УДК 534.121.1

Вестник СибГАУ
Т. 16, № 1. С. 41–45

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ, ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ В ЧЕТЫРЕХ УГЛАХ**

П. О. Деев*, А. В. Лопатин

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660014, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31
*E-mail: prokhor777@gmail.com

*Трехслойные пластины со свободными краями широко применяются в конструкциях современных космических аппаратов, составляя силовую основу корпусов негерметичного исполнения. Основная частота колебаний трехслойной пластины используется для оценки весовой эффективности конструкции, что важно при проектировочных расчетах. Рассматривается задача определения основной частоты колебаний прямоугольной трехслойной пластины со свободными краями, у которой все четыре угла шарнирно закреплены. Пластина имеет симметричную структуру пакета, состоящего из одинаковых несущих слоев и ортотропного заполнителя. В такой постановке задача не имеет до настоящего времени аналитического решения. Это связано с необходимостью точного удовлетворения статических граничных условий на свободных краях пластины, что крайне затруднительно. Дается аналитическое решение поставленной задачи с использованием модели трехслойной пластины на основе теории слоистых композитов типа Рейсснера. Свободные колебания трехслойной пластины описываются вариационным уравнением, полученным на основе принципа Гамильтона. Для решения вариационного уравнения использован обобщенный метод Галеркина. Метод позволяет использовать аппроксимирующие функции, не обязательно точно удовлетворяющие статическим граничным условиям на свободных краях пластины, так как эти граничные условия удовлетворяются интегрально. В работе в качестве аппроксимирующих выбраны тригонометрические функции. Эти функции позволяют с высокой точностью представить изменения прогиба и угла поворота вдоль соответствующей координаты трехслойной пластины с рассматриваемым закреплением. В результате реализации обобщенного метода Галеркина задача сведена к однородной системе линейных алгебраических уравнений, из условия существования нетривиального решения которой получена аналитическая формула для основной частоты колебаний. По формуле вычислены частоты для нескольких вариантов пластин с различными сочетаниями размеров в плане и толщин слоев. Верификация полученных результатов аналогичным расчетом в конечно-элементном пакете показала высокую точность полученной формулы и возможность ее использования в проектировочных расчетах при минимальных вычислительных затратах.*

*Ключевые слова: трехслойная пластина, основная частота колебаний, обобщенный метод Галеркина.*

Vestnik SibGAU
Vol. 16, No. 1, P. 41–45

**FUNDAMENTAL FREQUENCY DETERMINATION FOR SANDWICH PLATE SIMPLY SUPPORTED IN FOUR CORNERS**

P. O. Deev*, A. V. Lopatin

Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev
31, Krasnoyarsky Rabochy Av., Krasnoyarsk, 660014, Russian Federation
*E-mail: prokhor777@gmail.com

*Sandwich plates with free edges are widely used in modern aerospace constructions making power base of non-hermetical spaceship bodies. Fundamental frequency of sandwich plate is very useful for weight efficiency assessment of construction that is significant in engineering calculations. The article deals with the problem of fundamental frequency calculation for rectangular sandwich plate with free edges and all corners simply-supported. The plate has symmetrical sandwich package structure consisting of two identical face-sheets and orthotropic core. In this formulation the problem has no analytical solution yet. This is due to the necessity of exact satisfaction of static boundary conditions on free edges of the plate; which is very hard to do. In the article the authors provide an analytical solution of the problem, where the sandwich plate model is based on Reissner-type layered composites theory. Variational equation of plate free vibrations derived from Hamilton principle. Solution procedure uses generalized Galerkin method to solve the variational equation. This method allows applying approximating functions that do not necessarily exactly satisfy static boundary conditions on free edges of the plate, as these conditions are satisfied integrally along each edge. In this paper trigonometric functions are applied as approximating functions. For the case* *of plate with four corners simply-supported, trigonometric functions give good accuracy in approximation of plate deflection and rotation along the corresponding coordinate axis. The result of generalized Galerkin method implementation is a system of homogeneous linear algebraic equations and then, an analytical formula for fundamental frequency derives from the condition for the nontrivial solution existence of the system. Fundamental frequencies are calculated using this analytical formula for several variants of plates with different combinations of plate dimensions. Verification by fundamental frequency calculations for the same plates in finite-element package shows very good correlation with obtained analytical formula results. Thereby, resulting analytical formula for fundamental frequency could be successfully used in engineering and design calculations with minimal computational cost and enough accuracy.*

*Keywords: sandwich plate, fundamental frequency, generalized Galerkin method.*

**Введение.** В современных космических аппаратах с корпусами негерметичного исполнения широко используются трехслойные пластины. При проектировочных расчетах трехслойных пластин первая частота колебаний служит удобным критерием весовой эффективности конструкции, так как ее величина зависит от отношения изгибной жесткости и погонной массы. Сегодня для определения частот и форм колебаний трехслойных пластин в основном используются пакеты конечно-элементного моделирования, такие как ANSYS, NASTRAN, COSMOS/M. Они позволяют проводить самый широкий анализ трехслойных конструкций. Недостатками использования пакетов являются значительные вычислительные ресурсы, в некоторых случаях – необходимость привлечения высококвалифицированных специалистов и разработка специальных типов конечных элементов. Поэтому по-прежнему актуально определение первой частоты колебаний трехслойной пластины аналитическими методами. Этому посвящены современные исследования отечественных и зарубежных авторов [1–12]. Однако ряд задач определения первой частоты трехслойных пластин со свободными краями не имеет аналитического решения до сих пор.

Цель работы – аналитическое решение задачи определения первой частоты колебаний прямоугольной трехслойной пластины со свободными краями, у которой все четыре угла шарнирно закреплены, и получение для первой частоты удобной для практических расчетов формулы.

**Постановка задачи.** Рассмотрим прямоугольную трехслойную пластину, у которой во всех четырех углах реализуется закрепление типа неподвижного шарнира. В одном из углов пластины расположим начало декартовой системы координат $OXY$. Размеры пластины по осям $OX$ и $OY$ обозначим $a$ и $b$ соответственно.

Вариационное уравнение изгибных колебаний пластины, согласно [13; 14], запишется следующим образом

$$\int_0^a\int_0^b\Bigg[\left(D_{11}\frac{\partial\theta_x}{\partial x}+D_{12}\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right)\delta\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right)+\left(D_{12}\frac{\partial\theta_x}{\partial x}+D_{22}\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right)\delta\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right)+D_{33}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}\right)+$$
$$+D_{33}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)+K_x\left(\theta_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta\theta_x+ \quad (1)$$
$$+K_x\left(\theta_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)+K_y\left(\theta_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\delta\theta_y+$$
$$+K_y\left(\theta_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\omega^2B_\rho w\delta w\Bigg]dxdy=0,$$

где $w = w(x,y)$ – прогиб пластины; $\theta_x = \theta_x(x,y)$, $\theta_y = \theta y(x,y)$ – углы поворота нормали; $D_{11}$, $D_{12}$, $D_{21}$, $D_{22}$, $D_{33}$ – изгибные жесткости трехслойной пластины ($D_{12} = D_{21}$); $K_x$, $K_y$ – сдвиговые жесткости трехслойной пластины; $B_\rho$ – инерциальный параметр; ω – круговая частота колебаний; δ – знак вариации. Функции $w$, $\theta_x$ и $\theta_y$ определяют форму трехслойной пластины при изгибных колебаниях.

Варьируя функционал в уравнении (1), будем иметь

$$\int_0^a\int_0^b L\delta w dxdy-\int_0^b\left[Q_x\delta w\right]_0^a dy-\int_0^a\left[Q_y\delta w\right]_0^b dx=0,$$
$$\int_0^a\int_0^b L_x\delta\theta_x dxdy-\int_0^b\left[M_x\delta\theta_x\right]_0^a dy-\int_0^a\left[M_{xy}\delta\theta_x\right]_0^b dx=0, \quad (2)$$
$$\int_0^a\int_0^b L_y\delta\theta_y dxdy-\int_0^b\left[M_{xy}\delta\theta_y\right]_0^a dy-\int_0^a\left[M_y\delta\theta_y\right]_0^b dx=0,$$

где

$$L=K_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+K_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+K_x\frac{\partial\theta_x}{\partial x}+K_y\frac{\partial\theta_y}{\partial y}+B_\rho\omega^2 w,$$
$$L_x=-K_x\frac{\partial w}{\partial x}+D_{11}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}+D_{33}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial y^2}-$$
$$-K_x\theta_x+\left(D_{12}+D_{33}\right)\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\partial y}, \quad (3)$$
$$L_y=-K_y\frac{\partial w}{\partial y}+\left(D_{12}+D_{33}\right)\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\partial y}+$$
$$+D_{33}\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x^2}+D_{22}\frac{\partial^2\theta_y}{\partial y^2}-K_y\theta_y$$

и

$$Q_x=K_x\left(\theta_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$
$$Q_y=K_y\left(\theta_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$M_{xy} = D_{33}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y} + \frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right), \quad (4)$$

$$M_x = D_{11}\frac{\partial\theta_x}{\partial x} + D_{12}\frac{\partial\theta_y}{\partial y},$$

$$M_y = D_{12}\frac{\partial\theta_x}{\partial x} + D_{22}\frac{\partial\theta_y}{\partial y}.$$

Уравнения (2) являются основными вариационными уравнениями, которым должны удовлетворять собственные функции $w(x,y)$, $\theta x(x,y)$ и $\theta y(x,y)$, определяющие форму действительных изгибных колебаний трехслойной пластины.

**Методика решения.** Определение основной частоты колебаний трехслойной пластины может быть выполнено с помощью эффективных приближенных методов, одним из которых является обобщенный метод Галеркина. В рамках этого метода прогиб $w(x,y)$ и углы поворота $\theta_x(x,y)$, $\theta_y(x,y)$ заменяются аналитическими выражениями, аппроксимирующими первую форму колебаний пластины вдоль осей $OX$ и $OY$. Представим прогиб и углы поворота в следующем виде [15]:

$$w = AU_x + BU_y + CU_xU_y,$$
$$\theta_x = DV_x + PV_xU_y, \quad (5)$$
$$\theta_y = FV_y + TU_xV_y,$$

где $A$, $B$, $C$, $D$, $F$, $P$, $T$ – неизвестные числа; $U_x$, $V_x$, $U_y$, $V_y$ – аппроксимирующие функции, имеющие вид

$$U_x(x) = \sin\lambda_1 x,$$
$$V_x(x) = \cos\lambda_1 x,$$
$$U_y(y) = \sin\lambda_2 y, \quad (6)$$
$$V_y(y) = \cos\lambda_2 y,$$

где $\lambda_1 = \pi/a$, $\lambda_2 = \pi/b$.

Вариации функций прогиба и углов поворота будут иметь вид

$$\delta w = U_x\delta A + U_y\delta B + U_xU_y\delta C,$$
$$\delta\theta_x = V_x\delta D + V_xU_y\delta P, \quad (7)$$
$$\delta\theta_y = V_y\delta F + U_xV_y\delta T.$$

Подставив (5)–(7) в (2), после группировки получим

$$\int_0^a\int_0^b LU_x\delta A dxdy - \int_0^b\left[Q_xU_x\delta A\right]_0^a dy - \int_0^a\left[Q_yU_x\delta A\right]_0^b dx +$$
$$+\int_0^a\int_0^b LU_y\delta B dxdy - \int_0^b\left[Q_xU_y\delta B\right]_0^a dy -$$
$$-\int_0^a\left[Q_yU_y\delta B\right]_0^b dx + \int_0^a\int_0^b LU_xU_y\delta C dxdy -$$
$$-\int_0^b\left[Q_xU_xU_y\delta C\right]_0^a dy - \int_0^a\left[Q_yU_xU_y\delta C\right]_0^b dx = 0,$$

$$\int_0^a\int_0^b L_xV_x\delta D dxdy - \int_0^b\left[M_xV_x\delta D\right]_0^a dy - \int_0^a\left[M_{xy}V_x\delta D\right]_0^b dx + \quad (8)$$
$$+\int_0^a\int_0^b L_xV_xU_y\delta P dxdy - \int_0^b\left[M_xV_xU_y\delta P\right]_0^a dy -$$
$$-\int_0^a\left[M_{xy}V_xU_y\delta P\right]_0^b dx = 0,$$

$$\int_0^a\int_0^b L_yV_y\delta F dxdy - \int_0^b\left[M_{xy}V_y\delta F\right]_0^a dy - \int_0^a\left[M_yV_y\delta F\right]_0^b dx +$$
$$+\int_0^a\int_0^b L_yU_xV_y\delta T dxdy - \int_0^b\left[M_{xy}U_xV_y\delta T\right]_0^a dy -$$
$$-\int_0^a\left[M_yU_xV_y\delta T\right]_0^b dx = 0.$$

Учитывая произвольность вариаций $\delta A$, $\delta B$, $\delta C$, $\delta D$, $\delta F$, $\delta P$, $\delta T$, получим систему из семи разрешающих уравнений обобщенного метода Галеркина с естественными граничными условиями:

$$\int_0^a\int_0^b LU_x dxdy - \int_0^b\left[Q_xU_x\right]_0^a dy - \int_0^a\left[Q_yU_x\right]_0^b dx = 0,$$
$$\int_0^a\int_0^b LU_y dxdy - \int_0^b\left[Q_xU_y\right]_0^a dy - \int_0^a\left[Q_yU_y\right]_0^b dx = 0,$$
$$\int_0^a\int_0^b L_xV_x dxdy - \int_0^b\left[M_xV_x\right]_0^a dy - \int_0^a\left[M_{xy}V_x\right]_0^b dx = 0,$$
$$\int_0^a\int_0^b L_yV_y dxdy - \int_0^b\left[M_{xy}V_y\right]_0^a dy - \int_0^a\left[M_yV_y\right]_0^b dx = 0,$$
$$\int_0^a\int_0^b LU_xU_y dxdy - \int_0^b\left[Q_xU_xU_y\right]_0^a dy -$$
$$-\int_0^a\left[Q_yU_xU_y\right]_0^b dx = 0, \quad (9)$$
$$\int_0^a\int_0^b L_xV_xU_y dxdy - \int_0^b\left[M_xV_xU_y\right]_0^a dy - \int_0^a\left[M_{xy}V_xU_y\right]_0^b dx = 0,$$
$$\int_0^a\int_0^b L_yU_xV_y dxdy - \int_0^b\left[M_{xy}U_xV_y\right]_0^a dy - \int_0^a\left[M_yU_xV_y\right]_0^b dx = 0.$$

Выполнив в (3) и (4) дифференцирование, интегрирование и раскрытие скобок в уравнениях (9), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений с неизвестными $A$, $B$, $C$, $D$, $F$, $P$, $T$. Удовлетворяя условие существования нетривиального решения системы, приравняем нулю определитель основной ее матрицы и, обозначив $\Omega = \omega^2$, получим следующее кубическое уравнение:

$$z_3\Omega^3 + z_2\Omega^2 + z_1\Omega + z_0 = 0. \quad (10)$$

Определив наименьший вещественный корень уравнения (10), учитывая соотношение $\omega = 2\pi f$, где $f$ – частота в герцах, получим окончательную формулу для первой частоты колебаний:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\sqrt[3]{12z_3\left(3z_1z_2 - 9z_0z_3 + \sqrt{12z_1^3z_3 - 3z_1^2z_2^2 - 54z_3z_2z_1z_0 + 81z_0^2z_3^2 + 12z_0z_2^3}\right) - 8z_2^3}}{6z_3(12z_1z_3 + 4z_2^2 - 2z_2)} - \frac{1}{6z_3}}. \quad (11)$$

Важно отметить, что в (10) и (11) коэффициенты $z_1$, $z_2$, $z_3$ и $z_0$ определяются только геометрией пластины и параметрами ее материала.

**Результаты расчетов и область их применения.** В качестве примера определим основную частоту колебаний для нескольких прямоугольных трехслойных пластин, шарнирно закрепленных в углах и отличающихся размерами в плане, толщинами несущих слоев и заполнителя. Параметры материала несущих слоев: $E_x$ = 54,55 ГПа, $E_y$ = 54,55 ГПа, $G_{xy}$ = 20,67 ГПа, $G_{xz}$ = = $G_{yz}$ = 3,78 ГПа, $\nu_{xy} = \nu_{yx}$ = 0,32, $\rho$ = 1 500 кг/м$^3$. Материал заполнителя характеризуется модулями сдвига $G_{xz}$ = 440 МПа, $G_{yz}$ = 220 МПа и плотностью $\rho$ = = 83 кг/м$^3$. Размеры пластины в плане: $b$ = 1 м; $a$ = 0,5, 1, 2 м. Суммарная толщина несущих слоев $t$ равна 0,001 и 0,002 м, а толщина заполнителя $h$ будет 0,01, 0,05, 0,1 м.

Частоты колебаний трехслойных пластин, вычисленные по формуле (11) для приведенных размеров, приведены в табл. 1.

Для проверки полученных результатов определим основную частоту колебаний трехслойной пластины, шарнирно закрепленной в четырех углах, методом конечных элементов (МКЭ). Расчет выполним в пакете ANSYS, используя трехслойный вариант конечного элемента SHELL181. Значения частот в герцах, вычисленных МКЭ, – в табл. 2.

Сравнивая соответствующие частоты из табл. 1 и 2, можно видеть, что разница не превышает 5 %. Это позволяет достоверно рассчитывать по полученной формуле первую частоту прямоугольной трехслойной пластины при проектировании конструкций, в составе которых такая пластина применяется.

*Таблица 1*

**Частоты колебаний трехслойной пластины, рассчитанные по полученной формуле**

| $t$, м | $a$ = 0,5 м, $b$ = 1 м | | | $a$ = 1 м, $b$ = 1 м | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $h$ = = 0,01 м | $h$ = = 0,05 м | $h$ = = 0,1 м | $h$ = = 0,01 м | $h$ = = 0,05 м | $h$ = = 0,1 м |
| 0,001 | 39,904 | 120,45 | 177,69 | 30,591 | 93,175 | 137,72 |
| 0,002 | 45,867 | 149,48 | 225,48 | 35,444 | 115,85 | 175,07 |

*Таблица 2*

**Частоты колебаний трехслойной пластины, рассчитанные в ANSYS**

| $t$, м | $a$ = 0,5 м, $b$ = 1 м | | | $a$ = 1 м, $b$ = 1 м | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $h$ = = 0,01 м | $h$ = = 0,05 м | $h$ = = 0,1 м | $h$ = = 0,01 м | $h$ = = 0,05 м | $h$ = = 0,1 м |
| 0,001 | 38,902 | 117,13 | 173,52 | 29,686 | 90,609 | 134,49 |
| 0,002 | 43,783 | 145,19 | 216,77 | 33,835 | 112,53 | 168,25 |

**Заключение.** В статье с помощью обобщенного метода Галеркина решена задача определения основной частоты колебаний прямоугольной трехслойной пластины, которая шарнирно закреплена в четырех углах. Получена достаточно простая аналитическая формула для первой частоты колебаний пластины.

Верификация результатов позволяет сделать вывод о том, что по полученной формуле с достаточной точностью и минимальными вычислительными затратами можно определять основные частоты колебаний пластин, шарнирно закрепленных в четырех углах.

**Библиографические ссылки**


1. Коган Е. А., Юрченко А. А. Нелинейные колебания защемленных по контуру трехслойных пластин // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 5. С. 25–34.
2. Frostig Y., Schwarts-Givli H., Rabinovitch O. Free Vibrations of Delaminated Unidirectional Sandwich Panels with a Transversely Flexible Core – A Modified Galerkin Approach // J. of Sound and Vibration. 2007. Vol. 301, no. 2. P. 253–277.
3. Паймушин В. Н., Полякова Т. В. Точные решения задач об изгибных формах потери устойчивости и свободных колебаний прямоугольной ортотропной пластины с незакрепленными краями // Ученые записки Казанского университета. Сер. «Физико-математические науки». 2010. Т. 152, № 1. С. 181–198.
4. Natural Vibrations of Laminated and Sandwich Plates / M. K. Rao [et al.] // J. of Engineering Mech. 2004. Vol. 130, no 11. P. 1268–1278.
5. A Semi-Analytical Method for Bending, Buckling, and Free Vibration Analyses / J. Liu [et al.] // Int. J. of Struct. Stability and Dynamics. 2010. Vol. 10, no 1. P. 127–151.
6. Lee C. R., Kam T. Y., Sun S. J. Free-Vibration Analysis and Material Constants Identification of Laminated Composite Sandwich Plates // J. of Engineering Mech. 2007. Vol. 133, no. 8. P. 12–23.
7. Леоненко Д. В. Колебания круговых трехслойных пластин, связанных с упругим основанием, под действием синусоидальных нагрузок // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2009. № 3. С. 89–93.
8. Sekine H., Shirahata H., Matsuda M. Vibration Analysis of Composite Sandwich Plates and Layup Optimization // Sandwich Structures: Advancing with Sandwich Structures and Materials. 2005. Vol. 7. P. 557–566.
9. Brischetto S., Carrera E., Demasi L. Free vibration of sandwich plates and shells by using Zig-Zag function // Shock and Vibration. 2009. Vol. 16. P. 495–503.
10. Lok T. S., Cheng Q. H. Free Vibration of Clamped Orthotropic Sandwich Panel // J. of Sound and Vibration. 2000. Vol. 229, no. 2. P. 311–327.
11. Frostig Y., Shwartz-Givli H., Rabinovich O. Free Vibration of Delaminated Unidirectional Sandwich Panels with a Transversely Flexible Core and General Boundary Conditions – A High-Order Approach // J. of Sandwich Struct. and Materials. 2008. Vol. 10. P. 99–131.
12. Лопатин А. В., Деев П. О. Определение основной частоты колебаний прямоугольной трехслойной пластины со свободным краем // Вестник СибГАУ. 2010. Вып. 2(36). С. 53–61.
13. Vasiliev V. V. Mechanics of composite structures. Published by Taylor & Francis, 1993.
14. Лопатин А. В., Деев П. О. Определение основной частоты колебаний прямоугольной трехслойной пластины с двумя свободными краями // Вестник СибГАУ. 2011. Вып. 1(34). С. 46–50.
15. Деев П. О. Определение основной частоты колебаний прямоугольной трехслойной пластины, жестко закрепленной в центральной точке // Вестник СибГАУ. 2011. Вып. 4(33). С. 53–61.

**References**

1. Kogan E. A., Yurchenko A. A. [Non-linear vibration of sandwich plates clamped along the contour]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2010, no. 5, p. 25–34 (In Russ.).

2. Frostig Y., Schwarts-Givli H., Rabinovitch O. Free Vibrations of Delaminated Unidirectional Sandwich Panels with a Transversely Flexible Core – A Modified Galerkin Approach. *J. of Sound and Vibration*, 2007, vol. 301, no. 2, p. 253–277.

3. Paimushin V. N., Polyakova T. V. [Exact solutions of flexural buckling and free vibration problems for rectangular orthotropic plate with free edges]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki*, 2010, vol. 152, no 1, p. 181–198 (In Russ.).

4. Rao M. K. et al. Natural Vibrations of Laminated and Sandwich Plates. *J. of Engineering Mech.*, 2004, vol. 130, no. 11, p. 1268–1278.

5. Liu J. et al. A Semi-Analytical Method for Bending, Buckling, and Free Vibration Analyses. *Int. J. of Struct. Stability and Dynamics*, 2010, vol. 10, no. 1, p. 127–151.

6. Lee C. R., Kam T. Y., Sun S. J., Free-Vibration Analysis and Material Constants Identification of Laminated Composite Sandwich Plates. *J. of Engineering Mech.*, 2007, vol. 133, no. 8, p. 12–23.

7. Leonenko D. V. [Vibration of circular sandwich plates, connected with elastic base, under sinusoidal loads]. *Problemy mashinostroeniya i avtomatizatsii*, 2009, no. 3, p. 89–93 (In Russ.).

8. Sekine H., Shirahata H., Matsuda M. Vibration Analysis of Composite Sandwich Plates and Layup Optimization. *Sandwich Structures: Advancing with Sandwich Structures and Materials*. 2005, vol. 7, p. 557–566.

9. Brischetto S., Carrera E., Demasi L. Free vibration of sandwich plates and shells by using Zig-Zag function. *Shock and Vibration*, 2009, vol. 16, p. 495–503.

10. Lok T. S., Cheng Q. H. Free Vibration of Clamped Orthotropic Sandwich Panel. *J. of Sound and Vibration*, 2000, vol. 229, no. 2, p. 311–327.

11. Frostig Y., Shwartz-Givli H., Rabinovich O. Free Vibration of Delaminated Unidirectional Sandwich Panels with a Transversely Flexible Core and General Boundary Conditions – A High-Order Approach. *J. of Sandwich Struct. and Materials*, 2008, vol. 10, p. 99–131.

12. Lopatin A. V., Deev P. O. [Fundamental frequency determination for rectangular sandwich plate with free edge]. *Vestnik SibGAU*. 2010, no. 2(36), p. 53–61 (In Russ.).

13. Vasiliev V. V. Mechanics of composite structures. Taylor & Francis, 1993.

14. Lopatin A. V., Deev P. O. [Fundamental frequency determination for rectangular sandwich plate with two free edges]. *Vestnik SibGAU*. 2011, no. 1(34), p. 46–50 (In Russ.).

15. Deev P. O. [Fundamental frequency determination for rectangular sandwich plate clamped in the central point]. *Vestnik SibGAU*. 2011, no. 4(33), p. 54–62 (In Russ.).