УДК 628.822

Вестник СибГАУ
Том 18, № 1. С. 50–57

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ РОЛИКА, КОНТАКТИРУЮЩЕГО С ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ, ПРИ НАЛИЧИИ СМАЗОЧНОГО СЛОЯ

В. А. Иванов[1*], Н. В. Еркаев[2]

[1]Сибирский федеральный университет, Политехнический институт
Российская Федерация, 660074, г. Красноярск, ул. Киренского, 26
[2]Институт вычислительного моделирования СО РАН
Российская Федерация, 660036, г. Красноярск, Академгородок, 50/44
[*]E-mail: VinTextrim@yandex.ru

Получено аналитическое решение задачи нестационарного гидродинамического контакта ролика с твердой поверхностью в присутствии жидкого смазочного материала. Данная задача является актуальной и важной, так как нестационарный режим в подшипниках преобладает при стартах космических аппаратов. Распределение давления вдоль смазочного слоя получено в результате интегрирования уравнения Рейнольдса с учетом как тангенциальной, так и нормальной скорости ролика относительно опорной поверхности. Интегрированием давления вдоль поверхности контакта определена нормальная сила, действующая на ролик со стороны смазочного слоя и называемая несущей способностью слоя. Показана линейная зависимость несущей способности от нормальной скорости ролика по отношению к поверхности контакта. Определен коэффициент демпфирования смазочного слоя, являющийся коэффициентом пропорциональности между усилением несущей способности и величиной нормальной скорости. Для нормальных колебаний ролика получено обыкновенное дифференциальное уравнение с малым параметром при старшей производной. Решение этого уравнения, называемого жестким, представлено в виде асимптотического разложения по сингулярному малому параметру. Получены выражения для нулевых и линейных членов разложения, содержащих как регулярные, так и погранслойные функции, затухающие с течением времени. Показано, что процесс установления характеризуется двумя временными масштабами. Первый масштаб определяет резкий рост максимума давления сразу после скачка нагрузки. Второй – отражает процесс плавной релаксации давления к стационарному значению, соответствующему возросшему значению нагрузки. Полученные результаты обосновывают важность учета нестационарных переходных процессов в узлах трения летательных аппаратов. Если при медленном (квазистационарном) возрастании нагрузки в 2 раза максимальное по слою давление испытывает примерно двукратное увеличение, то в результате аналогичного по величине, но внезапного скачка нагрузки максимальное по слою давление во время переходного процесса кратковременно возрастает более чем на порядок. Такой значительный и резкий скачок давления в смазочном слое может критически отразиться на ресурсе всего узла трения.

Ключевые слова: смазочный слой, гидродинамическая смазка, колебания ролика, асимптотическое разложение.

Sibirskii Gosudarstvennyi Aerokosmicheskii Universitet
imeni Akademika M. F. Reshetneva. Vestnik
Vol. 18, No. 1, P. 50–57

NONSTEADY OSCILLATIONS OF THE ROLLER CONTACTING WITH RIGID SURFACE WITH LUBRICATION LAYER

V. A. Ivanov[1], N. V. Erkaev[2].

[1]Siberian Federal University, Polytechnic Institute
26, Kirenskogo Str., Krasnoyarsk, 660074, Russian Federation
[2]Institute of Computational Modelling SB RAS
50/44, Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation
[*]E-mail: VinTextrim@yandex.ru

Analytical solution is obtained for the problem of non-steady hydrodynamic contact between roller and solid body in a presence of liquid lubrication material. This problem is very actual one because nonsteady regime is dominating during launching of spacecrafts. Distribution of the pressure along the lubrication layer is obtained by integration of the Reynolds equation taking into account both the tangential and normal velocities of the roller. Normal oscillations of the roller contacting with lubrication layer is described by a stiff second order ordinary differential equation. Solution of this equation is presented as an asymptotic series expansion with respect to the singular small parameter.

It was found that the relaxation process is characterized by two different time scales. The first one determines a steep growth of the pressure maximum just after the loading jump. The second one is related to a relatively slow process of the pressure relaxation to its stationary state corresponding to the enhanced loading value. The obtained results indicate clearly that simulation and analysis of nonsteady relaxations processes in bearing devices of flight vehicles is of great importance. In particular, in case of slow quasi-stationary increase of loading in 2 times the pressure maximum over the lubrication layer has approximately two-fold enhancement. However, similar in amplitude, but sudden jump of loading yields much stronger enhancement (more than in 10 times) of the pressure maximum over the lubrication layer during the time-relaxation process. Such strong and fast pressure jump in the lubrication layer can make a crucial influence on the operation resources of vehicles.

Keyword: lubrication layer, hydrodynamic lubrication, roller oscillation, asymptotic series expansion.

Введение. Стационарная гидродинамическая задача контакта ролика с пластиной при наличии смазочного слоя, разделяющего поверхности, рассматривалась во многих публикациях [1–5] и достаточно хорошо изучена. В то же время нестационарные аспекты гидродинамического контакта ролика с твердой поверхностью остаются в значительной мере неисследованными. Эта тема важна и актуальна, так как именно нестационарный контакт свойственен роликоподшипникам, работающим при переменных нагрузках, которые возникают при стартах космических аппаратов. При такой работе подшипников происходят быстрые изменения зазоров между контактирующими телами, сопровождающиеся значительным ростом вертикальных скоростей, которые, в свою очередь, приводят к резкому росту пиковых значений давления в смазочном слое.

В данной статье рассматривается асимптотический аналитический метод [6–8] решения нестационарной гидродинамической задачи с применением коэффициента демпфирования смазочного слоя.

Схема контактного взаимодействия цилиндрического ролика с твердой поверхностью, покрытой слоем смазочного материала, представлена на рис. 1.

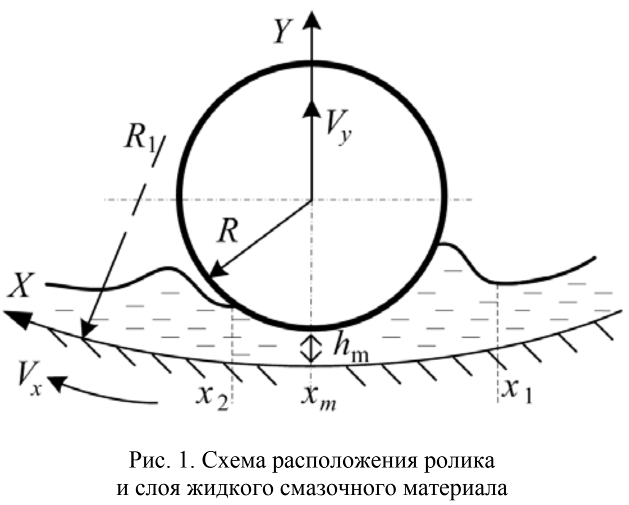

Рис. 1. Схема расположения ролика
и слоя жидкого смазочного материала

Расчет давления в смазочном слое. Рассмотрим идеализированную модель контакта ролика с поверхностью при постоянном коэффициенте вязкости в смазочном слое [9; 10]. В этом случае распределение давления определяется из уравнения Рейнольдса [11]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial P}{\partial x}\right)=6\mu V\left(-\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{2}{V}\frac{\partial h}{\partial t}\right), \qquad (1)$$

где P – давление в смазочном слое; V – тангенциальная скорость ролика относительно поверхности; μ – динамическая вязкость масла при нормальном давлении; h – толщина смазочного слоя, зависящая от деформации поверхностей. Ось x ориентирована вдоль поверхности контакта, как показано на рис. 1. Здесь используется система отсчета, в которой ролик имеет нулевую тангенциальную скорость, а поверхность, соответственно, движется в направлении X.

В предположении, что площадка контакта цилиндра и плоскости мала по сравнению с радиусом кривизны R, имеем следующее выражение для толщины слоя смазочного материала [2]:

$$h=h_m+(x-x_m)^2/(2R), \qquad (2)$$

где h_m – минимальная толщина смазочного слоя; x_m – координата точки минимального зазора.

Граничные условия в рассматриваемом случае имеют следующий вид [2]:

$$P(x_1)=P(x_2)=\frac{dP}{dx}(x_2)=0, \qquad (3)$$

где x_1 и x_2 – входная и выходная границы смазочного слоя.

Для удобства решения задачи вводим безразмерные переменные:

$$\tilde{x}=(x-x_m)/\sqrt{h_m R},\quad q=Ph_m^{1.5}/\left(6\mu V\sqrt{R}\right),\qquad \upsilon=\frac{V_y}{V}\sqrt{\frac{R}{h_m}}. \qquad (4)$$

Используя (4), преобразуем исходное уравнение Рейнольдса (1) к более простому виду:

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\left(H(\tilde{x})^3\frac{\partial q}{\partial\tilde{x}}\right)=\frac{\partial H(\tilde{x})}{\partial\tilde{x}}+2\upsilon,\qquad H(\tilde{x})=1+\tilde{x}^2/2. \qquad (5)$$

Положения входной и выходной границ будем характеризовать безразмерными параметрами a и c. Значение параметра a зависит от количества смазки. В случае обильной смазки полагаем $a=-\infty$ [2; 3; 12].

Интегрируя уравнение (5) и используя нулевое граничное условие (3) для производной функции давления при $x=c$, получаем дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{\partial q}{\partial \tilde{x}}=\frac{H(\tilde{x})-H(c)}{H(\tilde{x})^3}-\frac{2\varepsilon(\tilde{x}-c)}{H(\tilde{x})^3}=$$

$$=\frac{\left(\tilde{x}^2-c^2\right)/2}{\left(1+\tilde{x}^2/2\right)^3}-\frac{2\upsilon(\tilde{x}-c)}{\left(1+\tilde{x}^2/2\right)^3}. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) зависит от безразмерного параметра υ, который связан с нормальной скоростью перемещения ролика. Интегрируя уравнение (6) для различных значений υ, находим распределение давления в смазочном слое с учетом нормальной скорости ролика (рис. 2):

$$q(\tilde{x})=\frac{1}{16}\left(\begin{array}{c}-\dfrac{2\tilde{x}\left(c^2(3\tilde{x}^2+10)-2\tilde{x}^2+4\right)}{\left(\tilde{x}^2+2\right)^2}-\\ -\sqrt{2}\left(3c^2-2\right)\operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{\tilde{x}}{\sqrt{2}}\right)\end{array}\right)+$$

$$+\frac{20c\tilde{x}^3+3\sqrt{2}c\left(\tilde{x}^2+2\right)^2\arctan\left(\dfrac{\tilde{x}}{\sqrt{2}}\right)+20c\tilde{x}+16}{8\left(\tilde{x}^2+2\right)^2}2\upsilon. \quad (7)$$

Определение коэффициента демпфирования смазочного слоя. По найденным распределениям давления определяем значения несущей способности, являющейся функцией параметра υ:

$$W'(\upsilon)=\int_a^c q(x,\upsilon)dx. \quad (8)$$

Согласно формуле (7), давление линейно зависит от параметра υ, поэтому несущую способность также представим в виде линейной функции следующего вида:

$$W'=W_0'+A\upsilon, \quad (9)$$

где постоянные коэффициенты W_0' и A равны 0,401 и 1,125 соответственно.

Для перехода к размерному виду используем зависимость

$$W=W_0'\frac{6\mu VR}{h_m}. \quad (10)$$

С учетом соотношений (4) и (10), преобразуем выражение (9) к размерному виду:

$$W=W_0'\frac{6\mu VR}{h_m}+A\frac{6\mu R^{3/2}}{h_m^{3/2}}V_y. \quad (11)$$

Здесь первое слагаемое выражает зависимость стационарной несущей способности от зазора при нулевой нормальной скорости, а второе слагаемое учитывает влияние нормальной компоненты скорости. Коэффициент перед скоростью будем называть коэффициентом демпфирования λ:

$$\lambda=A\frac{6\mu R^{3/2}}{h_m^{3/2}}. \quad (12)$$

Исследование нестационарного процесса. Для исследования нестационарного процесса запишем уравнение движения ролика по нормали к поверхности:

$$m\frac{d^2h_m}{dt^2}+\lambda(h_m)\frac{dh_m}{dt}-W_0(h_m)=-F, \quad (13)$$

где m – масса ролика; F – внешняя нагрузка.

С учетом зависимостей (11) и (12) уравнение (13) принимает следующий вид:

$$m\frac{d^2h_m}{dt^2}+A\frac{6\mu R^{3/2}}{h_m^{3/2}}\frac{dh_m}{dt}-W_0'\frac{6\mu VR}{h_m}=-F. \quad (14)$$

Полагая равными нулю производные по времени, определяем равновесное значение зазора:

$$h_0=\frac{6\mu VRW_0'}{F}. \quad (15)$$

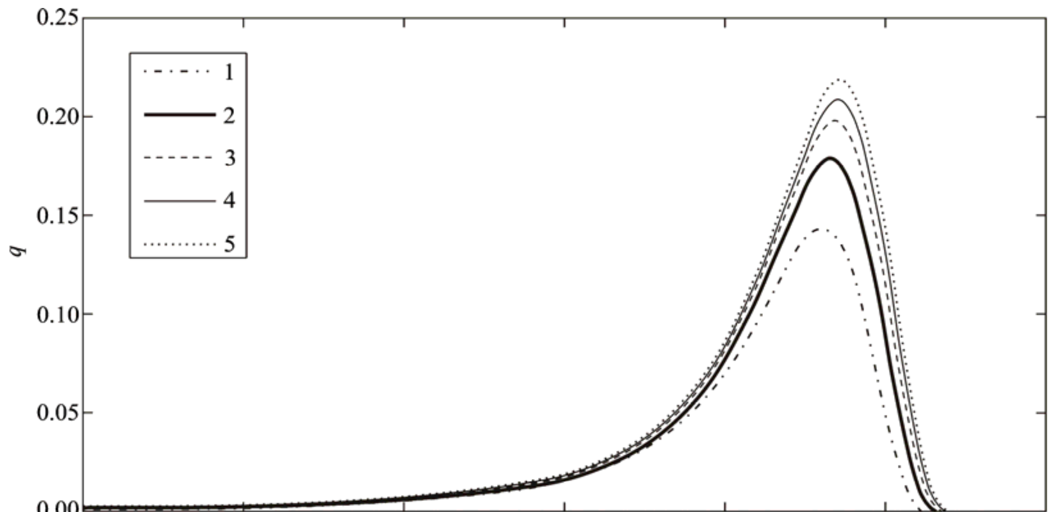

Рис. 2. Безразмерное распределение давления в смазочном слое при разных υ:
1 – υ = +0,1; 2 – υ = +0,05; 3 – υ = 0; 4 – υ = –0,05; 5 – υ = –0,1

Принимая h_0 в качестве базового зазора, вводим безразмерные переменные:

$$h_m = h' h_0, \quad t = t' t_0, \quad t_0 = \frac{A\sqrt{Rh_0}}{VW_0'}. \tag{16}$$

Используя нормировки (16), приводим уравнение динамики к безразмерному виду:

$$\varepsilon \ddot{h}' + \frac{1}{h'^{3/2}}\dot{h}' - \frac{1}{h'} + 1 = 0, \tag{17}$$

$$\varepsilon = \frac{mV^2 W_0'^2}{A^2 FR}.$$

Уравнение (17) определяет зависимость зазора от времени в процессе установления стационарного режима. Характерное время переходного процесса определяется параметром t_0.

Зададим начальные условия при $t = 0$:

$$h(0) = h_m / h_0 \equiv h_0^*, \quad \dot{h}(0) = 0. \tag{18}$$

Так как параметр ε при старшей производной является малым, то уравнение называется жестким [13], и его решение может быть приближенно представлено в виде асимптотического разложения по сингулярному малому параметру [14; 15]:

$$h' = \bar{h}(t', \varepsilon) + \tilde{h}(\tau, \varepsilon), \quad \tau = t' / \varepsilon,$$

где первое слагаемое

$$\bar{h}(t', \varepsilon) = \bar{h}_0(t') + \varepsilon\, \bar{h}_1(t') + \ldots + \varepsilon^k\, \bar{h}_k(t') + \ldots$$

является регулярной частью асимптотики, а второе слагаемое

$$\tilde{h}(\tau, \varepsilon) = \tilde{h}_0(\tau) + \varepsilon\, \tilde{h}_1(\tau) + \ldots + \varepsilon^k\, \tilde{h}_k(\tau) + \ldots$$

представляет собой сингулярную часть асимптотики, называемую также в литературе погранслойной асимптотикой. На пограничные функции накладываются дополнительные граничные условия затухания

$$\tilde{h}_k(\tau) \to 0, \quad \tau \to \infty. \tag{19}$$

Для первых членов асимптотики имеем выражения

$$h' = \bar{h}_0(t) + \varepsilon \bar{h}_1(t) + \varepsilon \tilde{h}_1(\tau), \tag{20}$$

$$\dot{h}' = \dot{\bar{h}}_0(t) + \varepsilon \dot{\bar{h}}_1(t) + \varepsilon \dot{\tilde{h}}_1(\tau). \tag{21}$$

Уравнения на функции регулярной и погранслойной частей асимптотики можно получить путем подстановки выражения (14) в уравнение колебаний (17), группировки членов с одинаковыми степенями малого параметра и приравнивая к нулю. В результате получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{1}{\bar{h}_0} - \frac{1}{\bar{h}_0^{3/2}} \frac{d\bar{h}_0}{dt'} - 1 = 0, \tag{22}$$

$$\frac{d\bar{h}_1}{dt'} + \frac{\bar{h}_1}{2\sqrt{\bar{h}_0}}\left(3\bar{h}_0 - 1\right) = -\ddot{\bar{h}}_0, \tag{23}$$

$$\frac{d^2 \tilde{h}_1}{d\tau^2} + \frac{1}{\bar{h}_0(0)^{3/2}} \frac{d\tilde{h}_1}{d\tau} = 0. \tag{24}$$

Интегрируя уравнение (22), получаем:

$$\bar{h}_0(t') = \left(\frac{e^t \left| \frac{\sqrt{\bar{h}_0^*} + 1}{\sqrt{\bar{h}_0^*} - 1} \right| + 1}{e^t \left| \frac{\sqrt{\bar{h}_0^*} + 1}{\sqrt{\bar{h}_0^*} - 1} \right| - 1} \right)^2. \tag{25}$$

Функция (25) удовлетворяет начальному условию $h(0)$, но дает ненулевую начальную скорость:

$$\dot{\bar{h}}_0(0) = \left(\frac{1}{\bar{h}_0^*} - 1 \right)\left(\bar{h}_0^*\right)^{3/2}. \tag{26}$$

Для компенсации этой скорости далее вводится погранслойное решение.

Далее переходим к определению второго члена регулярной части асимптотики. Для этого преобразуем уравнение (23) к виду

$$-\frac{1}{h_0^2}\bar{h}_1 + \frac{3}{2}\frac{1}{h_0^{5/2}}\bar{h}_1 \dot{\bar{h}}_0 - \frac{1}{h_0^{3/2}}\dot{\bar{h}}_1 = \ddot{\bar{h}}_0, \tag{27}$$

где

$$\dot{\bar{h}}_0 = \left(1 - \bar{h}_0\right)\sqrt{\bar{h}_0}. \tag{28}$$

Подставляя (28) в (27) и выполняя алгебраические преобразования, получаем:

$$\dot{\bar{h}}_1 + \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_0}}\left(3\bar{h}_0 - 1\right)\bar{h}_1 = -\ddot{\bar{h}}_0 \bar{h}_0^{3/2}. \tag{29}$$

Введем замену:

$$\dot{\bar{h}}_1 = \frac{d\bar{h}_1}{dt'} = \frac{d\bar{h}_1}{d\bar{h}_0}\frac{d\bar{h}_0}{dt'} = \frac{d\bar{h}_1}{d\bar{h}_0}\dot{\bar{h}}_0,$$
$$\ddot{\bar{h}}_0 = \frac{d\dot{\bar{h}}_0}{d\bar{h}_0}\dot{\bar{h}}_0 = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\bar{h}}_0^2}{d\bar{h}_0}. \tag{30}$$

Подставляя (30) в (29), получим следующее выражение:

$$\frac{d\bar{h}_1}{d\bar{h}_0}\dot{\bar{h}}_0 + \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_0}}\left(3\bar{h}_0 - 1\right)\bar{h}_1 =$$
$$= -\frac{d\dot{\bar{h}}_0}{d\bar{h}_0}\dot{\bar{h}}_0 \bar{h}_0^{3/2} = -\frac{1}{2}\frac{d\,\dot{\bar{h}}_0^2}{d\,\bar{h}_0}\bar{h}_0^{3/2}. \tag{31}$$

Следовательно,

$$\frac{d}{d\bar{h}_0}\dot{\bar{h}}_0^2 = \left(1 - \bar{h}_0\right)\left(1 - 2\bar{h}_0\right). \tag{32}$$

Выражение (31) с учетом (32) примет вид

$$\frac{d\bar{h}_1}{dh_0}\sqrt{\bar{h}_0}\left(1 - \bar{h}_0\right) + \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_0}}\left(3\bar{h}_0 - 1\right)\bar{h}_1 =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(1 - \bar{h}_0\right)\left(1 - 2\bar{h}_0\right)\bar{h}_0^{3/2}. \tag{33}$$

Разделив уравнение (33) на коэффициент при старшей производной, получим дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\frac{d\bar{h}_1}{d\bar{h}_0}+\frac{1}{2\bar{h}_0}\frac{\left(3\bar{h}_0-1\right)}{\left(1-\bar{h}_0\right)}\bar{h}_1=-\frac{1}{2}\left(1-2\bar{h}_0\right)\bar{h}_0. \quad (34)$$

Общим решением уравнения (34) является функция

$$\bar{h}_1=\bar{G}(\bar{h}_0)\exp\left[-\frac{1}{2}\int\limits_{\bar{h}_0^*}^{\bar{h}_0}\frac{\left(3s-1\right)}{s\left(1-s\right)}ds\right]. \quad (35)$$

Преобразуем подынтегральное выражение:

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\bar{h}_0^*}^{\bar{h}_0}\frac{\left(3s-1\right)}{\bar{h}_0\left(1-s\right)}ds=\int\limits_{\bar{h}_0^*}^{\bar{h}_0}\left(\frac{1}{2s}-\frac{1}{1-s}\right)ds=$$

$$=\left[\frac{1}{2}\ln s+\ln(1-s)\right]\Bigg|_{\bar{h}_0^*}^{\bar{h}_0}=\ln\left[\left(1-s\right)\sqrt{s}\right]\Bigg|_{\bar{h}_0^*}^{\bar{h}_0}=$$

$$=\ln\left[\frac{(1-\bar{h}_0)\sqrt{\bar{h}_0}}{(1-\bar{h}_0^*)\sqrt{\bar{h}_0^*}}\right]. \quad (36)$$

Тогда уравнение (35) с учетом (36) примет вид

$$\bar{h}_1=\bar{G}(\bar{h}_0)\frac{(1-\bar{h}_0)\sqrt{\bar{h}_0}}{(1-\bar{h}_0^*)\sqrt{\bar{h}_0^*}}=G(\bar{h}_0)(1-\bar{h}_0)\sqrt{\bar{h}_0}, \quad (37)$$

где G – неизвестная функция, определяющаяся интегрированием следующего уравнения:

$$\frac{d\,G(\bar{h}_0)}{d\,\bar{h}_0}=-\frac{1}{2}\frac{\left(1-2\bar{h}_0\right)\sqrt{\bar{h}_0}}{\left(1-\bar{h}_0\right)}. \quad (38)$$

Вычисляя интеграл, находим

$$G(\bar{h}_0)=-\frac{1}{2}\int\limits_{\bar{h}_0^*}^{\bar{h}_0}\frac{\left(1-2s\right)\sqrt{s}}{\left(1-s\right)}ds+C_0=$$

$$=-\int\limits_{\bar{h}_0^*}^{\bar{h}_0}\sqrt{s}ds+\frac{1}{2}\int\limits_{\bar{h}_0^*}^{\bar{h}_0}\frac{\sqrt{s}}{1-s}ds+C_0. \quad (39)$$

В подынтегральном выражении второго слагаемого уравнения (39) применяем замену переменных $u=\sqrt{s}$ и выполняем алгебраические преобразования:

$$\int\frac{\sqrt{s}}{1-s}ds=2\int\frac{u^2}{1-u^2}du=$$

$$=\int\frac{1}{u+1}du-\int\frac{1}{u-1}du-2\int du. \quad (40)$$

Интегрируя (40) и производя обратную замену переменных, получим выражение:

$$G(\bar{h}_0)=-\frac{2}{3}\bar{h}_0^{3/2}+\frac{2}{3}\left(\bar{h}_0^*\right)^{3/2}+\sqrt{\bar{h}_0}-$$

$$-\sqrt{\bar{h}_0^*}-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{\sqrt{\bar{h}_0}+1}{\sqrt{\bar{h}_0}-1}+\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{\sqrt{\bar{h}_0^*}+1}{\sqrt{\bar{h}_0^*}-1}+C_0. \quad (41)$$

С учетом уравнения (41) уравнение (37) примет вид

$$\bar{h}_1=\left(1-\bar{h}_0\right)\sqrt{\bar{h}_0}\left(-\frac{2}{3}\bar{h}_0^{3/2}+\frac{2}{3}\left(\bar{h}_0^*\right)^{3/2}+\sqrt{\bar{h}_0}-\sqrt{\bar{h}_0^*}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{\sqrt{\bar{h}_0}+1}{\sqrt{\bar{h}_0}-1}+\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{\sqrt{\bar{h}_0^*}+1}{\sqrt{\bar{h}_0^*}-1}+C_0\right). \quad (42)$$

Далее, интегрируя уравнение (24) с учетом условия затухания при $\tau\to\infty$, получаем выражение

$$\frac{d\tilde{h}_1}{d\tau}=C_1\exp\left(-\tau/(\bar{h}_0^*)^{3/2}\right). \quad (43)$$

Постоянная интегрирования C_1 определяется из условия нулевой начальной скорости для полного решения, представляющего собой сумму регулярной и погранслойной асимптотик. Так как первый член регулярной асимптотики дает ненулевое начальное значение скорости

$$\frac{d\bar{h}_0}{dt}=\left(1-\frac{1}{\bar{h}_0^*}\right)\left(\bar{h}_0^*\right)^{3/2}, \quad (44)$$

то подбираем постоянную C_1 таким образом, чтобы погранслойное решение компенсировало значение (26) при $\tau=0$:

$$C_1=\left(\frac{1}{\bar{h}_0^*}-1\right)\left(\bar{h}_0^*\right)^{3/2}. \quad (45)$$

Подставляя найденное значение в выражение (44) и повторно интегрируя, находим выражение погранслойной части асимптотики:

$$\tilde{h}_1=-\left(\bar{h}_0^*-1\right)\sqrt{\bar{h}_0^*}\exp\left(-\frac{\tau}{\left(\bar{h}_0^*\right)^{3/2}}\right)\left(\bar{h}_0^*\right)^{3/2}+C_2. \quad (46)$$

Константа C_2 подбирается таким образом, чтобы решение удовлетворяло нулевому граничному условию при $\tau\to\infty$ ($C_2=0$).

Найденная погранслойная функция дает ненулевое возмущение в начальный момент времени, которое можно скомпенсировать подбором постоянной интегрирования C_0 в выражении второго члена регулярной асимптотики:

$$C_0=\left(1-\bar{h}_0(t)\right)\sqrt{\bar{h}_0(t)}\frac{\left(\bar{h}_0^*\right)^2\left|\bar{h}_0^*-1\right|}{\left(1-\bar{h}_0^*\right)\sqrt{\bar{h}_0^*}}. \quad (47)$$

В результате итоговое выражение принимает вид:

$$\bar{h}_1=\left(\bar{h}_0(t)-1\right)\sqrt{\bar{h}_0}\left(\frac{2}{3}\left(\bar{h}_0(t)\right)^{3/2}-\frac{2}{3}\left(\bar{h}_0^*\right)^{3/2}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\bar{h}_0(t)}+\sqrt{\bar{h}_0^*}+\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{\sqrt{\bar{h}_0(t)}+1}{\sqrt{\bar{h}_0(t)}-1}-\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{\sqrt{\bar{h}_0^*}+1}{\sqrt{\bar{h}_0^*}-1}\right)+$$

$$+\left(1-\bar{h}_0(t)\right)\sqrt{\bar{h}_0(t)}\frac{\left(\bar{h}_0^*\right)^2\left|\bar{h}_0^*-1\right|}{\left(1-\bar{h}_0^*\right)\sqrt{\bar{h}_0^*}}. \quad (48)$$

После определения всех функций регулярной и погранслойной частей асимптотики уравнения (20) построим график зависимости зазора от времени для различных начальных значений (рис. 3).

Рис. 3 показывает, что после любого внезапного скачка нагрузки, который характеризуется безразмерным параметром $h'(0)$, величина зазора стремится к новому равновесному значению. При этом скорость изменения зазора тем больше, чем больше начальное отклонение зазора от равновесного значения. На рис. 4 представлен график изменения относительной скорости сближения поверхностей между контактирующими телами со временем для начального условия $h'(0) = 2$.

Рис. 4 показывает, что увеличение параметра ε приводит к более плавному изменению вертикальной скорости (dh'/dt'). При этом для очень малых значений ε скорость изменения зазора возрастает практически мгновенно, что в свою очередь вызывает резкий и большой скачок давления.

Зная зависимость зазора от времени, построим график изменения максимума давления (рис. 5).

Из рис. 5 видно, что процесс установления можно охарактеризовать двумя временными интервалами. На первом интервале отмечается очень быстрый рост давления. Амплитуда и длительность роста давления определяется параметром ε. Чем меньше малый параметр ε, тем быстрее увеличивается со временем давление в смазочном слое. На втором временном интервале происходит процесс плавного спада давления к стационарному значению, соответствующему установившемуся состоянию смазочного слоя при постоянной нагрузке. На рис. 6 представлен график нелинейной зависимости пикового значения давления от величины начального зазора, отнесенного к равновесному значению. Данный график показывает, что чем больше малый параметр ε и чем больше отклонение от равновесного зазора, тем сильнее проявляется нелинейность увеличения пикового давления. Величина h_m/h_0 обратно пропорциональна скачку внешней нагрузки (отношению действующих сил F_1/F_0).

Рис. 5 и 6 показывают, насколько важно учитывать нестационарные переходные процессы в узлах трения летательных аппаратов. Например, при медленном (квазистационарном) увеличении нагрузки в 2 раза максимальное по слою давление увеличивается в 2,2 раза. Однако после внезапного скачка нагрузки в 2 раза во время переходного процесса максимальное по слою давление кратковременно возрастает в 13 раз. Такой резкий скачок давления в смазочном слое между контактирующими поверхностями критически сказывается на ресурсе всего узла трения.

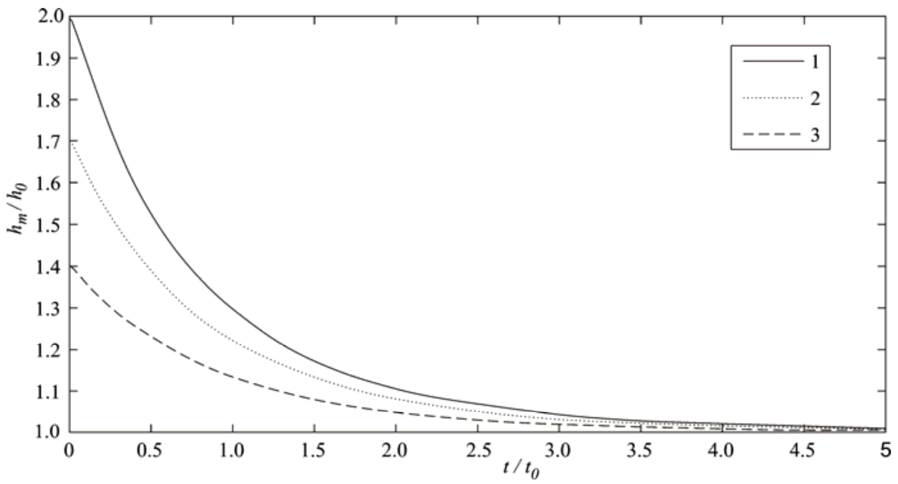

Рис. 3. Зависимость зазора от времени при ε = 0,01 для различных начальных условий:
1 – $h'(0) = 2$; 2 – $h'(0) = 1,7$; 3 – $h'(0) = 1,4$

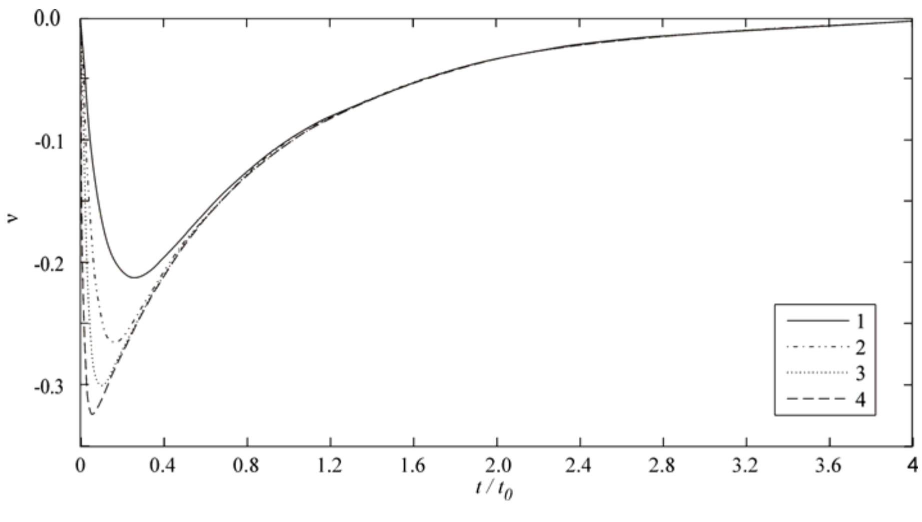

Рис. 4. Относительная скорость изменения зазора при начальном условии $h'(0) = 2$
для различных значений малого параметра:
1 – ε = 0,04; 2 – ε = 0,02; 3 – ε = 0,01; 4 – ε = 0,005

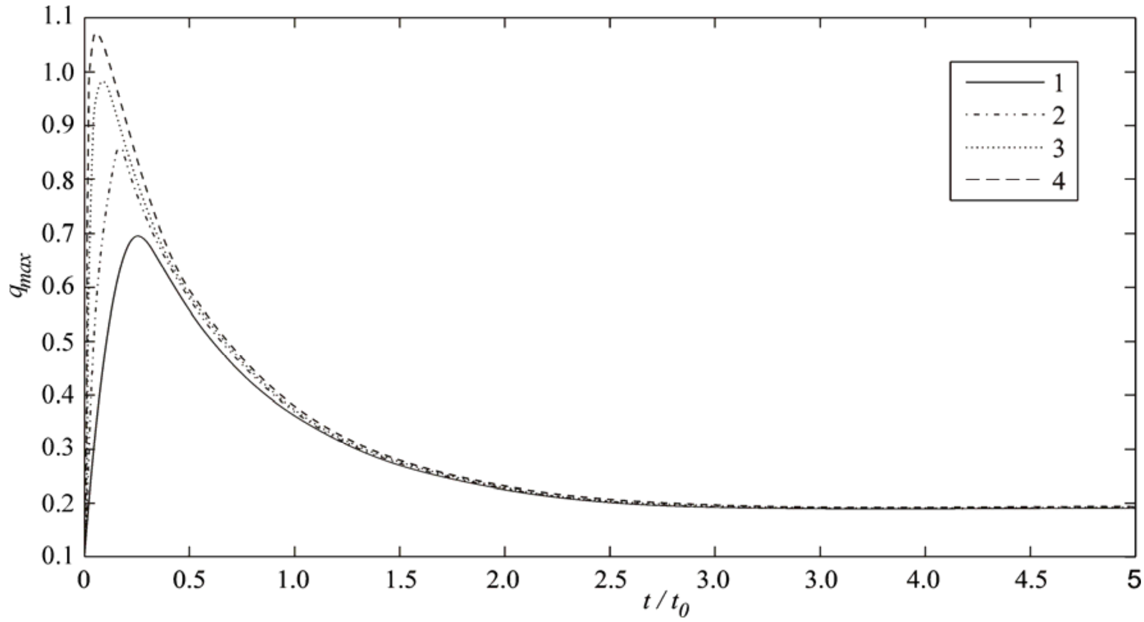

Рис. 5. Зависимость максимума давления от времени:
1 – ε = 0,04; 2 – ε = 0,02; 3 – ε = 0,01; 4 – ε = 0,005

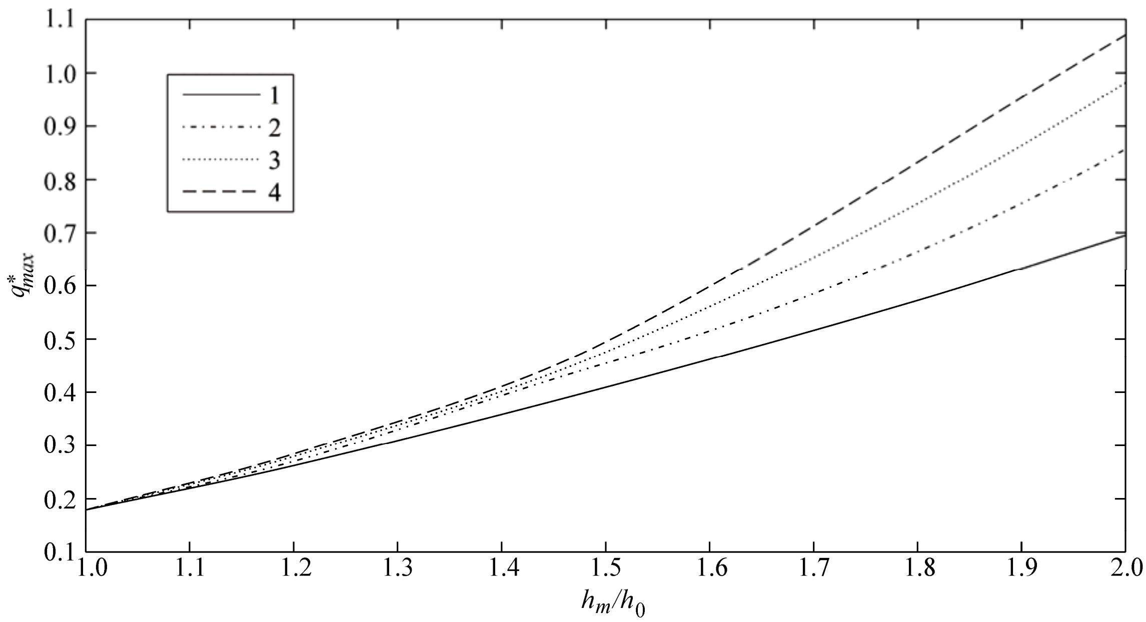

Рис. 6. Влияние начального условия на изменение пика давления для различных ε:
1 – ε = 0,04; 2 – ε = 0,02; 3 – ε = 0,01; 4 – ε = 0,005

Заключение. Построено асимптотическое аналитическое решение задачи нестационарного контактного взаимодействия ролика с твердой поверхностью при наличии смазочного слоя в зоне контакта. Показано, что процесс установления характеризуется двумя временными масштабами. Первый – определяет резкий рост максимума давления сразу после скачка нагрузки. Второй – отражает процесс плавной релаксации давления к стационарному значению, соответствующему возросшему значению нагрузки. Полученные результаты обосновывают важность учета нестационарных переходных процессов в узлах трения летательных аппаратов. Если при медленном (квазистационарном) возрастании нагрузки в 2 раза максимальное по слою давление испытывает примерно двукратное увеличение, то в результате аналогичного по величине, но внезапного скачка нагрузки максимальное по слою давление во время переходного процесса кратковременно возрастает более чем на порядок. Такой значительный и резкий скачок давления в смазочном слое может критически отразиться на ресурсе всего узла трения.

Библиографические ссылки

1. Коднир Д. С. Контактная гидродинамика смазки деталей машин. М. : Машиностроение, 1976. 304 с.

2. Галахов М. А., Усов П. П. Дифференциальные и интегральные уравнения математической модели теории трения. М. : Наука : Физматлит, 1990. 280 с.

3. Терентьев В. Ф., Еркаев Н. В. Трибонадежность подшипниковых узлов в присутствии модифицированных смазочных композиций. Новосибирск : Наука, 2003. 142 с.

4. Коднир Д. С. Контактная гидродинамика смазка деталей машин. М. : Машиностроение, 1976. 304 с.

5. Александров В. М., Ромалис Б. Л. Контактные задачи в машиностроении. М. : Машиностроение, 1986. 176 с.

6. Александров В. М., Чебаков М. И. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости. М. : Физматлит, 2004. 301 с.

7. Аргатов И. И. Асимптотические модели упругого контакта. СПб. : Наука, 2005. 447 с.

8. Беспорточный А. И. Асимптотические режимы гидродинамического контакта жестких цилиндров, покрытых тонкими упругими слоями // Труды МФТИ. 2011. Т. 3, № 1. С. 28–34.

9. Беспорточный А. И., Галахов М. А. Математическое моделирование в триботехнике. М. : МФТИ, 1991. 88 с.

10. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М. : Физматлит, 1980. 304 с.

11. Иванов В. А., Еркаев Н. В. Моделирование нестационарного контакта в подшипнике качения // Вестник СибГАУ. 2015. № 3 (16). С. 580–586.

12. Галахов М. А., Гусятников П. Б., Новиков А. П. Математические модели контактной гидродинамики. М. : Физматлит, 1985. 296 с.

13. Тихонов А. Н. Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М. : Наука, 1979. 288 с.

14. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М. : Высш. шк., 1990. 208 с.

15. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М. : Наука, 1973. 272 с.

References

1. Kodnir D. S. *Kontaktnaya gidrodinamika smazki detaley mashin* [Contact hydrodynamics of lubrication of machine parts]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1976, 304 p.

2. Galakhov M. A, Usov P. P. *Differentsial'nye i integral'nye uravneniya matematicheskoy modeli teorii treniya* [Differential and integral equations of the mathematical model of the friction theory]. Moscow, Nauka, Fiz.-mat. Lit. Publ., 1990, 280 p.

3. Terent'ev V. F., Erkaev N. V. *Tribonadezhnost' podshipnikovykh uzlov v prisutstvii modifitsirovannykh smazochnykh kompozitsiy* [Tribo-durability of bearing units in a presence of modified lubricant compositions]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2003, 142 p.

4. Kodnir D. S. *Kontaktnaya gidrodinamika smazka detaley mashin* [Contact hydrodynamics of lubrication of machine parts]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976, 304 p.

5. Aleksandrov V. M., Romalis B. L. *Kontaktnye zadachi v mashinostroenii* [Contact problems in mechanical engineering]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1986, 176 p.

6. Aleksandrov V. M., Chebakov M. I. *Analiticheskie metody v kontaktnykh zadachakh teorii uprugosti*. [Analytical methods in contact problems of elasticity theory]. Moscow, Fizmatlit. Publ., 2004, 301 p.

7. Argatov I. I. *Asimptoticheskie modeli uprugogo kontakta* [Asymptotic models of elastic contact]. St. Petersburg, Nauka Publ., 2005, 447 p.

8. Besportochnyy A. I. [The asymptotic regimes of hydrodynamic contact of a hard cylinder covered with a thin elastic layers]. *Trudy MFTI*. 2011, Vol. 3, No. 1. P. 28–34 (In Russ.).

9. Besportochnyy A. I., Galakhov M. A. *Matematicheskoe modelirovanie v tribotekhnike*. [Mathematical modeling in tribology]. Moscow, MFTI Publ., 1991, 88 p.

10. Galin L. A. *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti i vyazkouprugosti* [Contact problems of the theory of elasticity and viscoelasticity]. Moscow, Fizmatlit. Publ., 1980, 304 p.

11. Ivanov V. A., Erkaev N. V. [Simulation of nonsteady contact in rolling bearings]. *Vestnik SibGAU*. 2015, Vol. 16, No. 3, P. 580–586 (In Russ.).

12. Galakhov M. A., Gusyatnikov P. B., Novikov A. P. *Matematicheskie modeli kontaktnoy gidrodinamiki* [Mathematical models of contact hydrodynamics]. Moscow, Fizmatlit. Publ., 1985, 296 p.

13. Tikhonov A. N. Arsenin V. Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods of solving ill-posed problems]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 288 p.

14. Vasil'eva A. B., Butuzov V. F. *Asimptoticheskie metody v teorii singulyarnykh vozmushcheniy* [Asymptotic methods in the theory of singular perturbations]. Moscow, Vyssh. Shk., 1990, 208 p.

15. Vasil'eva A. B., Butuzov V. F. *Asimptoticheskie razlozheniya resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy* [Asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed equations]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 272 p.