УДК 517.977.1

Вестник СибГАУ
Т. 16, № 1. С. 104–112

ЧИСЛЕННЫЕ ОЦЕНКИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ОТКЛОНЕНИЙ ТРАЕКТОРИЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ В АТМОСФЕРЕ

А. Н. Рогалев[1*], А. А. Рогалев[2]

[1]Институт вычислительного моделирования СО РАН
Российская Федерация, 660036, г. Красноярск, Академгородок, 50/44
[2]Сибирский федеральный университет, Институт космических и информационных технологий
Российская Федерация, 660074, г. Красноярск, ул. Киренского, 26
[*]E-mail: rogalyov@icm.krasn.ru

Основная задача статьи – описать гарантированные методы решения систем дифференциальных уравнений с учетом управляющих воздействий и их применение к задачам оценки предельных отклонений летательных аппаратов. Постановка задач оценки предельных отклонений обусловлена практическими потребностями оценки надежности сложных нелинейных управляемых систем, выполняющих свои функции в условиях возмущений. Примером такой системы является летательный аппарат: самолет, ракета, космический корабль. Среди задач оценки предельных отклонений следует отметить исследование движения самолета на этапе автоматического захода на посадку, где определяется, возможно ли нарушение ограничений, наложенных на кинематические параметры самолета, в момент касания взлетно-посадочной полосы. К таким задачам относится также оценка возможности потери устойчивости движения летательного аппарата на заданном интервале времени. Наибольшие сложности при решении такой задачи возникают в том случае, когда условия полета не являются стационарными, например, при рассмотрении участка спуска в атмосферу орбитальной ступени космического корабля. В этом случае отсутствуют сами критерии потери устойчивости, если не ограничиваться простейшим случаем линейной системы, для которой могут быть использованы условия Рауса–Гурвица. Упрощенным критерием потери устойчивости может служить некоторое пороговое или критическое значение одного из параметров движения самолета, например, угла атаки или угла скольжения.

В подобных задачах важную роль играют множества достижимости – совокупности концов всех траекторий управляемой системы, начинающихся в начальный момент времени в точках начального множества. Эти множества применяются в задачах гарантированного или минимаксного оценивания решений динамических систем, если действующие на систему внешние возмущения и ошибки наблюдения заключены в определенных пределах (стеснены ограничениями).

Анализ работ, выполняющих оценки множеств достижимости, свидетельствует о том, что получить надежную оценку множеств достижимости управляемых систем в условиях неопределенности, если в правые части этих систем управляющие воздействия входят произвольным образом, а не только как аддитивный член, удается не всегда. Поэтому возможности применения гарантированных методов, основанных на символьном представлении решений, для оценки множеств достижимости будут полезными специалистам в управлении.

Представлены результаты применения численных методов, основанных на построении символьных формул решений и оценивании всех возможных ее значений.

Ключевые слова: предельные отклонения траекторий, летательные аппараты, критические значения параметров, гарантированный метод оценивания, символьная формула.

Vestnik SibGAU
Vol. 16, No. 1, P. 104–112

NUMERICAL ESTIMATIONS OF MAXIMUM DEVIATIONS FOR AIRCRAFT TRAJECTORIES IN THE ATMOSPHERE

A. N. Rogalyov[1*], A. A. Rogalyov[2]

[1]Institute of Computational Modeling, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences
50/44, Akadmegorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation
[2]Siberian Federal University, Institute of Space and Information Technologies
26, Kirenskogo Str., Krasnoyarsk, 660074, Russian Federation
[*]E-mail: rogalyov@icm.krasn.ru

In this article we study guaranteed methods for solving differential equations systems with control actions and its application for problems of aircrafts trajectories maximum deviations estimating. The problem statement of maximum deviations estimating is caused by the necessity to evaluate reliability of complex nonlinear controlled systems that *operate under the influence of perturbations. The example of such system is an aircraft: an airplane, a rocket, a spacecraft. We should emphasize the research of an airplane movement during an autoland approach among problems of maximum deviations estimating. This research gives an answer whether a violation of restrictions imposed on the kinematic parameters of an airplane touching down a runway is possible or not. The problems of limit deviations evaluating also include estimating of the possibility of an aircraft motion stability's loss for a given time interval. The greatest difficulty in solving such problems arises in the case when flight conditions are not fixed, for example, when considering the descent into the atmosphere of a spacecraft orbiter. In this case the loss of stability criteria themselves are not formulated, if we do not confine ourselves to the simplest case of a linear system, for which the Routh-Hurwitz conditions can be used. Some threshold or critical value of one of the parameters of an airplane can serve as a simplistic criterion of stability loss. For example, the angle of attack or slip angle can be taken as such parameter.*

Reachable sets (collections of all the trajectories of controlled systems) make a figure in such problems. These sets are used in problems of guaranteed or minimax estimation of solutions of dynamical systems if external perturbations that influence on a system and observation errors are enclosed within a certain range (constrained by limitations).

The analysis of works that estimate reachable sets indicates that the reliable estimation of reachable sets of controlled systems under uncertainty, if the right-hand sides of these systems depend nonlinearly on the control actions, is not always possible. Therefore the possibility of the guaranteed methods based on symbolic representation of solutions for reachable sets evaluation will be useful for specialists in control.

The article presents the results of the application of the numerical methods based on the construction of symbolic formulas of solutions and evaluating all of its possible values.

Keywords: maximum deviations, aircraft, critical values of parameters, guaranteed method of estimating, symbolical formula.

Введение. В статье будем основываться на предположении, что неопределенные факторы в математической модели управляемой системы не имеют вероятностного описания, а известны лишь с точностью до множеств, их содержащих. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, u),\ u(t) \in U,\ y(t^0) = y^0, \qquad (1)$$

для которой задано ограниченное по величине управляющее воздействие и поставлены начальные данные. Пусть в задаче (1) f – непрерывно дифференцируемая по y функция ($f(t) \in C^1$), множество U компактно в R^m, выбор возможных реализаций управляющих воздействий $u(\cdot)$ стеснен ограничениями $u(t) \in U, t \in [t^0, t]$, отражающими особенности рассматриваемой задачи. Полагаем также, что:

а) выполняется равномерная оценка $|y(t)| < b$ для всех решений (1) на интервале $t \in [t^0, T]$, где $b = \text{const} > 0$;

б) множество $Y(t) = f(t, y, U)$ для всех y, $t \in [s, T]$ компактно и выпукло.

Множеством достижимости $D(t, t^0, M)$ управляемой системы (1) с начальным условием $y(t^0) = y^0 \in M$ при $t \geq t^0$ называется совокупность концов $y(t)$ всех траекторий этой системы, начинающихся в момент s в точках начального множества M [1–3].

Непрерывность множества достижимости $D(t, t^0, y^0)$, зависящего также от времени, означает следующее: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что хаусдорфова метрика между множествами значений решений в моменты времени t^1, t^2 становится меньше ε:

$$d(D(t^1, t^0, y^0), D(t^2, t^0, y^0)) < \varepsilon,$$

$$\left|t^1 - t^2\right| < \delta, t^1, t^2 \in [t^0, T]. \qquad (2)$$

Множества достижимости играют важную роль в теории управляемых систем. На языке теории множеств достижимости можно сформулировать и решать многие основные задачи теории управления [1–9]. К подобным задачам относятся задачи проверки гарантированных условий безопасности и задачи построения «выживающих» траекторий. Условие «выживаемости» означает проверку выполнения условий $y(t) \in N$ при $t^0 \leq t < T$ для любого движения $y(\cdot)$, исходящего из точек области допустимых начальных позиций Y^0, и заданном множестве N при переборе всех управляющих воздействий, удовлетворяющих ограничению $u(\cdot) \in Q$. Рассмотрим управляемую динамическую систему общего вида, подверженную к тому же действию неопределенных факторов. Тогда движение состояния такой системы подчиняется следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, u, v), \qquad (3)$$

где $u = u(t)$ – управляющее воздействие; $v = v(t)$ – неконтролируемое воздействие.

Вообще говоря, величины векторов управлений и возмущений (допустимых управлений и возмущений) могут быть сложным образом связаны с движением динамической системы. Мы будем рассматривать лишь случай геометрических ограничений, имеющих вид

$$u \in U(t, x),\ v \in V(t, x).$$

Таким образом, возможные значения векторов управлений и возмущений зависят от текущего момента времени и состояния системы. Часто мы не нуждаемся в полном определении траектории динамической системы, а разыскиваем только положение системы в определенный момент T. Например, зная множества достижимости $D(t,s,M)$ управляемой системы, можно установить возможности управления, т. е. определить, можно ли привести управляемую систему в заданное фазовое состояние $y_{\text{финал}}$ в некоторый фиксированный момент времени $T > s$. Для этого достаточно проверить, имеет ли место включение $y_{\text{финал}} \in D(T,s,M)$, т. е. принадлежит ли вектор $y_{\text{финал}}$ множеству $D(T,s,M)$.

Более общая задача состоит в приведении исследуемой управляемой системы в заданный момент T на заданное множество N в фазовом пространстве. Эта задача, очевидно, разрешима в том и только том случае, если множества N, $D(T,s,M)$ имеют общую точку, т. е. если их пересечение непусто:

$$N \cap D(T,s,M) \neq \varnothing . \tag{4}$$

Располагая множествами достижимости, можно проследить, как зависит разрешимость рассматриваемых задач от начального множества M, от времени T, от множества N и т. д. Отметим, что подобные задачи часто возникают на практике, например, при оценке маневренных возможностей летательных аппаратов (ЛА) [10]. Выбрав траекторию, можно проверить, выполняются ли некоторые интересующие нас свойства. Одним из таких свойств является безопасность объекта. Говорят, что траектория $y(t)$ безопасна, если она не пересекается с «опасным» множеством F:

$$\forall t \geq 0,\ y(t) \notin F.$$

Множество F – это подобласть пространства состояний, в которую мы не хотим попасть. В качестве примера таких областей мы приведем требование для самолета не лететь ниже скорости его сваливания, а также анализ процесса автоматической посадки самолета, в первую очередь сводящийся к оценке возможных значений параметров траекторного и углового движения самолета в момент касания шасси взлетно-посадочной полосы (ВПП) (рис. 1). Главными из этих ограничений являются: в продольном движении – на дальность точки касания $\left(L_{\min} < L < L_{\max}\right)$, на вертикальную скорость в точке касания $\left(\left|V_y\right| < V_{y,\max}\right)$, на горизонтальную скорость $\left(V_x < V_{x,\max}\right)$, на угол тангажа $\left(\vartheta_{\min} < \vartheta < \vartheta_{\max}\right)$; в боковом движении – на боковое смещение от осевой линии $\left(\left|Z\right| < Z_{\max}\right)$, на боковую скорость $\left(\left|V_z\right| < V_{z,\max}\right)$, на угол крена $\left(\left|\gamma\right| < \gamma_{\max}\right)$ и угол рыскания $\left(\left|\psi\right| < \psi_{\max}\right)$.

В большинстве из таких задач требуется оценить максимальное значение одного из параметров не в фиксированный момент времени, а на определенном интервале времени полета. При этом полет ЛА происходит в условиях воздействия различных влияющих, в том числе друг на друга, возмущений: отклонений инерционных и аэродинамических параметров ЛА, атмосферных возмущений, инструментальных ошибок, отказов и т. п. Задачи такого типа в [10] называют задачами о выбросах случайного процесса.

Существует два подхода к решению задач, учитывающих предельные значения или предельные реализации. Первый подход основан на выборе случайного характера возмущений и является, по-видимому, самым широко распространенным [10]. Второй подход – гарантированный подход – предполагает, что возмущения, хотя и являются случайными, представляют собой набор конечного числа случайных параметров, для значений которых поставлены вполне определенные ограничения, и пусть заранее известно, что зависимости выходных параметров от любого из упомянутых параметров являются монотонными. Тогда выходные параметры принимают свои экстремальные значения при сочетаниях граничных значений случайных параметров определенного знака. Для всех экстремальных значений следует проверить эти сочетания и вычислить соответствующие значения выходных параметров. Если окажется, что выходные параметры не выходят за допустимые пределы, то выполнение всех ограничений можно считать гарантированным. Гарантированный подход, вероятно, может быть полностью обоснован в том случае, когда возмущениями являются систематические инструментальные ошибки, а используемые бортовые (и наземные) приборы прошли предварительную проверку и тарировку. Тогда с достаточным основанием можно считать, что ошибка в показаниях того или иного прибора не превосходит допустимых пределов. При этом закон распределения некоторой инструментальной ошибки $\Delta\varepsilon$ может сильно отличаться от гауссовского закона, если в процессе доводки прибора ошибка «вставлена» внутри разрешенного диапазона. В этом случае распределение ошибки оказывается ограниченным и может иметь пики в окрестностях предельных значений (рис. 2).

Статья рассматривает вопросы применения методов, основанных на символьных формулах решений, для вычисления гарантированных границ множеств достижимости и применение этих границ для оценки предельных отклонений траекторий ЛА. Гарантированное оценивание множества достижимости основано на вычислении границ множества $Y(t) = \bigcup_{y^0 \in Y^0} y(t, y^0)$. Для вычисления границ (включений множеств достижимости) строятся символьные формулы, аппроксимирующие оператор сдвига вдоль траектории системы дифференциальных уравнений, и вычисляются множества значений по этим формулам.

Многие вопросы, касающиеся свойств класса гарантированных методов, описаны в работах [11–21]. В данной статье включены новые дополнительные варианты конструирования зависимостей между значениями решений управляемых систем и их начальными значениями, а также управляющими параметрами этих систем. Первый вариант определения границ решений использует коэффициенты чувствительности решений по начальным данным или параметрам задачи как решения дифференциальных уравнений чувствительности. Второй вариант для определения границ вводит символические образы динамических систем, позволяющие строить глобальную структуру решений дифференциальных уравнений, проводить качественный анализ решений и вычислять необходимые динамические характеристики задачи.

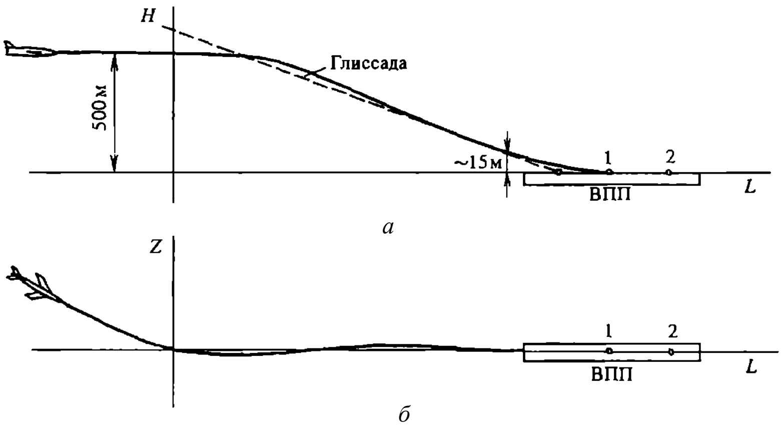

Рис. 1. Общая схема выполнения автоматической посадки самолета в проекции: *а* – на плоскость HL: H – высота (расстояние по вертикали до ВПП), L – дальность точки касания; *б* – на плоскость ZL: Z – боковое смещение от осевой линии, L – дальность точки касания; *1* – точка касания ВПП, *2* – точка остановки

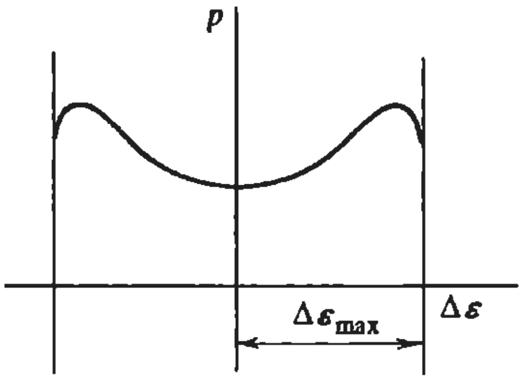

Рис. 2. Распределение инструментальных ошибок в приборах после тарировок

Символический анализ [22] основан на построении символического образа динамической системы, который является ориентированным графом. Допустимый путь на графе – последовательность узлов (символов) – является аналогом траектории динамической системы. Пространство допустимых путей отражает динамику системы.

Гарантированные методы оценки множеств решений ОДУ. Символьная формула (аналитическое выражение) – запись имен переменных и совокупности действий, которые нужно проделать в определенном порядке над значениями этих переменных. В дальнейшем при записи символьных формул, аппроксимирующих оператор сдвига вдоль траектории, допускается включение в них числовых констант с отложенным выполнением арифметических действий над ними.

Пусть K_i – последовательность нормированных пространств, зависящих от параметра u, принадлежащего множеству U; Y^i, $i = 1,...,n-1$ – последовательность символьных формул непрерывных отображений F^i, определенных на прямом произведении $K_1 \cdot K_2 \ ... \ K_n$, которые отображают это произведение в пространство K_{n+1} и задают зависимость между значениями решения в каждой точке области определения и начальными значениями решения. Результат последовательного исполнения преобразований формул

$$\begin{aligned}
&Y^1 = F^1(t^0, t^1, Y^0, Y^1) = S^1(Y^0),\\
&Y^2 = F^2(t^0, t^1, t^2, Y^0, Y^1, Y^2) = S^2(Y^0) \circ S^1(Y^0),\\
&Y^{\,i} = F^i(t^0, \ldots, t^i, Y^0, Y^1, \ldots, Y^i) = S^i(Y^0) \circ \ldots \circ\\
&\circ S^2(Y^{i-1}) \circ S^1(Y^i), \qquad (5)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&Y^m = F^m(t^0, \ldots, t^m, Y^0, Y^1, \ldots Y^m) = S^m(Y^0) \circ \ldots \circ\\
&\circ S^2(Y^{i-1}) \circ S^1(Y^i)
\end{aligned}$$

будет называться символьной формулой (опорной траекторией) метода, заданной сдвигом вдоль траектории ОДУ.

Можно привести следующие примеры подобных символьных формул:

$$y^m = y^{m-1} + \varphi(h, y^{m-1}),$$

$$y^m = y^{m-1} + \varphi(h, y^m, y^{m-1}).$$

В рассматриваемых задачах управление является измеримой функцией, что не допускает применения методов рядов Тейлора [23] для построения опорных траекторий.

Включение в правую часть управляемой системы управления u, принадлежащего произвольному множеству U, позволяет учитывать все управляющие воздействия при построении множеств достижимости управляемых систем.

В силу сказанного представим кратко этапы выполнения гарантированного метода:

1. Начало выполнения алгоритма – инициализация всех переменных, идентифицирующих систему: размерность системы, вид правой части, список переменных, начальные данные.

2. Запись компонент символьных формул решений как векторных функций, состоящих из символьных компонент $s(t^k)$, зависящих от символьных форм начальных данных $y_1^0,...,y_n^0$. Каждая компонента символьного вектора определяется заново в каждой точке t^k как функция, зависящая от символьных начальных данных $y_1^0,...,y_n^0$. Эта формула описывает сдвиг вдоль кривой, аппроксимирующей траекторию решения системы, на каждом шаге. Сдвиг вдоль траектории решений определяется на основе построенных символьных формул решений.

3. Последовательное исполнение метода хранения и переработки символьной информации при продвижении вдоль траектории решений, производящееся на основе статичного хранения этой информации, работы с адресацией памяти с помощью функций поточной обработки.

4. Преобразование символьной формулы приближенного решения к виду, который позволяет эффективно и быстро вычислять оценки областей значений приближенных решений (*S*-решения), соответствующие изменениям параметров задачи. Для этого используется кусочно-полиномиальное представление символьных формул и опорные функции для многозначных функций, описывающих области значений. Символьные формулы не преобразуются на каждом шаге алгоритма, организуется их хранение в памяти, для этого полезным является кусочная полиномиальность. Затем они используются для вычислений областей значений решений, как кратко описано в пункте 3.

5. Представление символьной формулы (вектора с символьными компонентами) Y, аппроксимирующей оператор сдвига вдоль траектории, позволяет определить прообразы экстремальных значений (верхних и нижних границ для множеств решений). Эти прообразы принадлежат вектору начальных значений Y^0 для всех узлов сетки t^k. Для нахождения прообразов применяется одна из форм решения экстремальной задачи. Обозначим найденные точки $y_d^0, d = 1, \ldots, 2n$. Они служат основой для определения множеств («брусов») решений, включающих все решения из окрестности точек y_d^0.

6. Определение границы глобальной ошибки начинается с применения алгоритма неподвижной точки в форме алгоритмов типа гомотопии [24]. Цели применения алгоритма гомотопии – вычислить области значений (многозначные векторные функции), включающие множества точных решений в областях, содержащих каждую из 2*n*-граничных точек. Вычисленные многозначные функции образуют граничные гиперплоскости для множества решений системы ОДУ, являющиеся гарантированными границами этого множества решений. Эти границы областей всех решений могут быть завышенными, но они позволяют оценивать глобальную ошибку решений, являясь включениями остаточных членов разложений.

7. Гарантированные границы глобальной ошибки множества приближенных решений устанавливаются на основе суммирования оценок локальной ошибки вдоль траектории, заданной символьным решением, причем эти ошибки привязаны к каждому экстремальному значению *S*-решения. Верхняя оценка глобальной ошибки (векторная величина, состоящая из *S*-компонентов) – это результат накопления величин локальных ошибок вдоль траектории решения. Подобная верхняя оценка насчитывается для всех подынтервалов на всем интервале интегрирования и для каждого экстремального значения, ограничивающего *S*-решение. Именно так происходит независимое определение символьных формул решений и процесс суммирования локальных ошибок вдоль траекторий решения.

8. Вычисление границ включений множества приближенных решений поставленной задачи выполняется так: к границам *S*-решений добавляется оценка глобальной ошибки (таких операций объединения будет 2*n*). Эти вычисления значений границ множеств решений отложены на последний этап исполнения алгоритма. Полезно отметить, что для большинства тестовых примеров включение обеспечивается уже для множества *S*-решений, хотя этот факт является эмпирическим.

В итоге, величина $Y(t)$ – это гарантированная оценка множества точных решений с учетом всех видов ошибок. При этом используется тот факт, что построенные символьные формулы решений являются кусочно-полиномиальными функциями, зависящими от $y_1^0, ..., y_n^0$. Множество значений приближенных решений является выпуклым и компактным множеством. Его возможно включать в множество, аппроксимировать внешним многогранником, включающим множество решений.

Выполнение преобразований символьных формул – это первый этап гарантированного метода включения решений, за которым следует этап числовых вычислений. Для проведения символьных преобразований в принципе используются системы компьютерной алгебры. Однако подобное использование компьютерной алгебры, как правило, приводит к крайне затратным по времени исполнения алгоритмам, особенно если вычисления производятся в цикле. Поэтому в общем случае для описываемого класса методов предлагается модель вычислений (преобразований и вычислений) символьных формул, основанная на поэтапном статичном хранении информации и преобразовании ее в завершающей стадии метода. В силу этого модель вычислений (преобразований и вычислений) символьных формул осуществляется без явного выписывания суперпозиций компонент формулы, определяемых на каждом шаге. Связь между этими компонентами определяется посредством задания механизма адресации. Ссылки на адреса различных уровней хранятся в стековой памяти в виде дерева. Генерация кода вычислений по формуле (3) осуществляется в процессе обхода этого дерева, начиная с вершин.

В обозначенном выше алгоритме получения символьных формул

$$\begin{aligned} Y^n &= F^n(t^0,\dots,t^n,Y^0,Y^1,\dots,\ Y^n) = \\ &= S^n(Y^0)\circ\dots\circ S^2(Y^{i-1})\circ S^1(Y^i) \end{aligned} \tag{6}$$

используется следующая методика обработки последовательности символьных формул. Пусть $\phi(y^0)$ это однозначное отображение единичного интервала из R^1 на гиперкуб из R^n, которое каждой точке $t\in R$ сопоставляет некоторую точку $y=\phi(t)$. При помощи такого отображения можно построить алгоритм исполнения, который для каждой точки $t\in R$ позволяет определить формулу отображения $F(Y_1^0,Y_2^0,\ \dots,Y_n^0)$ и процесс ее сборки по адресам. Для этого предлагается использовать в качестве отображения $\phi(y^0)$-непрерывное однозначное отображение единичного интервала на n-мерный куб, известное как кривая Пеано, заполняющая пространство. Фактически кривая Пеано представляет собой непрерывную, нигде не дифференцируемую кривую, которая проходит через все точки единичного гиперкуба в пространстве R^n. Изобразить кривую Пеано нельзя, возможно лишь дать последовательность кривых, которая в пределе сходится к ней. Каждая такая кривая называется приближением кривой Пеано и имеет номер, определяющий ее номер в последовательности кривых.

Таким образом, m-приближение можно рассматривать как некоторую аппроксимацию m-функции в рекурсивной формуле (4). Это соответствие задано отображением элементов конечного множества отрезков из единичного интервала и элементами конечного множества гиперкубов, входящих в R^n. Формула будет представлять рекурсивную структуру, размер которой изменяется. Для записи такой формулы в компьютере используются линейные динамические структуры.

Итогом работы описанного выше алгоритма будет возможность в любой точке t^k построить символьную формулу решения (3) и вычислять на основе этой формулы значения решений.

Применение гарантированных методов в задачах оценки предельных положений

1. Рассматривается модель класса «ракета–самолет» [25], описывающая преследование маневрирующего объекта (преследуемого) другим объектом (преследователем) в экспоненциальной атмосфере по заданному закону сближения под действием силы земного притяжения и силы аэродинамического сопротивления:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -y_1y_2 - kgv\frac{u}{y_1}, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -Vy_2u, \\ \frac{dy_3}{dt} &= -y_1\sqrt{1-\left(\frac{Vu}{y_1}\right)^2} + V\sqrt{1-u^2}, \\ g &= 9{,}80665. \end{aligned} \tag{7}$$

В этой модели используются следующие обозначения: y_1 – функция скорости ракеты, y_2 – функция плотности атмосферы на высоте полета ракеты, y_3 – функция расстояния между ракетой и преследуемым самолетом, движущимся с постоянной скоростью V. Время $t\in[t_s,t_F]$, причем момент времени t_F не задан, коэффициент, присутствующий в экспоненциальном изменении плотности атмосферы, $k=1{,}079\cdot10^{-4}$. Начальное условие $y_1(t_0)$ определяется из условий разрешимости управляемой системы (т. е. в данном случае из условий достижимости ракетой самолета), $y_3(t_0)$ входит в критерий качества управления (минимизируемый функционал). На управление $u(t)$ налагается условие $|u(t)|\le 0{,}985$. Для управляемой системы должны выполняться поточечные фазовые ограничения $y_1(t)\in[\min V,\ 0{,}1]$, $y_2(t)\in[0{,}07,\ 0{,}12]$, $y_3(t)\in[0{,}4]$, $t\in[0,t_F]$. На рис. 3 изображены множества значений скоростей ракеты и расстояния между ракетой и самолетом на множестве допустимых управлений в различные моменты времени, на рис. 4 – граничные значения множества расстояний между ракетой и преследуемым самолетом на множестве допустимых управлений, т. е. оценки предельных значений.

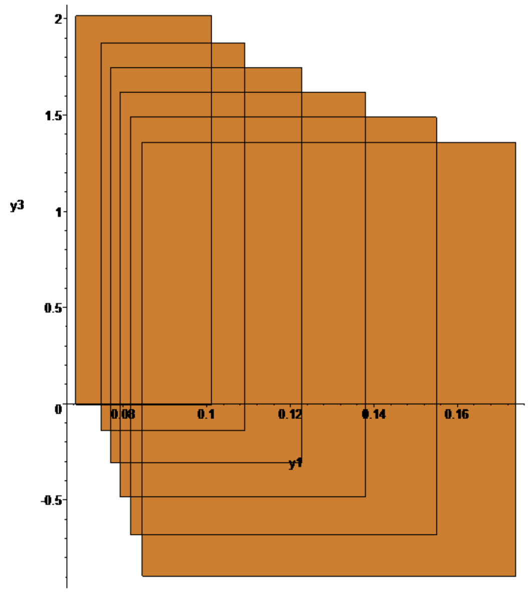

Рис. 3. Границы включения множеств достижимости в фазовой плоскости (относительно функции скорости ракеты и функции расстояния до преследуемого самолета)

2. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, в правую часть которой входит управляющее воздействие:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= 2y_2 + y_4, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -2y_1 + y_3 + u_1(t), \\ \frac{dy_3}{dt} &= y_2 + 10y_4, \\ \frac{dy_4}{dt} &= 2y_1 - 2y_3 + u_2(t). \end{aligned} \tag{8}$$

Система (8) – это гамильтонова система, имеющая гамильтониан

$$H = y_1^2 + y_2 y_4 + 5y_4 + y_1^2 - y_1 y_3 + y_3^2 - u_1(t) y_1 - u_2(t) y_3,$$

где y_1, y_2 – обобщенные координаты; y_2, y_4 – обобщенные импульсы (рис. 5, 6).

На возмущающие силы системы $u_1(t), u_2(t)$ наложены ограничения

$$\{|u_1| \le 1, |u_2| \le 1\}.$$

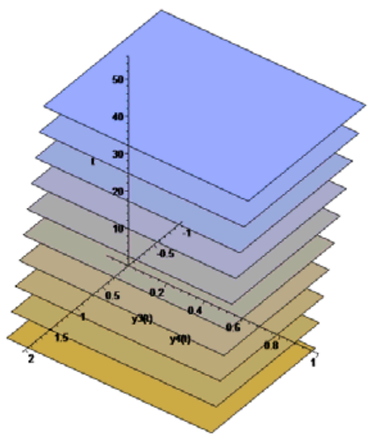

Рис. 4. Границы включения множеств достижимости в фазовой плоскости (относительно функции расстояния до преследуемого самолета и управляющего параметра) в трехмерной системе координат

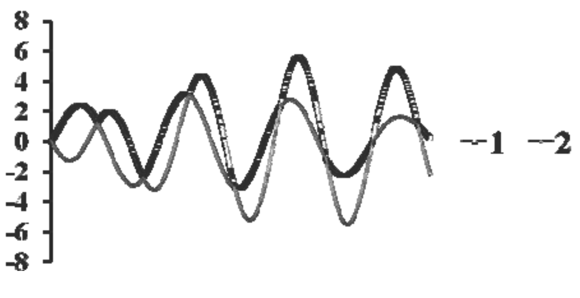

Рис. 5. Гарантированные границы множества достижимости задачи (8) – проекция на оси t–y_1: *1* – верхняя граница проекции множества достижимости; *2* – нижняя граница проекции множеств достижимости

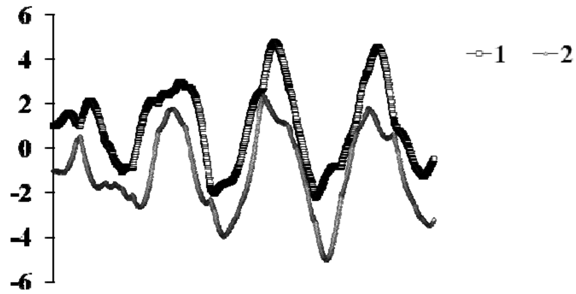

Рис. 6. Гарантированные границы множества достижимости задачи (8) – проекция на оси t–y_2: *1* – верхняя граница проекции множества достижимости; *2* – нижняя граница проекции множеств достижимости

Заключение. В статье описаны вопросы применения гарантированных методов оценки решений дифференциальных уравнений для вычисления включений предельных отклонений траекторий летательных аппаратов. Гарантированные методы, основанные на символьных формулах приближенных решений, были предложены в конце 1980-х и начале 1990-х годов, их описание можно найти также в [10–19]. В этих методах используются символьные формулы приближенных решений, что позволяет строить области множеств решений и находить оценки глобальных ошибок. Этот подход является новым, поскольку нахождение символьных формул приближенных решений требует специальной организации, преобразования, хранения больших наборов символьных данных. Гарантированные методы являются одним из эффективных инструментов для вычисления включений множеств достижимости и предельных отклонений летательных аппаратов.

Библиографические ссылки

1. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М. : Наука, 1977. 392 с.

2. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М. : Наука, 1988. 319 с.

3. Chernousko F. L. State Estimation for Dynamic Systems. Boca Raton : CRC Press, 1994. 304 p.

4. Овсеевич А. И., Шматков А. М. К вопросу о сопоставлении вероятностного и гарантированного подходов к прогнозу фазового состояния динамических систем // Изв. Академии наук. Теория и системы управления. 2007. № 4. С. 11–16.

5. Черноусько Ф. Л. Эллипсоидальные аппроксимации множеств достижимости управляемых линейных систем с неопределенной матрицей // Прикладная математика и механика. 1996. Т. 60, № 6. С. 940–950.

6. Костоусова Е. К. Внешнее и внутреннее оценивание областей достижимости при помощи параллелотопов // Вычислительные технологии. 1998. Т. 3, № 2. С. 11–20.

7. Куржанский А. Б., Фурасов Б. Д. Задачи гарантированной идентификации билинейных систем с дискретным временем // Изв. Академии наук. Теория и системы управления. 2000. № 4. С. 5–12.

8. Кинев А. Н., Рокитянский Д. У., Черноусько Ф. Л. Эллипсоидальные оценки фазового состояния линейных систем с параметрическими возмущениями и неопределенной матрицей наблюдений // Изв. Академии наук. Теория и системы управления. 2002. № 1. С. 5–13.

9. Пацко Б. В., Пятко С. Г., Федотов А. А. Трехмерные множества достижимости нелинейных управляемых систем // Изв. Академии наук. Теория и системы управления. 2003. № 3. С. 8–16.

10. Кузьмин В. П., Ярошевский В. А. Оценка предельных отклонений фазовых координат динамической системы при случайных возмущениях. М. : Наука. ФизМатЛит, 1995. 298 с.

11. Новиков В. А., Рогалев А. Н. Построение сходящихся верхних и нижних оценок решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1993. Т. 33, № 2. С. 219–231.

12. Рогалев А. Н. Использование границ глобальной ошибки в гарантированных оценках решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Вычислительные технологии. 2002. Т. 7, ч. 4. С. 88–95.

13. Рогалев А. Н. Гарантированные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе преобразования символьных формул // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8, № 5. С. 102–116.

14. Рогалев А. Н. Включение множеств решений дифференциальных уравнений и гарантированные оценки глобальной ошибки // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8, № 6. С. 80–94.

15. Рогалев А. Н. Границы множеств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными начальными данными // Вычислительные технологии. 2004. Т. 9, № 1. С. 86–93.

16. Рогалев А. Н. Символьные вычисления в гарантированных методах, выполненные на нескольких процессорах // Вестник НГУ. Сер. «Информационные технологии». 2006. Т. 4, вып. 1. С. 56–62.

17. Rogalyov A. N. Computation of reachable sets guaranteed bounds // Proceedings of the IASTED Intern. Conf. on Automation, Control, and Information Technology – Control, Diagnostics, and Automation (ACIT – CDA 2010). B6, Calgary, Canada : ACTA Press, 2010. P. 132–139.

18. Рогалев А. Н. Гарантированные оценки и построение множеств достижимости для нелинейных управляемых систем // Вестник СибГАУ. 2010. 5(31). С. 148–154.

19. Рогалев А. Н. Вычисление гарантированных границ множеств достижимости управляемых систем // Автометрия. 2011. Т. 47, № 3. С. 100–112.

20. Rogalev A. N. Calculation of Guaranteed Boundaries of Reachable Sets of Controlled Systems // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2011. Vol. 47. № 3. P. 287–296.

21. Рогалев А. Н., Рогалев А. А.Численный расчет включений фазовых состояний в задачах наблюдения за движением самолета // Вестник СибГАУ. 2012. 1(41). С. 53–57.

22. Кобяков С. Я. Методы символического анализа динамических систем // Автоматика и телемеханика. 2004. № 4. С. 56–60.

23. Neumaier A. Taylor forms – Use and limits // Reliable computing. 2003. Vol. 9, № 1. P. 43–79.

24. Eaves R. C., Saigal R. Homotopies for computation of fixed points on unbounded regions // Mathematical Programming. 1972. Vol. 3, № 2. P. 225–237.

25. Тятюшкин А. И., Федунов Б. Е. Возможности защиты от атакующей ракеты задней полусферы самолета вертикальным маневром // Изв. Академии наук. Теория и системы управления. 2006. № 1. С. 125–132.

References

1. Kurzhanskiy A. B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti.* [Control and Observation under Uncertainty]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 390 p.

2. Chernousko F. L. *Otsenivanie fazovogo sostoyaniya dinamicheskikh sistem* [Estimation of Phase State of Dynamic Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 320 p.

3. Chernousko F. L. State Estimation for Dynamic Systems. Boca Raton: CRC Press, 1994. 304 p.

4. Ovseevich A. I, Shmatko A. M. [Concerning the comparison of probabilitic and guaranteed approaches to the prediction of the phase state of dynamical systems]. *Izvestiya Akademii Nauk. Teoriya i sistemy upravleniya.* 2007, no. 4, p. 11–16 (In Russ.).

5. Chernousko F. L. [Ellipsoidal approximation of reachable sets of controlled linear systems with uncertain matrix]. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*. 1996, vol. 60, no. 6, p. 940–950 (In Russ.).

6. Kostousova E. K. [External and Internal Estimation of Reachable Sets Using Parallelotopes]. *Vychislitel'nye Tekhnologii.* 1998, vol. 3, no. 2, p. 11–20 (in Russ.).

7. Kurzhanskii A. B., Furasov B. D. [Problems of Guaranteed Identification of Bilinear Systems with Discrete Time]. *Izvestiya Akademii Nauk. Teoriya i sistemy upravleniya.* 2000, no. 4, p. 5–12 (in Russ.).

8. Kinev A. N., Rokityanskiy D. U., Chernous'ko F. L. [Ellipsoidal Estimations of Phase State of Linear Systems with Parametrical Perturbations and with Undefined Observations Matrix]. *Izvestiya Akademii Nauk. Teoriya i sistemy upravleniya.* 2002, no. 1, p. 5–13 (in Russ.).

9. Patsko B. V., Pyatko S. G., Fedotov A. A. [Three-dimension Reachable Sets of Nonlinear Controlled Systems]. *Izvestiya Akademii Nauk. Teoriya i sistemy upravleniya.* 2003, no. 3, p. 8–16 (in Russ.).

10. Kuz'min V. P., Yaroshevskiy V. A. *Otsenka predel'nykh otkloneniy fazovykh koordinat dinamicheskoy sistemy pri sluchaynykh vozmushcheniyakh.* [Estimation of Maximum Deviations of Dynamical System Phase Coordinates Subjected to Stochastic Perturbations]. Moscow, Nauka Publ., 1995, 298 p. (In Russ.).

11. Novikov V. A., Rogalyov A. N. [Construction of convergent upper and lower estimations of Solutions of Ordinary Differential Equations Systems]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki.* 1993, vol. 33, no. 2, p. 219–231 (in Russ.).

12. Rogalyov A. N. [Using Boundaries of Global Error for Guaranteed Estimates of Ordinary Differential Equations Solutions]. *Vychislitel'nye tekhnologii.* 2002, vol. 7, no. 4, p. 88–95 (in Russ.).

13. Rogalyov A. N. [Guaranteed Methods for Ordinary Differential Equations Solving Based on Symbolic Formulae Development]. *Vychislitel'nye tekhnologii.* 2003, vol. 8, no. 5, p. 102–116 (in Russ.).

14. Rogalyov A. N. [Inclusion of Sets of Differential Equations Solutions and Guaranteed Bbounds of Global Error]. *Vychislitel'nye tekhnologii.* 2003, vol. 8, no. 6, p. 80–94 (in Russ.).

15. Rogalyov A. N. [Boundaries of Solutions Sets of Systems of Ordinary Differential Equations with Interval Initial Data]. *Vychislitel'nye tekhnologii.* 2004, vol. 9, no. 1, p. 86–93 (in Russ.).

16. Rogalyov A. N. [Symbolic computations in guaranteed methods, executed on multiple processors]. *Vestnik NGU. Seriya: Informatsionnye tekhnologii.* 2006, vol. 4, no. 1, p. 56–62 (in Russ.).

17. Rogalyov A. N. Computation of reachable sets guaranteed bounds. *Proceedings of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology – Control, Diagnostics, and Automation (ACIT - CDA 2010).* ACTA Press, B6, Calgary, Canada. 2010, p. 132–139.

18. Rogalyov A. N. [Guaranteed Bounds and Reachable Sets Constructing for Nonlinear Controlled Systems]. *Vestnik SibGAU.* 2010, no. 5(31), p. 148–154 (in Russ.).

19. Rogalyov A. N. [Computing of Guaranteed Bounds of Controlled Systems Reachable Sets]. *Avtometriya.* 2011, vol. 47, no. 3, p. 100–112 (in Russ.).

20. Rogalyov A. N. Calculation of Guaranteed Boundaries of Reachable Sets of Controlled Systems. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing.* Allerton Press. 2011, vol. 47, no. 3, p. 287–296.

21. Rogalyov A. N., Rogalyov A. A. Numerical Computations of Phase States Inclusions for Problems of Aircraft Displacement Inspection. *Vestnik SibGAU.* 2012, no. 1(41), p. 53–57 (in Russ.).

22. Kobjakov S. Ja. [Methods of Symbolic Analysis of Dynamical Sytems]. *Avtomatika i telemekhanika.* 2004, no. 4, p. 56–60 (in Russ.).

23. Neumaier A. Taylor forms – Use and limits. *Reliable computing.* 2003, vol. 9, no. 1, p. 43–79.

24. Eaves R. C., Saigal R. [Homotopies for computation of fixed points on unbounded regions]. *Mathematical Programming.* 1972, vol. 3, no. 2, p. 225–237.

25. Tyatyushkin A. I, Fedunov B. E. [Possible protection against attacking missiles rear hemisphere of the aircraft vertical maneuver]. *Izvestija Akademii Nauk. Teoriya i Sistemy Upravleniya*. 2006, no. 1, p. 125–132 (in Russ.).