

ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАФОВ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ПУЗЫРЬКОВОЙ СОРТИРОВКИ НА ОСНОВЕ ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

А. А. Кузнецов*, В. В. Кишкан

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31

*E-mail: kuznetsov@sibsau.ru

Определение графа Кэли было дано известным английским математиком Артуром Кэли в XIX веке для представления алгебраической группы, заданной фиксированным множеством порождающих элементов. В настоящее время графы Кэли нашли широкое применение как в математике, так и в прикладных задачах. В частности, указанные графы используются для представления компьютерных сетей, в том числе для моделирования топологий многопроцессорных вычислительных систем – суперкомпьютеров. Это связано с тем, что графы Кэли имеют много привлекательных свойств, из которых выделим их регулярность, вершинную транзитивность, малые диаметр и степень при достаточно большом количестве вершин в графе. Например, такие базовые топологии сети, как «кольцо», «гиперкуб» и «тор», являются графами Кэли. При помощи суперкомпьютерных вычислений получены ранее неизвестные характеристики графов Кэли модифицированной пузырьковой сортировки размерности 14 и 15.

Ключевые слова: граф Кэли, многопроцессорная вычислительная система, граф модифицированной пузырьковой сортировки.

Siberian Journal of Science and Technology. 2017, Vol. 18, No. 3, P. 525–529

USING HIGH-PERFORMANCE COMPUTATIONS FOR STUDYING MODIFIED BUBBLE-SORT GRAPHS

A. A. Kuznetsov*, V. V. Kishkan

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology
31, Krasnoyarsky Rabochy Av., Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation

*E-mail: kuznetsov@sibsau.ru

The definition of the Cayley graph was given by the famous English mathematician Arthur Cayley in the XIX century to represent algebraic group defined by a fixed set of generating elements. At present, Cayley graphs are widely used both in mathematics and in applications. In particular, these graphs are used to represent computer networks, including the modeling of topologies of multiprocessor computer systems – supercomputers. This is due to the fact that Cayley graphs have many attractive properties such as regularity, vertex transitive, small diameter and degree at a sufficiently large number of vertices in the graph. For example, such a basic network topology as the “ring”, “hypercube” and “torus” are the Cayley graphs. Using supercomputer computations we obtained the previously unknown characteristics of modified bubble-sort Cayley graphs of dimensions 14 and 15.

Keywords: the Cayley graph, a multiprocessor computing system, a modified bubble-sort graph.

Введение. Определение графа Кэли было дано известным английским математиком Артуром Кэли в XIX веке для представления алгебраической группы, заданной фиксированным множеством порождающих элементов.

В последние десятилетия теория графов Кэли развивается как отдельная большая ветвь теории графов. Графы Кэли находят применение как в математике, так и за ее пределами. Эффективное применение графы Кэли нашли в информационных технологиях после пионерской работы 1986 года С. Эйкерса и Б. Кришнамурти [1], которые впервые предложили

применять указанные графы для представления компьютерных сетей, в том числе для моделирования топологий многопроцессорных вычислительных систем (МВС) – суперкомпьютеров. С тех пор данное направление активно развивается [2–11]. Это связано с тем, что графы Кэли имеют много привлекательных свойств, из которых стоит отметить их регулярность, вершинную транзитивность, малые диаметр и степень при достаточно большом количестве вершин в графе. Например, такие базовые топологии сети, как «кольцо», «гиперкуб» и «тор», являются графами Кэли.

Напомним определения основных терминов, используемых в работе.

Пусть X – порождающее множество группы G , т. е. $G = \langle X \rangle$. Графом Кэли $\Gamma = \text{Cay}(G, X) = (V, E)$ называют ориентированный граф, обладающий следующими свойствами:

а) множество вершин $V(\Gamma)$ соответствуют элементам группы G ;

б) множество ребер $E(\Gamma)$ состоит из всех упорядоченных пар (g, xg) , где $g \in G$ и $x \in X$.

В дальнейшем будем считать порождающее множество X симметричным и свободным от единичного элемента группы, т. е. $x \in X \Rightarrow x^{-1} \in X$ и $e \notin X$. Поскольку X является свободным от единичного элемента, то граф Γ не содержит петель. Симметричность порождающего множества означает, что граф будет неориентированным и без кратных ребер, т. е. если в графе имеется ребро из g в xg , то оно совпадает с ребром из xg в $x^{-1}(xg) = g$.

Таким образом, $\Gamma = \text{Cay}(G, X) = (V, E)$, где $V = G$ и $E = \{(g, xg) | g \in G, x \in X\}$.

Количество вершин $|V|$ равно порядку группы G . Граф Кэли является регулярным, и его степень s , т. е. количество ребер, выходящее из каждой вершины, равно числу порождающих элементов группы: $s = |X|$.

Шаром K_s радиуса s группы G будем называть множество всех ее элементов, которые могут быть представлены в виде групповых слов в алфавите X длиной, не превышающей s . Для каждого целого неотрицательного s можно определить функцию роста группы $F(s)$, которая будет равна числу элементов группы G относительно X , представимых в виде несократимых групповых слов длиной s . Таким образом,

$$F(0) = |K_0| = 1, F(s) = |K_s| - |K_{s-1}| \text{ при } s \in \mathbb{N}.$$

Как правило, функцию роста конечной группы представляют в виде таблицы, в которую записывают ненулевые значения $F(s)$.

Отметим также, что при вычислении функции роста группы мы параллельно выясняем характеристики соответствующего графа Кэли, например, такие как диаметр и средний диаметр [12]. Пусть $F(s_0) > 0$, но $F(s_0 + 1) = 0$, тогда s_0 будет являться диаметром графа Кэли группы G в алфавите порождающих X , который мы будем обозначать $D_X(G)$. Соответственно, средний диаметр $\bar{D}_X(G)$ равен средней длине минимальных (несократимых) групповых слов.

Вычисление диаметра графа Кэли большой конечной группы является хотя и разрешимой, но весьма сложной проблемой. Это связано с тем, что в общем случае задача по определению минимального слова в группе, как показали С. Ивен и О. Голдрейх в 1981 году [13], является NP-трудной (nondeterministic polynomial). Таким образом, в наихудшем случае количество элементарных операций, которые необходимо выполнить для решения указанной задачи, представляет собой экспоненциальную функцию от $|X|$. Поэтому для эффективного решения задач на графах Кэли, имеющих

большое количество вершин, необходимо применять МВС.

Пусть $S_n = \langle X_n \rangle$, где $X_n = \{(i, i+1) | i = 1, 2, \dots, n\}$ – симметрическая группа, порожденная множеством транспозиций X_n . Граф Кэли $\text{BS}_n = \text{Cay}(S_n, X_n)$ называют графом пузырьковой сортировки (bubble-sort graph) [5]. Свойства данного графа хорошо известны [5], в частности,

$$D_{X_n}(S_n) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ и } \bar{D}_{X_n}(S_n) = \frac{D_{X_n}(S_n)}{2}.$$

Пусть теперь $S_n = \langle \hat{X}_n \rangle$, где $\hat{X}_n = X_n \cup \{(1, n)\}$.

Граф Кэли $\text{MBS}_n = \text{Cay}(S_n, \hat{X}_n)$ называют графом модифицированной пузырьковой сортировки (modified bubble-sort graph) [5]. На сегодняшний день известны характеристики данного графа только для $n \leq 13$. В работе [14] получено, что

$$D_{\hat{X}_n}(S_n) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor \text{ и } \bar{D}_{\hat{X}_n}(S_n) = \frac{n^2 - n + 1}{6} \text{ при } n \leq 13.$$

В настоящей работе представлена модифицированная версия алгоритма А–I из [15], на основе которого при помощи суперкомпьютерных вычислений получены ранее неизвестные характеристики MBS_n -графов для $n = 14$ и 15 .

Алгоритм А–I

Вход: конечная группа $G = \langle X, \circ \rangle$, где $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ – порождающее множество G .

Выход: диаметр $D_X(G)$, средний диаметр $\bar{D}_X(G)$ графа Кэли $\Gamma = \text{Cay}(G, X)$, а также функция роста $F(s)$ группы G , где $0 \leq s \leq D_X(G)$.

1. $s = 0$, $K_0 = \{e\}$, $F(0) = 1$, $P = K_0$.
2. $s = s + 1$.
3. $K_s = K_{s-1}$.
4. $\forall x \in X$ и $\forall p \in P$:
 - 4.1. $g = x \circ p$;
 - 4.2. если $g \in K_s$, то $K_s = K_s \cup \{g\}$.
5. $P = K_s - K_{s-1}$.
6. $F(s) = |P|$.
7. Если $F(s) > 0$, то переход п. 2; иначе $s_0 = s - 1$, переход п. 8.

$$8. D_X(G) = s_0, \bar{D}_X(G) = \frac{1}{|K_{s_0}|} \sum_{s=0}^{s_0} F(s) \cdot s.$$

9. Выход.

В [15] доказана корректность алгоритма А–I, а также получено, что $T(|G|) \in \Theta(|G|^2)$ при $|X| \ll |G|$, где $T(|G|)$ – вычислительная сложность алгоритма А–I и Θ – одновременно верхняя и нижняя асимптотическая оценка сложности.

Для снижения вычислительной сложности требуется способ для нумерации элементов [15]. Пусть $g = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – произвольная перестановка из S_n .

Используя факториальную систему счисления можно однозначно определить номер перестановки (при этом нумерация будет начинаться с нуля). Определим биективное отображение φ следующего вида:

$$g \xrightarrow{\varphi} n_g = \sum_{k=1}^n b_k k!$$

Здесь n_g представляет собой целое неотрицательное число, записанное в факториальной системе счисления, при этом коэффициент b_k при множителе $k!$ будет обозначать число инверсий для элемента α_{k+1} в том множестве, в котором производятся перестановки (количество элементов, меньших α_{k+1} , но стоящих правее его в рассматриваемой перестановке). Легко увидеть, что n_g пробегает все значения от 0 до $n!-1$.

Модифицируем алгоритм А-І следующим образом. В п. 1 добавим булев вектор V , размерностью $n!$, все элементы которого первоначально равны 0. Для удобства индексация элементов V начинается с 0. Ввиду того, что $K_0 = \{e\}$ и $\varphi(e) = 0$, запишем $V_0 = 1$.

Заменяем п. 4.2 алгоритма А-І на следующий:

4.2. если $V_{n_g} = 0$, то $V_{n_g} = 1$ и $K_s = K_s \cup \{g\}$.

Поскольку сложность процедуры перевода перестановки в число и обратно равна $\Theta(1)$, то согласно [15] сложность модифицированного алгоритма А-І будет равна $\Theta(|G|)$.

Также отметим, что в п. 4.1 все элементы g вычисляются независимо друг от друга, поэтому этот уча-

сток алгоритма можно легко распараллелить. В этом случае сначала параллельно вычисляются все произведения g , а затем для каждого элемента получившегося массива последовательно выполняется п. 4.2.

Исследование MBS-графов. Модифицированный алгоритм А-І был реализован на языке C++ и апробирован на 96-ядерном сервере суперкомпьютера СФУ, при этом было задействовано 512 Гб оперативной памяти и 8 Тб дискового пространства. В результате были вычислены функции роста групп $S_{14} = \langle \hat{X}_{14} \rangle$ и $S_{15} = \langle \hat{X}_{15} \rangle$. Затраченное на расчеты время равно примерно 2,5 часа для $n = 14$ и 46 часов для $n = 15$. В табл. 1, 2 приведены функции роста групп S_{14} и S_{15} , а на рис. 1, 2 – их графики. Из табл. 1, 2 следует, что

$$D_{\hat{X}_{14}}(S_{14}) = 49 = \frac{14^2}{4}, \quad \bar{D}_{\hat{X}_{14}}(S_{14}) = 30\frac{1}{2} = \frac{14^2 - 14 + 1}{6},$$

$$D_{\hat{X}_{15}}(S_{15}) = 56 = \left\lfloor \frac{15^2}{4} \right\rfloor,$$

$$\bar{D}_{\hat{X}_{15}}(S_{15}) = 35\frac{1}{6} = \frac{15^2 - 15 + 1}{6}.$$

Таким образом мы можем расширить результат из [14]:

Теорема. Пусть $S_n = \langle \hat{X}_n \rangle$ и $n \leq 15$. Тогда верно, что

$$D_{\hat{X}_n}(S_n) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor \text{ и } \bar{D}_{\hat{X}_n}(S_n) = \frac{n^2 - n + 1}{6}.$$

Таблица 1

Функция роста группы S_{14} в алфавите \hat{X}_{14}

s	$F(s)$	s	$F(s)$	s	$F(s)$	s	$F(s)$	s	$F(s)$
0	1	10	1144066	20	523576508	30	7875671024	40	439630193
1	14	11	2496144	21	807898884	31	8184285564	41	177894717
2	105	12	5200300	22	1206399194	32	8059876006	42	59073300
3	560	13	10399573	23	1741769068	33	7486458696	43	15497794
4	2380	14	20044817	24	2428791549	34	6521589932	44	3095274
5	8568	15	37346764	25	3266926299	35	5291298298	45	457459
6	27132	16	67385500	26	4232447674	36	3964966720	46	46501
7	77520	17	117857285	27	5272211438	37	2715665810	47	2912
8	203490	18	199872075	28	6301765938	38	1678335828	48	93
9	497420	19	328616470	29	7210522410	39	920955932	49	1
$ S_{14} =14!=87178291200$									

Таблица 2

Функция роста группы S_{15} в алфавите \hat{X}_{15}

s	$F(s)$	s	$F(s)$	s	$F(s)$	s	$F(s)$	s	$F(s)$
0	1	12	9657700	24	8330511890	36	111514773216	48	723446997
1	15	13	20058300	25	12267072742	37	108665304904	49	217500207
2	120	14	40115312	26	17570631028	38	100844738930	50	52359036

s	$F(s)$	s	$F(s)$	s	$F(s)$	s	$F(s)$	s	$F(s)$
3	680	15	77540544	27	24463138336	39	88757487936	51	9748102
4	3060	16	145284325	28	33079985068	40	73721997284	52	1343342
5	11628	17	264439921	29	43405123242	41	57447140400	53	126700
6	38760	18	468283120	30	55204143800	42	41700857614	54	7282
7	116280	19	807550010	31	67970322498	43	27958028594	55	210
8	319770	20	1356808058	32	80902850743	44	17132134736	56	2
9	817190	21	2221351570	33	92936928305	45	9472716396		
10	1961256	22	3543440716	34	102839910030	46	4651580804		
11	4457400	23	5505931806	35	109374995290	47	1989274794		
$ S_{15} =15!=1307674368000$									

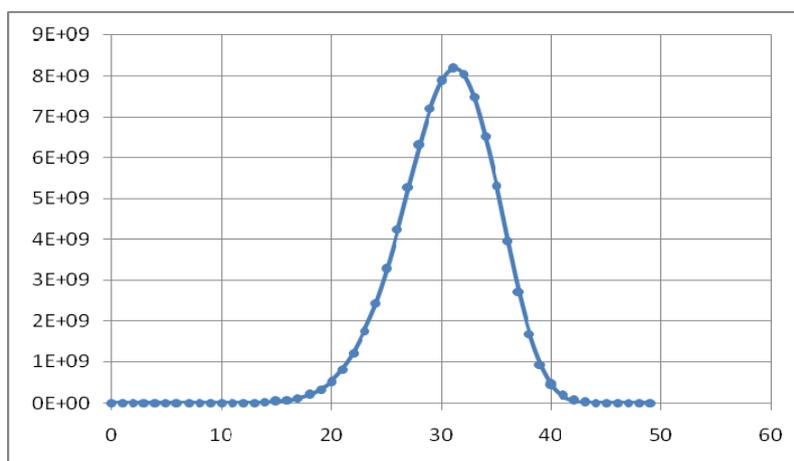


Рис. 1. График функции роста группы S_{14}

Fig. 1. Graph of group growth function

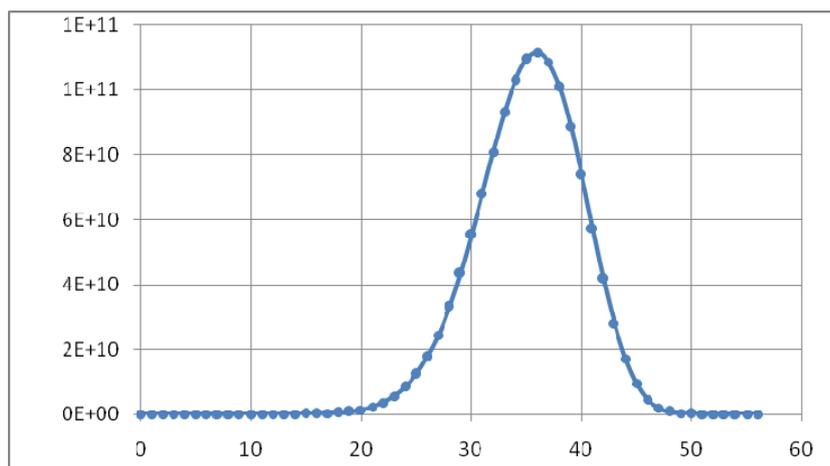


Рис. 2. График функции роста группы S_{15}

Fig. 2. Graph of group growth function

Заключение. Применение высокопроизводительных вычислений позволило продвинуться в изучении свойств MBS_n -графов. Несмотря на это, представить аналитическое решение для произвольного n на сегодняшний день не представляется возможным.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Красноярского края в рамках научного проекта № 17-47-240318.

Acknowledgments. The reported study was funded by RFBR and the government of Krasnoyarsk region according to the research project № 17-47-240318.

Библиографические ссылки

1. Akers S., Krishnamurthy B. A group theoretic model for symmetric interconnection networks // *Proceedings of the International Conference on Parallel Processing*. 1986. Pp. 216–223.
2. Schibell S., Stafford R. Processor interconnection networks and Cayley graphs // *Discrete Applied Mathematics*. 1992. Vol. 40. P. 337–357.
3. Cooperman G., Finkelstein L. New methods for using Cayley graphs in interconnection networks // *Discrete Applied Mathematics*. 1992. Vol. 37. P. 95–118.
4. Lakshmivarahan S., Jho J., Dhall S. Symmetry in interconnection networks based on Cayley graphs of permutation groups: A survey // *Parallel Computing*. 1993. Vol. 19. P. 361–407.
5. Heydemann M. Cayley graphs and interconnection networks, in *Graph symmetry: algebraic methods and applications* / Ed. Hahnand Sabidussi. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1997. P. 167–226.
6. Xu J. *Topological Structure and Analysis of Interconnection Networks*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2001. 352 p.
7. Parhami B. Swapped interconnection networks: Topological, performance, and robustness attributes // *Journal of Parallel and Distributed Computing*. 2005. Vol. 65. P. 1443–1452.
8. Computing the diameter of 17-pancake graphs using a PC cluster / S. Asai [et al.] // *LNSC*. 2006. Vol. 4128. P. 1114–1124.
9. Chen B., Xiao W., Parhami B. Internode distance and optimal routing in a class of alternating group networks // *IEEE Transactionson Computers*. 2006. Vol. 55. P. 1645–1648.
10. Wang L., Tang K. The Cayley Graph implementation in TinyOS for dense wireless sensor networks // *Proc. of the 6th Wireless Telecommunications Symposium*. 2007.
11. Efficient Routing in Data Center with Underlying Cayley Graph / M. Camelo [et al.] // *Proceedings of the 5th Workshop on Complex Networks CompleNet*. 2014. P. 189–197.
12. Кузнецов А. А., Кузнецова А. С. Параллельный алгоритм для исследования графов Кэли групп подстановок // *Вестник СибГАУ*. 2014. № 1(53). С. 34–39.
13. Even S., Goldreich O. The Minimum Length Generator Sequence is NP–Hard // *Journal of Algorithms*. 1981. Vol. 2. P. 311–313.
14. Кузнецов А. А., Кузнецова А. С. О взаимосвязи функций роста в симметрических группах с задачами комбинаторной оптимизации // *Вестник СибГАУ*. 2012. № 6(46). С. 93–97.
15. Кузнецов А. А. Об одном алгоритме вычисления функций роста в конечных двупорожденных группах периода пять // *Прикладная дискретная математика*. 2016. № 3(33). С. 116–125.

References

1. Akers S., Krishnamurthy B. A group theoretic model for symmetric interconnection networks. *Proceedings of the International Conference on Parallel Processing*, 1986, P. 216–223.
2. Schibell S., Stafford R. Processor interconnection networks and Cayley graphs. *Discrete Applied Mathematics*. 1992, Vol. 40, P. 337–357.
3. Cooperman G., Finkelstein L. New methods for using Cayley graphs in interconnection networks. *Discrete Applied Mathematics*. 1992, Vol. 37, P. 95–118.
4. Lakshmivarahan S., Jho J., Dhall S. Symmetry in interconnection networks based on Cayley graphs of permutation groups: A survey. *Parallel Computing*. 1993, Vol. 19, P. 361–407.
5. Heydemann M. *Cayley graphs and interconnection networks, in Graph symmetry: algebraic methods and applications*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1997, P. 167–226.
6. Xu J. *Topological Structure and Analysis of Interconnection Networks*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001, 352 p.
7. Parhami B. Swapped interconnection networks: Topological, performance, and robustness attributes. *Journal of Parallel and Distributed Computing*. 2005, Vol. 65, P. 1443–1452.
8. Asai S., Kounoike, Shinano Y., Kaneko K. Computing the diameter of 17–pancake graphs using a PC cluster. *LNSC*. 2006, Vol. 4128, P. 1114–1124.
9. Chen B., Xiao W., Parhami B. Internode distance and optimal routing in a class of alternating group networks. *IEEE Transactionson Computers*. 2006, Vol. 55, P. 1645–1648.
10. Wang L., Tang K. The Cayley Graph implementation in TinyOS for dense wireless sensor networks. *Proc. of the 6th Wireless Telecommunications Symposium*, 2007.
11. Camelo M., Papadimitriou D., Fabrega L., Vila P. Efficient Routing in Data Center with Underlying Cayley Graph. *Proceedings of the 5th Workshop on Complex Networks CompleNet*. 2014, P. 189–197.
12. Kuznetsov A. A., Kuznetsova A. S. [A parallel algorithm for study of the Cayley graphs of permutation groups]. *Vestnik SibGAU*. 2014, No. 1(53), P. 34–39 (In Russ.).
13. Even S., Goldreich O. The Minimum Length Generator Sequence is NP–Hard. *Journal of Algorithms*. 1981, Vol. 2, P. 311–313.
14. Kuznetsov A. A., Kuznetsova A. S. [Relation between growth functions insymmetric groups and tasks of combinatorial optimization]. *Vestnik SibGAU*. 2012, No. 6(46), P. 93–97 (In Russ.).
15. Kuznetsov A. A. [An algorithm of computation of the growth functions in finite two-generated groups of exponent five]. *Prikladnaya Diskretnaya Matematika*, 2016, No. 3(33), P. 116–125 (In Russ.).