УДК 539.374
Doi: 10.31772/2712-8970-2023-24-1-35-41

Для цитирования: Сенашов С. И., Савостьянова И. Л., Лукьянов С. В. Упруго-пластическое кручение двухслойного стержня // Сибирский аэрокосмический журнал. 2023. Т. 24, № 1. С. 35–41. Doi: 10.31772/2712-8970-2023-24-1-35–41.

For citation: Senashov S. I., Savostyanova I. L., Lukyanov S. V. [Elastic-plastic torsion of a two-layer rod]. *Siberian Aerospace Journal.* 2023, Vol. 24, No. 1, P. 35–41. Doi: 10.31772/2712-8970-2023-24-1-35-41.

Упруго-пластическое кручение двухслойного стержня

С. И. Сенашов*, И. Л. Савостьянова, С. В. Лукьянов

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31
*E-mail: sen@sibsau.ru

Изучается упруго-пластическое кручение двухслойного стержня под действием крутящего момента. Предполагается, что стержень состоит из двух слоев. Каждый слой обладает своими упругими свойствами, но пластические свойства у обоих слоев одинаковые. Граница контакта слоев расположена вдоль оси ox. Боковая граница стержня свободна от напряжений, на границе раздела непрерывны перемещения и напряжения. Компоненты тензора напряжений в точке вычисляется с помощью контурных интегралов, полученных из законов сохранения, вычисленных по боковой границе. Далее второй инвариант тензора напряжений сравнивается с пределом текучести. В тех точках, где достигается предел текучести реализуется пластическое состояние, в остальных – упругое. Это позволяет построить границу между пластической и упругой областями. Данная методика дает способ вычислить упруго-пластические границы для основных прокатных профилей стержней. Это предполагается сделать в последующих работах. Напоминаем, что ранее с помощью законов сохранения решены основные краевые задачи для пластической двумерном среды, упруго-пластического кручения изотропных стержней и упругих сред для тел конечных размеров.

Ключевые слова: двухслойный упруго-пластический стержень, законы сохранения, точные решения.

Elastic-plastic torsion of a two-layer rod

S. I. Senashov*, I. L. Savostyanova, S. V. Lukyanov

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology
31, Krasnoyarskii rabochii prospekt, Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation
*E-mail: sen@sibsau.ru

We study the elastic-plastic torsion of a two-layer rod under the action of torque in this article. It is assumed that the rod consists of two layers. Each layer has its own elastic properties, but the plastic properties of both layers are the same. The contact boundary of the layers is located along the oh axis. The lateral boundary of the rod is stress-free, displacements and stresses are continuous at the interface. The components of the stress tensor at a point are calculated using contour integrals derived from conservation laws calculated along the lateral boundary. Next, the second invariant of the stress tensor is compared with the yield strength. At those points where the yield point is reached, the plastic state is realized, in the rest – elastic. This allows you to build a boundary between the plastic and elastic regions. This technique provides a way to calculate elastic-plastic boundaries for the main rolling profiles of rods. This is supposed to be done in subsequent works. We remind you that earlier, with the help of conservation laws, the main *boundary value problems for a plastic two-dimensional medium, elastic-plastic torsion of isotropic rods and elastic media for bodies of finite dimensions were solved.*

Keywords: two-layer elastic-plastic rod, conservation laws, exact solutions.

Введение

Статья продолжает серию работ посвященных использованию законов сохранения для решения краевых задач уравнений механики деформируемого твердого тела. Уравнения упругости и пластичности уже достаточно давно изучаются с помощью симметрий [1; 2]. Далее было показано, законы сохранения можно использовать и они были использованы для решения краевых задач для двумерных уравнений пластичности [3–12]. Эти работы показали, что законы сохранения более хорошо подходят для решения краевых задач, чем точечные симметрии, на которые ранее делалась ставка [2]. Это объясняется тем, что симметрии по своей природе являются локальными, в отличие от законов сохранения – глобальными по своей сути. Далее законы сохранения были применены для решения упруго-пластических задач о кручении стержней и изгибе консолей, а также решению упруго-пластических задач для пластин конечных размеров, ослабленных отверстиями [13–18]. В настоящей работе показано, что законы сохранения можно использовать и для решения краевых задач для многослойных материалов.

Постановка задачи

Рассмотрим прямолинейный стержень, поперечное сечение которого изображено на рис. 1. Пусть S_1 и S_2 области, занятые упруго-пластическими изотропными материалами, у которых предел текучести при чистом сдвиге одинаковый и равен k, а упругие постоянные Ламе различны и равны λ_1, μ_1 и λ_2, μ_2 соответственно. Пусть линия раздела материалов прямолинейна. Выберем ось координат *OX* вдоль линии раздела. Предполагается, как обычно, что боковая поверхность стержня свободна от напряжений, а стержень скручивается парой сил с моментом

$$M = \iint (y\sigma_{13} - x\sigma_{23})dxdy .$$

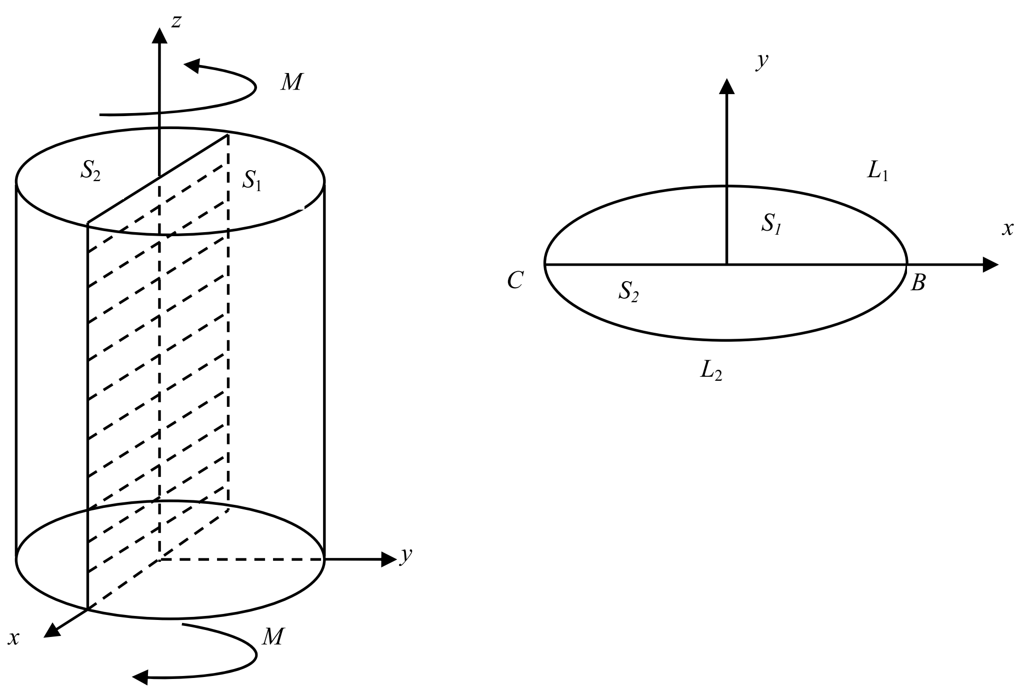

Рис. 1. Кручение двухслойного стержня

Fig. 1. Twisting of a two-layer rod

В этом случае уравнения, описывающие напряженное состояние в области $S_i \quad i = 1{,}2$ имеют вид

$$F_1 = \partial_x \sigma_{13} + \partial_y \sigma_{23} = 0, \quad F_2 = \partial_y \sigma_{13} - \partial_x \sigma_{23} + \mu_i \omega = 0, \quad \mu_i \omega = K_i, \tag{1}$$

где σ_{13}, σ_{23} – компоненты тензора напряжений, ω – угол закручивания, он предполагается постоянным.

На боковой поверхности стержня выполняются условия

$$\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 = 0, \quad \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 = k^2, \tag{2}$$

которые означают, что боковая поверхность свободна от напряжений и находится в пластическом состоянии.

Из (2) получаем

$$\sigma_{13} = kn_1, \sigma_{23} = -kn_2. \tag{3}$$

Также предполагаем, что на линии раздела *CD* компоненты тензора напряжений непрерывны, это означает отсутствие разрыва напряжений для данного стержня вдоль *CD*.

Законы сохранения

Закон сохранения ищем в виде

$$A_x + B_y = \rho_1 F_1 + \rho_2 F_2, \tag{4}$$

где ρ_1, ρ_2 – некоторые функции, одновременно тождественно не равные нулю, буквенные индексы внизу означают производные по соответствующим переменным.

Замечание. Более подробную информацию о законах сохранения, их вычисления и использования можно найти в цитированной выше литературе.

Пусть

$$A = \alpha^1 u + \alpha^2 v + \alpha^3, \quad B = \beta^1 u + \beta^2 v + \beta^3, \tag{5}$$

где для удобства положили $\sigma_{13} = u, \sigma_{23} = v$, $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$, $\beta^1, \beta^2, \beta^3$ – предполагаются функциями только x, y.

Подставляя (5) в (4) получаем

$$\alpha^1 = \beta^2, \ \alpha^2 = -\beta^1, \ \alpha_x^1 - \alpha_y^2 = 0, \ \alpha_y^1 + \alpha_x^2 = 0, \ \alpha_x^3 + \beta_y^3 = -\alpha^2 K_i, \tag{6}$$

Пусть

$$\alpha_x^{1(i)} - \alpha_y^{2(i)} = 0, \ \alpha_y^{1(i)} + \alpha_x^{2(i)} = 0, \ \alpha_x^{3(i)} + \beta_y^{3(i)} = -\alpha^2 K_i, \quad i = 1{,}2 \tag{7}$$

Здесь индекс *i* в скобках соответствует области S_i.

Предположим, что в точке x_0, y_0 подынтегральные функции имеют особенность и эта точка находится в круге радиуса $\varepsilon : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$ (рис. 2), тогда из (4) получаем

$$\iint_S (A_x + B_y) dxdy = \iint_{S_1} ({A^1}_x + {B^1}_y) dxdy + \iint_{S_2} ({A^2}_x + {B^2}_y) dxdy = -\int_\varepsilon A^1 dy - B^1 dx +$$

$$+\int_{L_1} A^1 dy - B^1 dx + \int_{L_2} A^2 dy - B^2 dx + \int_{CD} A^1 dy - B^1 dx + \int_{DC} A^2 dy - B^2 dx = 0$$

Имеем вдоль *CD*

$$\int_{CD} A^1 dy - B^1 dx + \int_{DC} A^2 dy - B^2 dx = \int_{CD} (\alpha^{1(1)} u + \alpha^{2(1)} v + \alpha^{3(1)}) dy - (-\alpha^{2(1)} u + \alpha^{1(1)} v + \beta^{3(1)}) dx +$$

$$+\int_{DC} (\alpha^{1(2)} u + \alpha^{2(2)} v + \alpha^{3(2)}) dy - (-\alpha^{2(2)} u + \alpha^{1(2)} v + \beta^{3(2)}) dx = 0$$

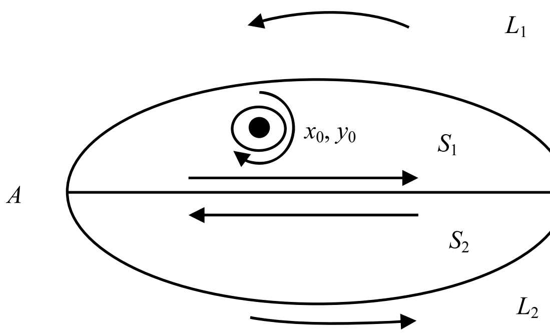

Рис. 2. Схема взятия интегралов по поперечному сечению

Fig. 2. The scheme of taking integrals over the cross section

Поскольку вдоль CD $dy = 0$, то полагаем $\beta^{3(i)} = 0,\ \alpha_x^{3(i)} = \alpha^{2(i)} K_i$, поэтому $\alpha^{1(1)} = \alpha^{1(2)}$, $\alpha^{2(1)} = \alpha^{2(2)}$.

В результате получаем

$$\int\limits_{\varepsilon} A^1 dy - B^1 dx = \int\limits_{L_1} A^1 dy - B^1 dx + \int\limits_{L_2} A^2 dy - B^2 dx. \tag{8}$$

Воспользуемся формулой (8) для нахождения функций u, v в точке

Для этого рассмотрим решение уравнений (7) в виде

$$\alpha^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},\ \ \alpha^2 = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},\ \ \alpha^3 = \omega\mu_1 \operatorname{arctg}\frac{x - x_0}{y - y_0}. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8) получаем

$$\int\limits_{\varepsilon} A^1 dy - B^1 dx = \int\limits_{\varepsilon} (\alpha^1 u + \alpha^2 v + \alpha^3) dy - (-\alpha^2 u + \alpha^1 v) dx =$$

$$= \int\limits_{\varepsilon} \left(\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} u - \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} v + \varpi\mu_1 \operatorname{arctg}\frac{x - x_0}{y - y_0} \right) dy - \left(\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} u \right) dx +$$

$$+ \int\limits_{\varepsilon} \left(\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} v \right) dx$$

Пусть $x - x_0 = \varepsilon\cos\phi, y - y_0 = \varepsilon\sin\phi.$

Тогда получаем

$$\int\limits_{\varepsilon} A^1 dy - B^1 dx = \int\limits_0^{2\pi} [(u\cos\phi + v\sin\phi)\cos\phi + (u\sin\phi + v\cos\phi)\sin\phi] d\phi = \int\limits_0^{2\pi} u d\phi = 2\pi u(x_0, y_0).$$

В последнем равенстве использована теорема о среднем и предельный переход $\varepsilon \to 0$.

В результате из формулы (8) следует

$$2\pi\sigma_{13}(x_0, y_0) =$$

$$\int\limits_{L_1} \left(\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 + \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 + \omega\mu_1 \operatorname{arctg}\frac{x = x_0}{y - y_0} \right) dy - \tag{10}$$

$$- \left(\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_1 - \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} kn_2 \right) dx +$$

$$+\int_{L_2}\left(\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}kn_1+\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}kn_2+\omega\mu_2\operatorname{arctg}\frac{x=x_0}{y-y_0}\right)dy-$$

$$-\left(\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}kn_1-\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}kn_2\right)dx.$$

Рассмотрим решение уравнений (7) в виде

$$\alpha^1=\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},\quad \alpha^2=\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},\quad \alpha^3=\frac{1}{2}\omega\mu_2\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2). \tag{11}$$

Подставляем (11) в (8) получаем

$$2\pi\sigma_{23}(x_0,y_0)=$$

$$\int_{L_1}(\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}kn_1-\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}kn_2+\frac{1}{2}\omega\mu_2\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)dy-$$

$$-(-\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}kn_1+\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}kn_2)dx+ \tag{12}$$

$$+\int_{L_2}(-\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}kn_1+\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}kn_2+\frac{1}{2}\omega\mu_2\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)dy-$$

$$-(-\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}kn_1+\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}kn_2)dx.$$

Заключение

Формулы (10), (12) позволяют вычислить значения компонент тензора напряжений во всех точках поперечного сечения. Далее в каждой точке x_0, y_0 проверяется условие пластичности $\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2=k^2$. Те точки, где $\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2<k^2$. принадлежат упругой зоне, а остальные точки – пластической области. Тем самым описанная процедура позволяет выделить пластические и упругие зоны и построить упруго-пластическую границу, которая заранее была неизвестна и подлежала определению.

Библиографические ссылки

1. Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенашов С. И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск, Наука, 1985. 144 с.

2. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1978. 399 с.

3. Сенашов С.И. О законах сохранения уравнений пластичности. Доклады АН СССР. 1991. т. 320. № 3. с. 606.

4. Сенашов С. И. Законы сохранения и точное решение задачи Коши для уравнений пластичности. Доклады РАН. 1995. т. 345. № 5. с. 619.

5. Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск, СО РАН. 201 с.

6. Senashov S. I., Vinogradov A. M. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity // Proc. Edinburg Math.Soc. 1988. pp. 415–439.

7. Senashov S. I., Yakchno A. N. Reproduction of solutions for bidimensional ideal plasticity // Journal of Non -Linear Mechanics 42 (2007). pp. 500–503.

8. Senashov S. I., Yakchno A. N. Deformation of characteristic curves of the plane ideal plasticity equations by point symmetries // Nonlinear analysis 71(2009). pp. 1274–1284

9. Senashov S. I., Yakchno A. N. Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity // SIGMA 8 (2012). 071. P. 16.

10. Senashov S. I., Yakchno A. N. Some symmetry group aspects of a perfect plane plasticity system // J. Phys. A: Math. Theor. 46 (2013) 355202.

11. Senashov S. I., Yakchno A. N. Conservation Laws of Three-Dimensional Perfect Plasticity Equations under von Mises Yield Criterion // Abstract and Applied Analysis Volume 2013 (2013), Article ID 702132. 8 p.

12. Гомонова О. В., Сенашов С. И. Определение областей упругого и пластического деформирования в задаче об одноосном растяжении пластины, ослабленной отверстиями // Журнал ПМТФ. 2021. Т. 62. № 1.

13. Сенашов С. И., Филюшина Е. В. Законы сохранения уравнений плоской теории упругости // Вестник СибГАУ. 2014. № 1(53). С. 79–81.

14. Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Об упругом кручении вокруг трех осей // Сибирский журнал индустриальной математики. 2021. Т. 24, № 1. С. 120–125.

15. Senashov S. I., Gomonova O. V. Construction of Elastoplastic Boundary in Problem of Tension of a Plate Weakened by Holes // Intern. J. Non. Lin. Mech. 2019. V. 108. Pp. 7–10.

16. Gomonova O. V., Senashov S. I. Determination of elastic and plastic deformation regions in the problem of uniaxial tension of a plate weakened by holes // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2021. Vol. 62, № 1. С. 179–186.

17. Senashov S. I., Kondrin A. V.; Cherepanova, O. N. On Elastoplastic Torsion of a Rod with Multiply Connected Cross-Section // J. Siberian Federal Univ., Math. & Physics. 2015. 7(1) P. 343–351.

18. Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A. V. Elastoplastic Bending of Beam // J. Siberian Federal Univ., Math. & Physics. 2014. 7(2). P. 203–208.

References

1. Annin B. D., Bytev V. O., Senashov S. I. *Gruppovye svojstva uravnenij uprugosti i plastichnosti* [Group properties of elasticity and plasticity equations]. Novosibirsk. Nauka, 1985, 144 p.

2. Ovsyannikov L. V. *Gruppovoj analiz differencial'nyh uravnenij* [Group analysis of differential equations]. Moscow. Nauka, 1978, 399 p.

3. Senashov S. I. On the laws of conservation of plasticity equations. *Doklady AN SSSR*. 1991. Vol. 320. № 3, p. 606.

4. Senashov S. I. [Conservation laws and the exact solution of the Cauchy problem for plasticity equations] *Doklady RAN*. 1995. Vol. 345. № 5, p. 619.

5. Kiryakov P. P., Senashov S. I., Yakhno A. N. *Prilozhenie simmetrij i zakonov sohraneniya k resheniyu differencial'nyh uravnenij* [Application of symmetries and conservation laws to the solution of differential equations]. Novosibirsk. SO RAN. 2001, 201 p.

6. Senashov S. I., Vinogradov A. M. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity // Proc. Edinburg Math.Soc. 1988. Pp. 415–439.

7. Senashov S. I., Yakchno A. N. Reproduction of solutions for bidimensional ideal plasticity // Journal of Non-Linear Mechanics 42 (2007). Pp. 500–503.

8. Senashov S. I., Yakchno A. N. Deformation of characteristic curves of the plane ideal plasticity equations by point symmetries // Nonlinear analysis 71(2009). P. 1274–1284.

9. Senashov S. I., Yakchno A. N. Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity // SIGMA 8 (2012), 071. P. 16.

10. Senashov S. I., Yakchno A. N. Some symmetry group aspects of a perfect plane plasticity system // J. Phys. A: Math. Theor. 46 (2013) 355202.

11. Senashov S. I., Yakchno A. N. Conservation Laws of Three-Dimensional Perfect Plasticity Equations under von Mises Yield Criterion // Abstract and Applied Analysis Volume 2013 (2013). Article ID 702132. 8 p.

12. Gomonova O. V., Senashov S. I. Determination of elastic and plastic deformation regions in the problem of uniaxial stretching of a plate weakened by holes // *Journal PMTF*. 2021. Vol. 62. № 1.

13. Senashov S. I., Filyushina E. V. [Conservation laws of the equations of the plane theory of elasticity] *Vestnik SibGAU*. 2014. № 1 (53), pp. 79–81.

14. Senashov S. I., Savostyanova I. L. On elastic torsion around three axes // *Siberian Journal of Industrial Mathematics*. 2021, Vol. 24, № 1, pp. 120–125.

15. Senashov S. I., Gomonova O. V. Construction of Elastoplastic Boundary in Problem of Tension of a Plate Weakened by Holes // Intern. J. Non. Lin. Mech. 2019. Vol. 108, pp. 7–10.

16. Gomonova O. V., Senashov S. I. Determination of elastic and plastic deformation regions in the problem of uniaxial tension of a plate weakened by holes // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2021. Vol. 62, № 1, c. 179–186.

17. Senashov S. I., Kondrin A. V.; Cherepanova, O. N. On Elastoplastic Torsion of a Rod with Multiply Connected Cross-Section // J. Siberian Federal Univ., Math. & Physics. 2015. 7(1), pp. 343–351.

18. Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A. V. Elastoplastic Bending of Beam // J. Siberian Federal Univ., Math. & Physics. 2014. 7(2), pp. 203–208.

Сенашов Сергей Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры ИЭС; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: sen@sibsau.ru.

Савостьянова Ирина Леонидовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры ИЭС; Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: savostyanova@sibsau.ru.

Лукьянов Сергей Владимирович – аспирант, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева. E-mail: lukyanovsv@sibsau.ru.

Senashov Sergey Ivanovich – Dr. Sc., Professor, Head of the Department IES; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: sen@sibsau.ru.

Savostyanova Irina Leonidovna – Cand. Sc., Associate Professor, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: savostyanova@sibsau.ru.

Lukyanov Sergey Vladimirovich – graduate student; Reshetnev Siberian State University of Science and Technology. E-mail: lukyanovsv@sibsau.ru.