_y^2} + \frac{2\alpha_2}{\lambda_x^2} \right) - \frac{\alpha_1}{\lambda_y^2} (T_{j+li} + T_{j-li}) - \frac{\alpha_2}{\lambda_x^2} (T_{ji+1} + T_{ji-1}),$$

в котором коэффициенты вычисляются по следующим формулам:

$$a = \frac{6a_1}{\lambda_y^4} + \frac{6a_2}{\lambda_x^4} + \frac{8a_3}{\lambda_x^2\lambda_y^2}, \quad b = -\frac{4a_2}{\lambda_x^4} - \frac{4a_3}{\lambda_x^2\lambda_y^2}, \quad d = -\frac{4a_1}{\lambda_y^4} - \frac{4a_3}{\lambda_x^2\lambda_y^2}, \quad c = \frac{a_2}{\lambda_x^4}, \quad f = \frac{a_1}{\lambda_y^4}, \quad e = \frac{2a_3}{\lambda_x^2\lambda_y^2};$$

$$a_1 = 1/E_1, \quad a_2 = 1/E_2, \quad 2a_3 = 1/G_{12} - 2\nu_{21}/E_2 = 1/G_{12} - 2\nu_{12}/E_1. \quad (38)$$

6. Расчеты

Размеры пластинки $l_x = 1$ м, $l_y = 0,8$ м; толщина $h = 2 \cdot 10^{-3}$ м. Модули упругости: $E_1 = 9,52$ ГПа; $E_2 = 71,4$ ГПа; модуль сдвига $G_{12} = 5,49$ ГПа. Коэффициенты Пуассона: $\nu_{12} = 0,02$; $\nu_{21} = 0,15$ ($\nu_{21} = \nu_{12}E_2 / E_1$). Модуль упругости E_1 ориентирован по длинной стороне пластины, а модуль упругости E_2 ориентирован по короткой стороне пластины. При такой ориентации волокон ортотропная пластина наиболее жесткая [21].

Коэффициенты линейного температурного растяжения данного ортотропного материала $\alpha_1 = 14 \cdot 10^{-5} 1/K$ (Кельвин), $\alpha_2 = 0$.

Для расчетов применялась система аналитических вычислений [22].

6.1. Решение по уравнению Сен-Венана

Полагаем, что силы предварительного натяжения известны и их можно считать постоянными в области пластинки и на контуре. Уравнения (26), (27) удовлетворяются. В уравнении Сен-Венана (32) усилия N_x , N_y , S_{xy} перенесем в левую часть:

$$\frac{h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \left\{ E_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + E_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + [E_1\nu_{21} + E_2\nu_{12} + 4G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21})] \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right\} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -q_z - \frac{h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \left[E_1(\alpha_1 + \alpha_2\nu_{21}) \frac{\partial^2 T_h}{\partial x^2} + E_2(\alpha_1\nu_{12} + \alpha_2) \frac{\partial^2 T_h}{\partial y^2} \right],$$

Теперь продольные силы являются известными параметрами при вторых производных функции прогиба и входят в левую часть системы уравнений. Поперечная нагрузка и температурные слагаемые представляют правую часть системы уравнений. Таким образом, имеем линейную задачу относительно прогиба.

6.1.1. Действие сосредоточенной силы

Пусть $N_x = 0$, $N_y = 0$, $S_{xy} = 0$, $T_h = 0$. В центре пластины приложим сосредоточенную силу $P = 1000$ Н. Заменяем $q_z = P / (dx dy)$. На рис. 6 приведем эпюру прогибов и эпюры внутренних силовых факторов. Моменты вычислены по формулам (16)–(18). Максимальный прогиб в центре под силой (рис. 6, а) равен 0,44785 м. Максимальный изгибающий момент $M_x = 200$ Н·м/м (рис. 6, б). Максимальный изгибающий момент $M_y = 700$ Н·м/м (рис. 6, в).

Мембранные силы вычисляются по формулам (13)–(15), однако без учета продольных смещений:

$$N_x = h \left\{ \tilde{E}_1 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \alpha_1 T_c \right] + \tilde{E}_{12} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \alpha_2 T_c \right] \right\},$$

$$N_y = h \left\{ \tilde{E}_{12} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \alpha_1 T_c \right] + \tilde{E}_2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \alpha_2 T_c \right] \right\}, \quad S_{xy} = G_{12} h \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

Эти формулы дают, что максимальное значение продольная сила N_x приобретает в области пластины возле сосредоточенной силы P в направлении модуля E_1 (рис. 6 г) $N_x = 12$ МН/м, а продольная сила N_y приобретает максимума на контуре у длинных сторон – $N_y = 160$ МН/м (рис. 6, д). Эпюра сдвигающих сил приведена на рис. 6 е. Силы получились значительными, зависят от нелинейных добавок: $\tilde{E}_1 h \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$, $\tilde{E}_2 h \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$.

Сгущение конечно-разностной сетки в (35), (37) не изменяет порядок мембранных сил.

6.1.2. учет температуры (рис. 7)

Зададим закон распределения температуры по области пластины в виде $T_h(x, y) = -140 \text{ }^\circ\text{C} + (x/Lx)^3 80 \text{ }^\circ\text{C}$. Расчеты выполним, задавая температуру в Кельвинах $T_h(x, y) = 30\text{K} + (x/Lx)^3 350\text{K}$. График распределения температуры покажем на рис. 7, а. На рис. 7, б–е представлены эпюры прогибов и эпюры внутренних силовых факторов. Сравнивая эти эпюры с эпюрами, полученными от действия сосредоточенной силы, видим, что в данной гибкой пластинке при малой ее толщине эффект температурного воздействия незначителен.

6.1.3. Действие от сосредоточенной силы, температуры и предварительного растяжения

Расчет тонкой пластинки на действие сосредоточенной силы показал, что получаемые продольные силы настолько велики, что напряжения на два-три порядка превышают напряжения, допускаемые для рассматриваемого ортотропного материала. Как отмечалось в п. 6.1.1, влияют квадраты углов поворота срединного слоя пластинки, то есть квадраты первых производных функции прогиба. Чтобы уменьшить этот эффект можно предварительно растянуть пластину. Тем самым, прогиб должен уменьшиться, изгибаемая поверхность будет более монотонной, что должно повлечь уменьшение напряжений.

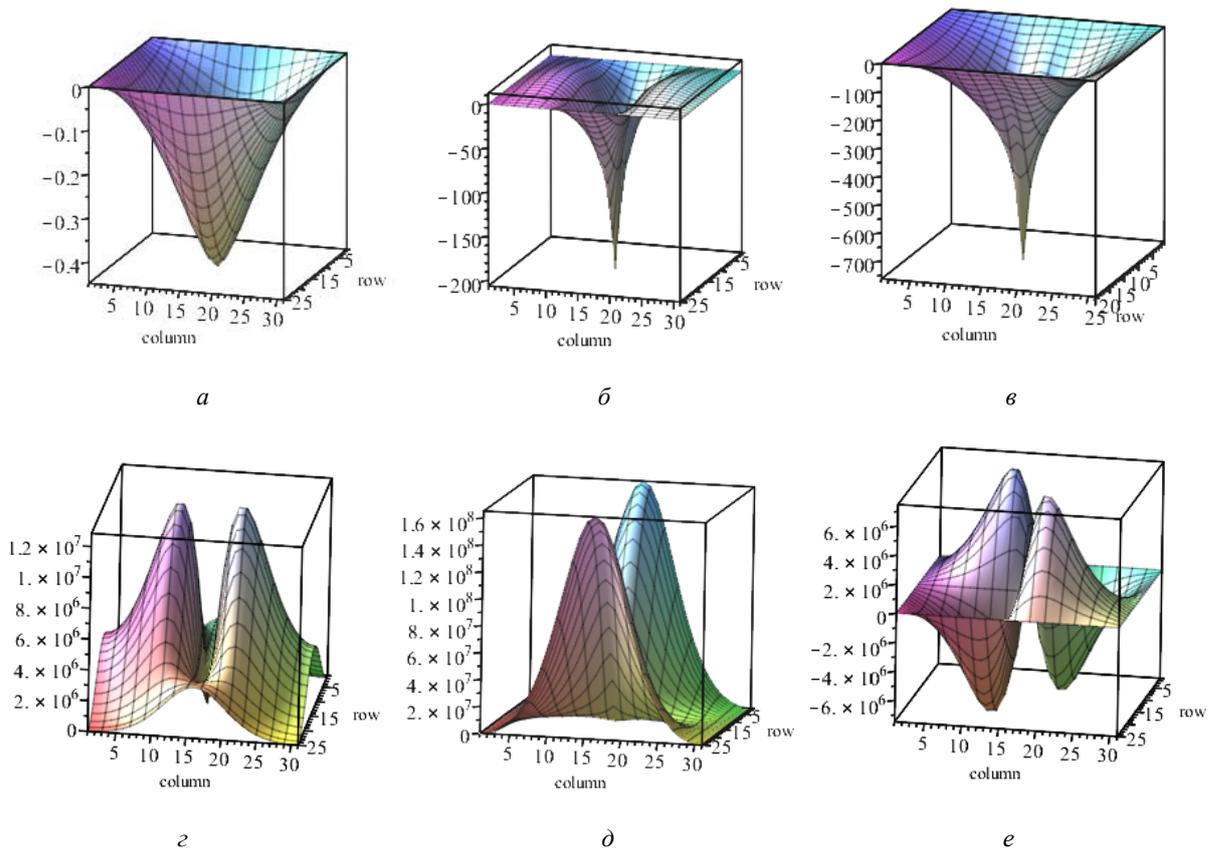


Рис. 6. Эпюры в пластине от сосредоточенной силы $P = 1000 \text{ N}$:
 а – прогиб (максимальный прогиб 0,44785 м.); б – изгибающий момент M_x ; в – изгибающий момент M_y ;
 г – продольная сила N_x ; д – продольная сила N_x ; е – сдвигающая сила S_{xy}

Fig. 6. Diagrams in the plate from the concentrated force $P = 1000 \text{ N}$:
 а – deflection (maximum deflection 0,44785 m.); б – bending moment M_x ; в – bending moment M_y ;
 д – longitudinal force N_x ; е – longitudinal force N_x ; е – shear force S_{xy}

Добавим предварительное натяжение силой $N_y(x, y) = 1000$ Н/м (рис. 8). Получили уменьшение прогиба от значения 0,44785 м – без учета преднапряжения, до 0,257944 м. – с учетом предварительного растяжения. Результаты занесем в таблицу (строки 2 и 3). Изгибающие моменты и продольные силы уменьшились (рис. 8, б – 8, е).

Если одновременно задать растяжения силами $N_x(x, y) = 1000$ Н/м и $N_y(x, y) = 1000$ Н/м, тогда: – максимальный прогиб составит 0,1864 м; – изгибающий момент $M_x = 150$ Н·м/м, – изгибающий момент $M_y = 550$ Н·м/м. (Теоретически можно одновременно растягивать пластину по двум направлениям, однако, практически это трудно реализуется).

Еще раз следует отметить, что, при преднапряжении равном 1 кН/м, в окрестности сосредоточенной силы ($P = 1000$ Н), продольные внутренние силы достигают значений порядка 4000 кН/м. Объяснить это можно наличием большой кривизны базисной поверхности, учитываемой нелинейными деформациями

$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$. Сгущение конечно-разностной сетки

этот эффект не уменьшило. Видимо, к уравнению Сен-Венана следует добавить еще два уравнение равновесия (26) и (27), с целью вычисления мембранных смещений $u_0(x, y)$,

$v_0(x, y)$. Тогда деформации будут вычисляться по следующим формулам: $\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$ и

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2.$$

Одновременное действие сил $P = 1000$ Н, $N_x = 1000$ Н/м дает прогиб 0,27 м (строка 4, таблицы), – однако, не уменьшает прогиб. Увеличение на порядок продольной составляющей $N_y = 10000$ Н/м, уменьшает прогиб в три раза (строка 5 таблицы), однако напряжения не удовлетворяют прочности. Кроме этого, какова бы ни была поперечная нагрузка, при достаточно больших значениях величины продольной растягивающей силы, расчет сводится к расчету мембраны.

1	Изменение прогиба и внутренних силовых факторов	w_{\max}	M_x	M_y	N_x	N_y	S_{xy}
		м	Н·м/м	Н·м/м	Н/м	Н/м	Н/м
2	$P = 1000$ Н, $N_x = 0$, $N_y = 0$	0,448	200	700	$12 \cdot 10^6$	$160 \cdot 10^6$	$6 \cdot 10^6$
3	$P = 1000$ Н, $N_y = 1000$ Н/м	0,25	180	600	$6 \cdot 10^6$	$40 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$
4	$P = 1000$ Н, $N_x = 1000$ Н/м	0,27	160	600	$4 \cdot 10^6$	$50 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$
5	$P = 1000$ Н, $N_y = 10000$ Н/м	0,0803	140	400	$3 \cdot 10^6$	$0,4 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^6$

6.2. Расчет с помощью уравнений Кармана

Выпишем уравнения (24) и (33); применим итерационный метод решения системы уравнений.

Вариант 1. На первой итерации в уравнении (24) примем $w(x, y) = 0$ (возможно любое приближение). Решаем плоскую задачу теории упругости. Найденные функции напряжений подставляем в уравнение (33) и решаем задачу об изгибе пластинки. Полученные прогибы $w(x, y)$ вновь подставляем в правую часть уравнения (24). Итерационную процедуру повторяем.

После первой итерации проверка решения показала выполнение уравнений неразрывности деформаций $\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$ во всех узлах конечно-разностной сетки. Прогиб (рис. 9), естественно, равнялся линейному значению 0,257955 м (см. строку 3 таблицы и рис. 9, а). Тогда как на последующих итерациях невязки увеличивались. Решения нельзя считать верными.

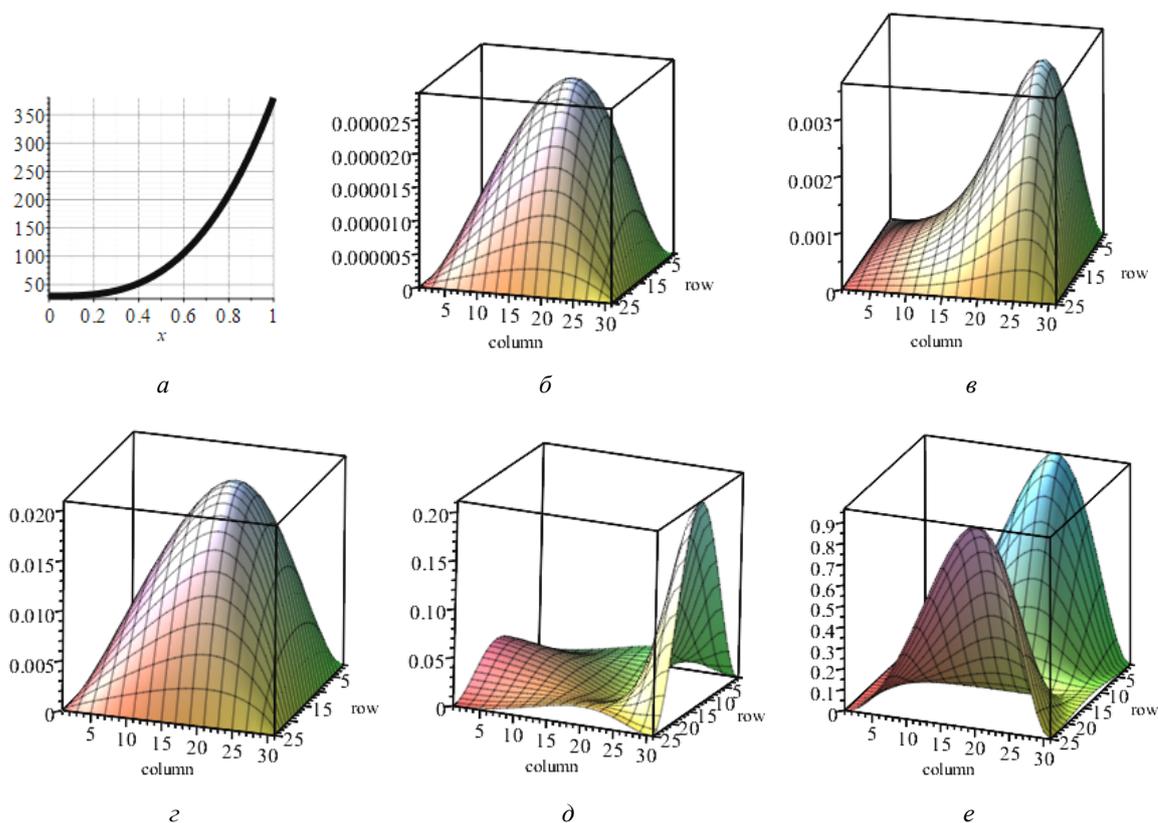


Рис. 7. Эпюры в пластине от воздействия температуры:

a – эпюра приращения температуры (в Кельвинах) $\Delta T_h = T_h(x / L_x)^3$; *b* – прогиб (максимальный прогиб 0,000029 м); *c* – изгибающий момент M_x ; *d* – изгибающий момент M_y ; *e* – продольная сила N_x ; *e* – продольная сила N_y

Fig. 7. Diagrams in the plate from the effect of temperature:

a – diagram of the temperature increment (in Kelvin) $\Delta T_h = T_h(x / L_x)^3$; *b* – deflection (maximum deflection 0,000029 m); *c* – bending moment M_x ; *d* – bending moment M_y ; *e* – longitudinal force N_x ; *e* – longitudinal force N_y

Вариант 2. Если начать расчет с уравнения равновесия (33), приняв в его правой части $\varphi(x, y) = 0$, тогда мембранные силы равны нулю. Имеем модель жесткого изгиба пластины; прогиб равен 0,44784 м. (строка 2 таблицы для $P = 1000$ Н, $N_x = 0$, $N_y = 0$). Найденная функция прогиба подставляется в уравнение (24) – получаем решение $\varphi(x, y)$. Эпюру вычисленных мембранных сил $N_y = 1000$ Н/м по функциям напряжений приведем на рис. 9, б.

Следующая итерация в этом варианте расчета, по существу есть переход к варианту 1.

Отсутствие сходимости решений, вероятно, можно объяснить, что в уравнении равновесия (33) матрица жесткости имеет порядок 10^6 , а уравнение неразрывности (24) содержит коэффициенты порядка 10^{-6} – система уравнений становится плохообусловленной. Задача нелинейная, поэтому для обеспечения сходимости следует применять приращение по нагрузке. Тогда невязка f уравнений неразрывности $f = \nabla^2 \nabla^2 \varphi$ уменьшаются.

«Аппарат теории Кармана относительно весьма сложен. Сложностью и громоздкостью числовых выкладок, связанных с решением уравнений (24), (33), объясняется относительно небольшое число доведенных до числового конца решений в области теории этих пластин» [6].

В. В. Новожилов относит формулы Кармана к промежуточному случаю между классической теорией слабоизогнутых пластин и сильным изгибом пластин [8].

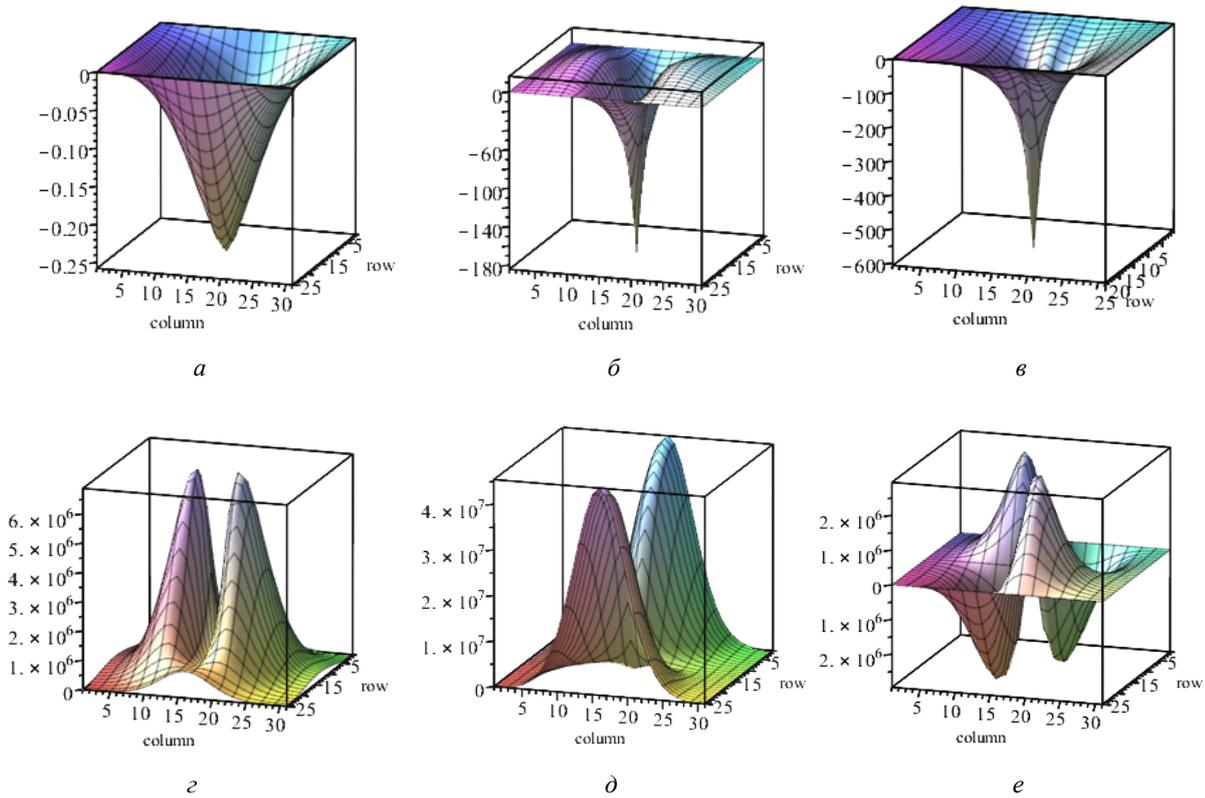


Рис. 8. Эпюры в пластине от действия сосредоточенной силы, температуры и предварительно растягивающей силы $N_y = 1000$:

a – эпюра приращения температуры (в Кельвинах) $\Delta T_h = T_h(x/L_x)^3$; b – прогиб (максимальный прогиб 0.000029 м); c – изгибающий момент M_x ; d – изгибающий момент M_y ; e – продольная сила N_x ; f – продольная сила N_y

Fig. 8. Diagrams in the plate from the action of concentrated force, temperature and pre-tensile force $N_y = 1000$:
 a – temperature increment diagram (in Kelvin) $\Delta T_h = T_h(x/L_x)^3$; b – deflection (maximum deflection 0,000029 m);
 c – bending moment M_x ; d – bending moment M_y ; e – longitudinal force N_x ; f – longitudinal force N_y

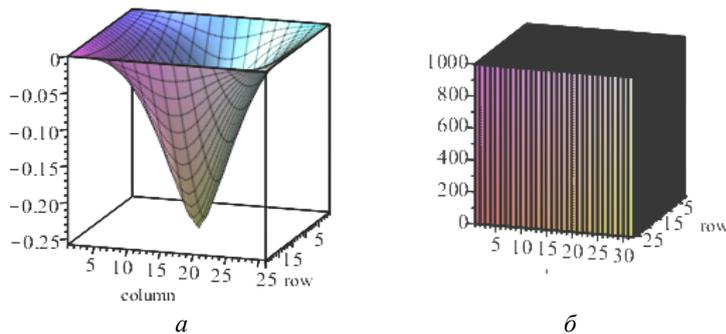


Рис. 9. Эпюры, полученные решением уравнений Кармана:
 a – эпюра прогиба; b – эпюра мембранной силы N_y

Fig. 9. Diagrams obtained by solving Karman's equations:
 a – deflection diagram; b – membrane force diagram N_y

Заклучение

Расчет тонкой пластинки на действие сосредоточенной силы показал, что получаемые продольные силы, зависящие от квадратов первых производных функции прогиба настолько велики, что напряжения на два-три порядка превышают напряжения, допускаемые для рассматриваемого ортотропного материала.

При одновременном действии поперечной силы и растягивающей поверхности нагрузки прогиб уменьшился на 80%. Изгибаемая поверхность становится более монотонной, это повлекло к уменьшению максимальных изгибающих моментов на 11 и 14 %, соответственно, поперек и вдоль армирующих волокон композита, а продольные силы уменьшились в 2 и 4 раза.

Сравнение расчетов, полученными от действия сосредоточенной силы и изменения температуры показало, что в данной гибкой пластинке малой толщины, эффект температурного воздействия незначителен.

Аппарат теории Кармана относительно весьма сложен в численной реализации. Простой итерационный процесс решения системы уравнений в смешанной форме не привел к сходимости прогибов и функции напряжений. Смешанная модель в напряжениях и перемещениях требует дополнительных исследований сходимости, например, применения методов релаксаций.

Модель деформирования Сен-Венана, как модель гибкой пластины регламентированного прогиба, позволяет решать задачи обеспечения жесткости и прочности продольно-поперечного изгиба ортотропных пластин используемых в технике.

Библиографические ссылки

1. Morozov E. V., Lopatin A. V. Analysis and design of the flexible composite membrane stretched on the spacecraft solar array frame // *Composite Structures* 94 (2012), 3106–3114.
2. Лопатин А. В., Шумкова Л. В., Гантовник В. Б. Нелинейная деформация ортотропной мембраны, растянутой на жесткой раме солнечного элемента. В: Протокол 49-й конференции AIAA / ASME / ASCE / AHS / ASC, структурной динамики и материалов, 16-й конференции AIAA / ASME / AHS по адаптивным структурам. 10t, Schaumburg, IL: AIAA-2008-2302; 7–10 апреля 2008 г.
3. URL: <https://fireman.club/statyi-polzovateley/drony-kvadrokoptyery-primenenie>.
4. Композиционные материалы : справочник / В. В. Васильев, В. Д. Протасов, В. В. Болотин и др. М. : Машиностроение, 1990. 512 с.
5. Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках. М. : Мир, 1982. 544 с.
6. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля. Часть II. Сложный изгиб, устойчивость стержней и устойчивость пластин. Л. : Судпромгиз, 1941. 960 с.
7. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля. Часть 1. Том 1. М. : Морской транспорт, 1945. 618 с.
8. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Л.-М. : Гостехиздат, 1948. 212 с.
9. Тимошенко С. П. Теория упругости. Л.-М. : ОНТИ, 1937. 451 с.
10. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М. : Наука, 1975. 576 с.
11. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М.-Л. : Гостехиздат, 1946. С. 532.
12. Ляв А. Математическая теория упругости. М. : ОНТИ, 1935.
13. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. М. : Гостехиздат, 1956. 419 с.
14. Ильющин А. А., Ленский В. С. Сопротивление материалов. М. : Физматгиз, 1959. 372 с.
15. Каудерер Г. Нелинейная механика. М. : Изд-во иностранной литературы. 1961. 778 с.
16. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. М.-Л. : ОГИЗ, 1947. 465 с.
17. Лукаш П. А. Основы нелинейной строительной механики. М. : Стройиздат, 1978. 204 с.
18. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Издательство академии наук СССР, М., 1954. 648 с.
19. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М. : Наука, 1977. 416 с.
20. Самарский А. А. Теория разностных схем. М. : Наука, 1977. 656 с.
21. Сабиров Р. А. Сложный изгиб ортотропной пластины // *Сибирский журнал науки и технологий*. 2020. Т. 21, № 4. С. 499–513. Doi: 10.31772/2587-6066-2020-21-4-499-513.
22. Говорухин В., Цыбулин В. Компьютер в математическом исследовании : учебный курс. СПб. : Питер, 2001. 624 с.

References

1. Morozov E. V., Lopatin A. V. Analysis and design of the flexible composite membrane stretched on the spacecraft solar array frame // *Composite Structures* 94 (2012), 3106–3114.
2. Lopatin A. V., Shumkova L. V., Gantovnik V. B. Nelinejnaya deformaciya ortotropnoj membrany, rastyanutoj na zhestkoj rame solnechnogo elementa. V: *Protokol 49-j konferencii AIAA / ASME / ASCE / AHS / ASC, strukturnoj dinamiki i materialov, 16-j konferencii AIAA / ASME / AHS po adaptivnym strukturam*. 10t, Schaumburg, IL: AIAA-2008-2302; 7–10 aprelya 2008 p.
3. URL: <https://fireman.club/statyi-polzovateley/drony-kvadrokoptery-primenenie>.
4. *Kompozicionnye materialy : Spravochnik / V. V. Vasil'ev, V. D. Protasov, V. V. Bolotin i dr. ; M. : Mashinostroenie, 1990. 512 p.*
5. Lukasevich S. *Lokal'nye nagruzki v plastinah i obolochkah*. Moskva : Mir, 1982. 544 p.
6. Papkovich P. F. *Stroitel'naya mekhanika korablya. Chast' II. Slozhnyj izgib, ustojchivost' sterzhnej i ustojchivost' plastin*. Leningrad, Sudpromgiz 1941. 960 p.
7. Papkovich P. F. *Stroitel'naya mekhanika korablya. Chast' 1. Tom 1*. Moskva, Izd. Morskogo transport. 1945. 618 p.
8. Novozhilov V. V. *Osnovy nelinejnoj teorii uprugosti*. L.-M. : Gostekhizdat, 1948. 212 p.
9. Timoshenko S. P. *Ustojchivost' uprugih sistem*. Moskva-Leningrad: Gostekhizdat, 1946, 532 p.
10. Timoshenko S. P., Yung D., *Inzhenernaya mekhanika*. Moskva : Mashgiz, 1960. 508 p.
11. Timoshenko S. P. *Ustojchivost' uprugix sistem*. M.-L. : Gostexizdat, 1946, p. 532.
12. Lyav A. *Matematicheskaya teoriya uprugosti*. Moskva, ONTI. 1935.
13. Vol'mir A. S. *Gibkie plastinki i obolochki*. Moskva : Gostekhizdat, 1956. 419 p.
14. Il'yushin A. A., Lenskij V.S. *Soprotivlenie materialov*. Moskva: Fizmatgiz, 1959. 372 p.
15. Kauderer G. *Nelinejnaya mekhanika*. Moskva : Izd-vo inostrannoj literatury. 1961. 778 p.
16. Lejbenzon L. S. *Kurs teorii uprugosti*. Moskva – Leningrad, OGIZ. 1947. 465 p.
17. Lukash P. A. *Osnovy nelinejnoj stroitel'noj mekhaniki*. Moskva, Strojizdat, 1978. 204 p.
18. Muskhelishvili N. I. *Some main problems of the mathematical theory of elasticity*. Publishing House of the USSR Academy of Sciences, M.: 1954. 648 p.
19. Lekhnickij S. G. *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela*. Moskva : Nauka, 1977. 416 p.
20. Samarskij A. A. *Teoriya raznostnyh skhem. – Moskva: Nauka, 1977. 656 p.*
21. Sabirov R. A. Compound bending of an orthotropic plate. *Siberian Journal of Science and Technology*. 2020, Vol. 21, No. 4, P. 499–513. Doi: 10.31772/2587-6066-2020-21-4-499-513.
22. Govoruhin V., Cybulin V. *Komp'yuter v matematicheskom issledovanii. Uchebnyj kurs*. SPb. : Piter, 2001. 624 p.

© Саби́ров Р. А., 2023

Саби́ров Раши́д Альтаво́вич – кандидат технических наук, доцент кафедры технической механики; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: rashidsab@mail.ru.

Sabirov Rashid Altavovich – Cand. Sc., Associate Professor; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: rashidsab@mail.ru.
