УДК 512.54

Вестник СибГАУ
Том 18, № 1. С. 93–96

ОЦЕНКА КОЛИЧЕСТВА 12-АПЕРИОДИЧЕСКИХ СЛОВ

В. И. Сенашов

Институт вычислительного моделирования СО РАН
Российская Федерация, 660036, г. Красноярск, Академгородок, 50/44
Сибирский федеральный университет
Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, просп. Свободный, 79
E-mail: sen1112home@mail.ru

В 1902 г. У. Бернсайд поставил вопрос о локальной конечности групп, все элементы которых имеют конечные порядки. Первый отрицательный ответ был получен лишь спустя 63 года Е. С. Голодом. Позднее С. В. Алешиным, Р. И. Григорчуком, В. И. Сущанским была предложена целая серия отрицательных примеров. Конечность свободной бернсайдовской группы периода n установлена в разное время для n = 2, n = 3 (У. Бернсайд), n = 4 (У. Бернсайд, И. Н. Санов), n = 6 (М. Холл). Доказательство бесконечности этой группы для нечетных показателей n ≥ 4381 было дано в работе П. С. Новикова – С. И. Адяна (1967), а для нечетных n ≥ 665 – в книге С. И. Адяна (1975). Более наглядный вариант доказательства для нечетных n > 10^{10} был предложен А. Ю. Ольшанским (1989). Для n = 12 ответ до сих пор неизвестен. А. С. Мамонтовым установлена локальная конечность группы периода 12 без элементов порядка 12. Этот результат обобщает теоремы И. Н. Санова и М. Холла. Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров и А. С. Мамонтов доказали, что группа периода 12, в которой порядок произведения любых двух элементов порядка два не превосходит числа 4, локально конечна. Эта теорема обобщила теорему И. Н. Санова, по которой группа периода 12 без элементов порядка 6 локально конечна. В связи с этими результатами рассматривается множество 12-апериодических слов. Под l-апериодическим словом понимают слово X, если в нем нет непустых подслов вида Y^l. В монографии С. И. Адяна (1975) приведено доказательство С. Е. Аршона (1937) того, что в алфавите из двух букв существует бесконечное множество сколь угодно длинных 3-апериодических слов. В монографии А. Ю. Ольшанского (1989) доказана теорема о бесконечности множества 6-апериодических слов и получена оценка снизу количества таких слов любой данной длины. Наша задача – получить оценку для функции $f(n)$ количества 12-апериодических слов длины n. Результаты могут найти применение при кодировании информации, использующейся в сеансах космической связи.

Ключевые слова: группа, периодическое слово, апериодическое слово, алфавит, локальная конечность.

Sibirskii Gosudarstvennyi Aerokosmicheskii Universitet
imeni Akademika M. F. Reshetneva. Vestnik
Vol. 18, No. 1, P. 93–96

ESTIMATING THE NUMBER OF 12-APERIODIC WORDS

V. I. Senashov

Institute of Computational Modeling SB RAS
50/44, Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation
Siberian Federal University
79, Svobodniy Av., Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation
E-mail: sen1112home@mail.ru

In 1902 W. Burnside raised the issue of local finiteness of groups, all elements of which are of finite order. A negative answer was obtained only 63 years later by E. S. Golod. Then S. V. Aleshin, R. I. Hryhorczuk, V. I. Sushchanskii proposed a series of negative examples. Finiteness of the free Burnside group of period n was established for n = 2, n = 3 (W. Burnside), n = 4 (W. Burnside, I. N. Sanov), n = 6 (M. Hall). The proof of infinity of this group for odd n ≥ 4381 was given in the article by P. S. Novikov and S. I. Adian (1967), and for odd n ≥ 665 in the book by S. I. Adian (1975). A more intuitive version of the proof for odd n > 10^{10} was proposed by A. Yu. Olshansky (1989). For n = 12 the answer is still unknown. A. S. Mamontov installed local finiteness of the group of period 12 without the elements of order 12. This result generalizes Theorems of I. N. Sanov and M. Hall. D. V. Lytkina, V. D. Mazurov and A. S. Mamontov proved that the group of period 12, in which the order of the product of any two elements of order two is not greater than 4, is locally finite. This theorem generalizes Theorem of I. N. Sanov, where the group of period 12 without elements of order 6 is locally finite. In relation with these results we consider the set of 12-aperiodic *words. The word is called l-aperiodic if there are no non-empty subwords of the form Y^l in it. In the monograph by S. I. Adian (1975) it was shown the proof of S. E. Arshon (1937) of the fact that in the two letters alphabet there is an infinite set of arbitrarily long 3-aperiodic words. In the book by A. Yu. Olshansky (1989) the theorem on the infinity of the set of 6-aperiodic words was proved, and a lower bound function for the number of words of a given length was obtained. Our aim is to get an estimate for the function $f(n)$ of the number of 12-aperiodic words of the length n. The results can be applied when encoding information in space communications.*

Keywords: group, periodic word, aperiodic word, alphabet, local finiteness.

Введение. В 1902 г. Уильям Бернсайд поставил вопрос о локальной конечности групп, все элементы которых имеют конечные порядки [1]. Впоследствии этот вопрос приобрел статус проблемы Бернсайда о периодических группах. Отрицательный ответ на него был получен впервые лишь спустя 62 года в 1964 г. Е. С. Голодом [2]. Позднее С. В. Алешиным (1972) [3], Р. И. Григорчуком (1980) [4], В. И. Сущанским (1979) [5] была предложена целая серия отрицательных примеров. Сам У. Бернсайд в своей статье 1902 г. [1] обратил особое внимание на вопрос о локальной конечности групп с тождественным соотношением $x^n = 1$.

Группа $B(d,n) = F/F^n$, $d > 1$, которая получается факторизацией свободной группы $F = F(d)$ с d-образующими по нормальной подгруппе F^n, порожденной n-ми степенями всех элементов из F, называется сейчас *свободной бернсайдовской группой показателя* (или периода) n. Ее конечность установлена в разное время для $n = 2$ (тривиальный случай), $n = 3$ (У. Бернсайд), $n = 4$ (У. Бернсайд – для $d = 2$, И. Н. Санов [6] – для произвольного d), $n = 6$ (М. Холл [7]).

Доказательство бесконечности группы $B(d,n)$, $d \geq 2$, для нечетных показателей $n \geq 4381$ было дано в работе П. С. Новикова – С. И. Адяна [8], а для нечетных $n \geq 665$ – в книге С. И. Адяна [9]. Гораздо более доступный и геометрически наглядный вариант доказательства для нечетных $n > 10^{10}$ был предложен А. Ю. Ольшанским [10], который на основе усовершенствованного им геометрического метода построил для каждого достаточно большого простого числа p бесконечную p-группу, все собственные подгруппы которой имеют порядок p. Это наиболее сильная форма отрицательного ответа на вопрос Бернсайда, означающая существование бесконечного множества конечно порожденных периодических групп с тождеством, сколь угодно далеких по своим свойствам от конечных.

Вопрос о конечности конечно порожденной группы периода 12 до сих пор остается открытым. В [11] А. С. Мамонтовым установлена локальная конечность группы периода 12 без элементов порядка 12. Этот результат обобщает теоремы И. Н. Санова [6] и М. Холла [7]. Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров и А. С. Мамонтов [12] доказали, что группа периода 12, в которой порядок произведения любых двух элементов порядка два не превосходит числа 4, локально конечна. Эта теорема обобщила теорему И. Н. Санова [6] по которой группа периода 12 без элементов порядка 6 локально конечна.

В связи с этими результатами рассмотрим множество 12-апериодических слов. Автором был сделан доклад «Апериодические слова» в 2015 г. на конференции «Решетневские чтения» [13], затем исследования по этому вопросу были продолжены: в [14] была улучшена оценка А. Ю. Ольшанского из [15] количества 6-апериодических слов, и в данной работе рассматриваются 12-апериодические слова.

Основной результат. Под *периодическим словом с периодом H* понимается любое подслово некоторой степени H^p, $p > 0$.

В этом смысле *ababa* – периодическое слово с периодом *ab* или *ba*.

Под *l-апериодическим словом* понимают слово X, если в нем нет непустых подслов вида Y^l.

В 1906 г. А. Туэ установил существование 3-апериодических слов произвольной длины в любом неоднобуквенном алфавите [16]. В монографии С. И. Адяна [9] приведено доказательство С. Е. Аршона (1937) [17] того, что в алфавите из двух букв существует бесконечное множество сколь угодно длинных 3-апериодических слов. В работе [18] рассмотрена задача, являющаяся обобщением задачи о существовании сколь угодно длинных бесквадратных слов над алфавитом из трех букв.

В [15] была доказана теорема (доказательство близко к [19]) о бесконечности множества 6-апериодических слов и получена оценка снизу функции $f(n)$ – количества таких слов длины n: в алфавите $\{a,b\}$ существует сколь угодно длинные 6-апериодические слова. Более того, число $f(n)$ таких слов длины n больше, чем $(3/2)^n$.

В связи с этими результатами представляет интерес оценить количество 12-апериодических слов.

При доказательстве основного утверждения статьи будем использовать метод А. Ю. Ольшанского из [15]:

Теорема. В алфавите $\{a,b\}$ существует сколь угодно длинные 12-апериодические слова. Более того, число $f(n)$ таких слов длины n больше, чем $1{,}99901766^n$.

Доказательство. Сначала докажем неравенство $f(n+1) > x \cdot f(n)$ по индукции. Одновременно будем вводить ограничения на x. Сразу отметим очевидное неравенство: $x > 1$.

База индукции: $f(2) > x \cdot f(1)$, где $f(1) = 2$, $f(2) = 4$. Для того, чтобы выполнялась база индукции $4 > x \cdot 2$, положим $x < 2$.

Каждое 12-апериодическое слово длины $n+1$ есть результат приписывания справа одной из букв a или b к 12-апериодическому слову длины n. Можно получить $2f(n)$ слов X длины $n+1$. Но некоторые из полученных слов могут содержать степени A^{12}. Нужно оценить число подобных возможностей.

Может получиться лишь равенство вида $X \equiv YA^{12}$, поскольку иначе уже начало длины n слова X длины $n+1$ содержит A^{12}. Для слов A длины 1 (всего два таких слова) имеется меньше, чем $2f(n-11)$ слов вида $X \equiv YA^{12}$, где слово Y 12-апериодично и $|Y| = n-11$:

$$(\underbrace{\ldots\ldots}_{n-11}\ \underbrace{aa...a}_{11})\ a,$$

$$(\underbrace{\ldots\ldots}_{n-11}\ \underbrace{bb...b}_{11})\ b.$$

Существует 4 слова A длины 2. Количество соответствующих слов вида $X \equiv YA^{12}$ длины $n+1$ меньше, чем $4f(n-23)$, где слово Y 12-апериодично длины $n-23$.

Аналогично продолжая рассуждения, получаем:

$$f(n+1) > 2f(n) - 2f(n-11) -$$
$$- 2^2 f(n-23) - 2^3 f(n-35) - ...$$

Поскольку по предположению индукции $f(n) > x^k \cdot f(n-k)$, получается

$$f(n+1) > 2f(n) - (2x^{-11} f(n) +$$
$$+ 2^2 x^{-23} f(n) + 2^3 x^{-35} f(n) + ...).$$

Вынося $f(n)$ за скобки, получаем:

$$f(n+1) > f(n)(2 - (2x^{-11} + 2^2 x^{-23} + 2^3 x^{-35} + ...).$$

Введем еще одно ограничение $\sqrt[12]{2} < x$ для того, чтобы геометрическая прогрессия в правой части неравенства была убывающей.

Обозначим второй сомножитель правой части за S и применим формулу для суммы членов геометрической прогрессии со знаменателем $2 \cdot x^{-12}$:

$$S = 2 - \frac{2x^{-11}}{1 - 2x^{-12}}.$$

Неравенство $f(n+1) > x \cdot f(n)$ будет выполняться при $S > x$.

Преобразуем данное неравенство:

$$\frac{2 - 4x^{-12} - 2x^{-11} + 2x^{-11} - x}{1 - 2x^{-12}} > 0,$$

$$\frac{2 - 4x^{-12} - x}{1 - 2x^{-12}} > 0.$$

Домножим на x^{12} числитель и знаменатель (напомним, что $\sqrt[12]{2} < x < 2$):

$$\frac{2x^{12} - 4 - x^{13}}{x^{12} - 2} > 0.$$

Так как $x^{12} - 2 > 0$, получаем неравенство:

$$2x^{12} - 4 - x^{13} > 0.$$

Нас интересует решение этого неравенства в интервале $\left(\sqrt[12]{2};\ 2\right)$. Это решение можно приблизить интервалом [1,13624637; 1,99901766], причём этот интервал полностью содержится в решении. Нас интересует максимальное значение *x*, поэтому мы можем брать значение 1,99901766. Теорема доказана.

Заключение. Рассмотрено множество 12-апериодических слов и получена оценка для функции $f(n)$ количества 12-апериодических слов длины *n*.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта Сибирского федерального университета (проект – алгебрологические структуры и комплексный анализ).

Acknowledgments. This work was supported by the grant of the Siberian Federal University (Project – Algebra-logical structures and complex analysis).

Библиографические ссылки

1. Burnside W. On an unsettled question in the theory of discontinuous groups // Quart. J. Pure. Appl. Math. 1902. V. 33. P. 230–238.

2. Голод Е. С. О ниль-алгебрах и финитно-аппроксимируемых группах // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964. № 2 (28). С. 273–276.

3. Алешин С. В. Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах // Мат. заметки. 1972. № 3 (11). С. 319–328.

4. Григорчук Р. И. О проблеме Бернсайда о периодических группах // Функцион. анализ и его прил. 1980. № 1 (14). С. 53–54.

5. Сущанский В. И. Периодические *p*-группы подстановок и неограниченная проблема Бернсайда // ДАН СССР. 1979. Т. 247. С. 557–560.

6. Санов И. Н. Решение проблемы Бернсайда для показателя 4 // Уч. зап. ЛГУ. 1940. Т. 55. С. 166–170.

7. Холл М. Теория групп. М. : Иностранная литература, 1962. 468 с.

8. Новиков П. С., Адян С. И. О бесконечных периодических группах. I-III // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1968. № 1 (32). С. 212–244; № 2 (32). С. 251–524; № 3 (32). С. 708–731.

9. Адян С. И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М. : Наука, 1975. 336 с.

10. Ольшанский А. Ю. Группы ограниченного периода с подгруппами простого порядка // Алгебра и логика. 1982. № 5 (21). С. 555–618.

11. Мамонтов А. С. Группы периода 12 без элементов порядка 12 // Сиб. мат. журнал. 2013. № 1 (54). С. 150–156.

12. Лыткина Д. В., Мазуров В. Д., Мамонтов А. С. Локальная конечность некоторых групп периода 12 // Сиб. матем. журн. 2012. № 6 (53). С. 1373–1378.

13. Сенашов В. И. Апериодические слова // Решетневские чтения : материалы XIX Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 55-летию Сиб. гос. аэрокосмич. ун-та им. акад. М. Ф. Решетнева (10–14 нояб. 2015, г. Красноярск). В 2 ч. Ч. 2 / под общ. ред. Ю. Ю. Логинова ; Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. Красноярск, 2015. С. 132–133.

14. Сенашов В. И. Улучшение оценки количества 6-апериодических слов фиксированной длины // Вестник СибГАУ. 2016. № 2 (17). С. 168–172.

15. Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М. : Наука, 1989. 300 с.

16. Thue A. Uber unendliche Zeichenreih // Norcke Vid. Selsk. skr., I Mat. Nat. Kl. Christiania. 1906. Bd. 7. P. 1–22.

17. Аршон С. Е. Доказательство существования *n*-значных бесконечных асимметричных последовательностей // Мат. сб. 1937. № 4 (2 (44)). С. 769–779.

18. Котляров Н. В. О словах, избегающих квадраты с одной возможной ошибкой замещения // Ломоносов–2014: материалы Междунар. молодежн. науч. форума / отв. ред. А. И. Андреев, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. М. : МАКС Пресс, 2014.

19. Гуревич Г. А. Бесповторные последовательности // Квант. 1975. № 9. С. 7–11.

References

1. Burnside W. On the unsettled question in the theory of discontinuous groups. *Quart. J. Pure.* Appl. Math. 1902, Vol. 33, P. 230–238.

2. Golod E. S. [On nil-algebras and finitely approximable groups]. *Izv. AN SSSR, Ser. mat.* 1964, No. 2 (28), P. 273–276 (In Russ.).

3. Aleshin S. V. [Finite automats and the Burnside problem on periodic groups]. *Mat. Zametki.* 1972, Vol. 11, No 3, P. 319–328 (In Russ.).

4. Grigorchuk R. I. [On Burnside problem for periodic groups]. *Funktsion. analiz i yego pril.* 1980, No. 1(14), P. 53–54 (In Russ.).

5. Sushchanskii V. I. [Periodic district permutation groups and unlimited Burnside problem]. *DAN SSSR.* 1979, Vol. 247, P. 557–560 (In Russ.).

6. Sanov I. N. [Solving the problem of Burnside for exponent 4]. *Uch. Zap. LSU.* 1940, Vol. 55, P. 166–170 (In Russ.).

7. Hall M. *Teoriya grupp* [Group Theory]. Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1962, 468 p.

8. Novikov P. S., Adyan S. I. [On infinite periodic groups. I-III]. *Izv. AN SSSR. Ser. mat.* 1968, No. 1(32), P. 212–244, No. 2(32), pp. 251–524, No. 3(32), pp. 708–731 (In Russ.).

9. Adyan S. I. *Problema Bernsayda i tozhdestva v gruppakh* [Bernside Problem and Identities in Groups]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 336 p.

10. Olshansky A. Yu. [Groups of limited period with subgroups of prime order]. *Algebra i logika.* 1982, No. 5(21), P. 555–618 (In Russ.).

11. Mamontov A. S. [Groups of period 12 without elements of order 12]. *Sib. mat. zhurnal.* 2013, No. 1(54), P. 150–156 (In Russ.).

12. Lytkina D. V., Mazurov V. D., Mamontov A. S. [The local finiteness of some groups of period 12]. *Sib. matem. zhurn.* 2012, No. 6(53), P. 1373–1378 (In Russ.).

13. Senashov V. I. [Aperiodic words]. *Reshetnevskiye chteniya: materialy XIX Mezhdunar. nauch.-prakt. konf., posvyashch. 55-letiyu Sib. gos. aerokosmich. un-ta im. akad. M. F. Reshetneva* [Reshetnev Readings: proceed. of XIX Intern. scientific and practical. conf. for 55th anniversary of Reshetnev Sib. State. Aerokosmich. Univ.] (10-14 Nov. 2015, Krasnoyarsk): 2 parts. Under total. Ed. Y. Y. Loginova; Sib. State. Aerokosmich. Univ, Krasnoyarsk, 2015, Part 2, P. 132–133 (In Russ.).

14. Senashov V. I. [Improved estimates of the number 6-aperiodic words of fixed length]. *Sibirskii Gosudarstvennyi Aerokosmicheskii Universitet imeni Akademika M. F. Reshetneva. Vestnik.* 2016, Vol. 17, No. 2, P. 168–172 (In Russ.).

15. Olshansky A. Yu. *Geometriya opredelyayushchikh sootnosheniy v gruppakh* [Geometry of defining relations in groups]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 448 c.

16. Thue A. Uber unendliche Zeichenreih. Norcke Vid. Selsk. skr. I Mat. Nat. Kl. Christiania, 1906, Bd. 7, Iss. 1–22.

17. Arshon S. E. [Proof of existence of *n*-unit infinite asymmetric sequences]. *Mat. sb.* 1937, No. 4(2 (44)), P. 769–779 (In Russ.).

18. Kotliarov N. V. [On the words, avoiding the squares with a possible error of substitution]. *Materialy Mezhdunar. molodezhn. nauch. foruma "Lomonosov-2014"* [Proceedings of the Intern. Youth Scientific Forum "Lomonosov-2014"]. Ed. A. I. Andreev, A. V. Andrianov, E. A. Antipov. [Electronic resource]. Moscow, MAX Press Publ., 2014 (In Russ.).

19. Gurevich G. A. [Nonrepetitive sequences]. *Quant*. 1975, No. 9, P. 7–11 (In Russ.).