

АЛГОРИТМЫ СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ОСНОВЕ КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЕВ ДЛЯ ОЦЕНКИ ВОЗМОЖНОСТЕЙ УПРАВЛЕНИЯ

А. А. Рогалев

Сибирский федеральный университет,
Институт космических и информационных технологий
Российская Федерация, 660074, г. Красноярск, ул. Академика Киренского, 26
E-mail: a.rogalyov@yahoo.com

Представлены методы и алгоритмы для оценки возможностей управления, в которые входит определение возможности приведения управляемой системы в заданную точку y^ фазового пространства. Для этого вычисляются границы множества достижимости управляемой системы – множества точек фазового пространства, в которые возможно сдвигаться вдоль траектории управляемой системы, и проверяется включение точки y^* во множество достижимости. Подобные задачи часто встречаются на практике, например, при оценке маневренных возможностей летательных аппаратов. Оценки маневренных возможностей должны быть достаточно точными и реализуемыми за малое время. Описанные алгоритмы основаны на символьных формах представления решений. При реализации этих алгоритмов подвергаются обработке, а также хранятся числовые данные и символьные данные. Для оценки областей значений выражений, построенных формулами, исследуются структуры символьных данных, включающие формальные линейные комбинации корневых помеченных деревьев. Операции над корневыми помеченными поддеревьями выполняются при вложении структуры данных в ассоциативный набор данных. Возможны сокращения членов символьных формул, если непрерывные операторы записываются через перестановочные операторы. Такие алгоритмы уменьшают время вычисления операторов, в которых присутствуют производные, часто экспоненциально. Приводятся примеры применения этих методов. Среди этих примеров можно отметить оценки для модели управления «машина Дуббинса», представляющей систему обыкновенных дифференциальных уравнений 3-го порядка и описывающей движение беспилотного летательного аппарата (БПЛА). Поскольку скорости полета находятся в интервале 30–65 км/ч, который типичен для БПЛА, а скорость ветра на высоте 30–200 м над уровнем земли почти всегда превышает 18 км/ч, то БПЛА должны эффективно маневрировать в воздушном потоке. Вводя параметризацию кривой длиной дуги, постановка этой задачи формулируется геометрически. Это позволяет исследовать границы множеств достижимости в каждый момент времени. Анализ структуры множеств достижимости дает полезную информацию для оценки возможностей управления.*

Ключевые слова: возможности управления, множества достижимости, области значений, символьные данные, корневые деревья.

Siberian Journal of Science and Technology. 2017, Vol. 18, No. 4, P. 810–819

ALGORITHMS OF SYMBOLIC COMPUTATIONS BASED ON ROOT TREES FOR EVALUATING THE CAPABILITY OF THE CONTROL PROCESS

A. A. Rogalev

Siberian Federal University, Institute of Space and Information Technologies
26, Academica Kirenskogo Str., Krasnoyarsk, 660074, Russian Federation
E-mail: a.rogalyov@yahoo.com

The article presents the methods and algorithms for evaluating management capabilities. These methods also determine the possibility of bringing the controlled system to a given point y^ in the phase space. A set of reachability is a set of points in the phase space into which it is possible to move along the trajectory of the controlled system. It is necessary to check whether the point y^* is included in the reachable set. Such problems are often encountered in practice, for example, when assessing the maneuverability of aircraft. Estimates of maneuverability should be accurate enough and implemented in a short time. The algorithms described in the article are based on the symbolic forms of solutions. When these algorithms are implemented, numerical data and character data are processed, and also are stored. To evaluate the ranges of values of expressions constructed by formulas, the article explores the structures of character data, including formal linear combinations of root labeled trees. Operations on the root tagged subtrees are*

performed by nesting the data structure in an associative data set. Reductions of the members of symbolic formulas are possible, if non-commutative operators are written through permutation operators. Such algorithms reduce the time of computation of operators in which derivatives are present, often exponentially. The article gives the examples of the application of these methods. Among these examples, we can mention the “Dobbins machine” control model, which represents the system of ordinary differential equations of the third order and describes the motion of an unmanned aerial vehicle (UAV). Since the flight speeds are in the range of 30–65 km/h, which is typical for UAVs, and the wind speed at an altitude of 30–200 m above the Earth level almost always exceeds 18 km/h, UAVs must effectively maneuver in the air flow. This allows us to examine the boundaries of reachable sets at each instant of time. An analysis of the reachable sets provides useful information for evaluating management capabilities.

Keywords: control capabilities, reachability sets, ranges of values, symbolic data, root trees.

Введение. Практическое построение управления объектом выполняется как в детерминированном случае, так и при априорной неопределенности внешних возмущений, а также неопределенности состояния текущего объекта. Появление неопределенности зависит от влияния различных неопределенных факторов: возмущающих воздействий, не поддающихся контролю погрешностей параметров в определении начальных условий, и некоторых других причин. Вероятностные (стохастические) характеристики во многих случаях не могут обеспечить эффективную оценку поведения управляемой системы с неопределенными факторами [1–3]. Причины этого заключаются в том, что их использование принципиально не гарантирует результат одного конкретного опыта (испытания) и, кроме того, требует знания статистических характеристик, которые не всегда доступны в достаточной мере [4–6].

В данной статье за основу выбран подход, в котором для оценки возможностей управления строятся формулы решения задачи (в общем случае приближенные с контролем их точности), что помогает оценить области значений этих формул. Области значений этих формул определяют гарантированные границы всех возможных фазовых состояний системы управления с учетом влияния всех факторов неопределенности. Эти границы являются верхней и нижней границами множеств достижимости. В статье описываются методы, повышающие эффективность работы с символьными формулами, на которых основан расчет включений множеств достижимых множеств. Символьные формулы решений лежат в основе этих алгоритмов, их объем может достигать значительной величины. Символьная формула (аналитическое выражение) определяется как последовательность имен переменных и знаков операций, которые нужно проделать в определенном порядке над значениями этих переменных, чтобы получить значение выражения. Поэтому символьный метод (аналитический метод) представляет метод преобразования символьной информации (символьных формул) на языке анализа математических выражений. В эти формулы могут включаться числовые константы с отложенным выполнением арифметических действий над ними. Можно провести некоторую аналогию с определением из [7], где предлагается разработать аппарат для преобразования уравнений с помощью простых математических приемов, большинство из которых подобно обычным алгебраическим алгоритмам. В нашем случае этот аппарат рассчитан на использование ком-

пьютеров, поэтому используются структуры данных, составленные из формальных линейных комбинаций корневых помеченных деревьев для эффективных символьных вычислений композиций операторов. Можно напомнить, что дерево – широко распространенная программная единица для хранения и обработки однотипных данных, имитирующая древовидную структуру в виде набора связанных узлов [8], являющаяся связным графом, не содержащим циклы. В статье будут использоваться корневые конечные деревья, в которых выделена одна вершина (корень дерева).

Формально корневое дерево определяется как конечное множество T одного или более узлов со следующими свойствами:

а) существует один корень дерева T ;

б) остальные узлы (за исключением корня) распределены среди $m \geq 0$ непересекающихся множеств T_1, \dots, T_m , и каждое из множеств является корневым деревом; деревья T_1, \dots, T_m называются поддеревьями данного корня T .

Постановка задачи оценки множеств достижимости. Структура управляемого объекта описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, u) \quad (1)$$

с заданным классом допустимых управлений и начальным и конечным состоянием управляемого объекта при условиях, налагаемых на правую часть системы дифференциальных уравнений:

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T = [t_0, t_F], \quad (2)$$

где Y_0, U – выпуклые компактные множества. Полагаем, что функция $f(t, y, u)$ вместе со своими производными по y, u является непрерывной относительно аргументов (t, y, u) на произведении $T \times R^n \times U$ и удовлетворяет условию Липшица по $y \in R^n$ с константой $L > 0 \quad \forall y_1, y_2 \in R^n$ на $T \times R^n \times U$. Кусочно-непрерывная функция $u(t), t \in T$, – это управляющая функция, удовлетворяющая (2) и такая, что при этом управлении существует непрерывная кусочно-дифференцируемая траектория $y(t)$ системы (1) при $t \in T$ и заданном начальном состоянии y_0 . Множество допустимых управлений обозначается через U .

Для описания управляемых систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями

[1–3], во многих задачах требуются множества достижимости $Y(t)$ – множества точек в фазовом пространстве R^n , в которые возможно сдвинуться вдоль траектории решения задачи (1), (2) за интервал времени $[t^0, t]$.

Из определения множества достижимости ясно, что практически необходимо численно приближать множества достижимости и вычислять границы областей, содержащих эти множества, т. е. строить внешние оценки множеств достижимости. Более детально изучены множества достижимости линейных систем дифференциальных уравнений с выпуклыми ограничениями на управления и состояния системы. В работах [4–6] представлены численные методы, позволяющие вычислять границы множеств достижимости для систем такого типа, кроме того, методы нахождения внешних оценок множеств достижимости для линейных систем описаны в работах [3; 9].

Для нелинейных систем эта задача решается значительно более сложно, возможно оценивать множества достижимости, причем предлагаемые методы обычно требуют больших вычислительных затрат. Множества достижимости нелинейных систем в общем случае невыпуклые, несвязные. Созданы методы аппроксимации множеств достижимости, использующие уравнение Беллмана, а также принцип сравнения с реализацией метода эллипсоидов, известны схемы [2; 5] аппроксимации множеств достижимости за счет вычисления характерных точек множеств непосредственно через решение серии задач оптимального управления [10; 11].

Основная задача статьи – применить методы символьных вычислений на основе корневых деревьев для улучшения реализации гарантированных методов решения дифференциальных систем с учетом управляющих воздействий и основанных на символьном представлении решений. Более полное описание этого подхода можно найти в [12–18].

Пусть справедлива равномерная оценка $|y(t)| < b$ для всех решений (1) на интервале $t \in [t^0, T]$, где $b = \text{const} > 0$; множество достижимости $Y(t) = f(t, y, U)$ для всех $y, t \in [s, T]$, является компактным и выпуклым множеством.

Как было отмечено выше, символьная формула решений определяется сдвигом вдоль траектории решения и получается в процессе последовательного преобразования формул вида

$$\begin{aligned} Y^n &= F^n(t^0, \dots, t^n, Y^0, Y^1, \dots, Y^n) = \\ &= S^n(Y^0) \circ \dots \circ S^2(Y^{i-1}) \circ S^1(Y^i). \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть $\phi(y^0)$ обозначает однозначное отображение единичного интервала из R^1 на прямоугольный параллелепипед из R^n , которое каждой точке $t \in R$ ставит в соответствие некоторую точку $y = \phi(t)$. Такое отображение определяет процедуру исполнения, в которой для каждой точки $t \in R$ определяется формула отображения $F(Y_1^0, Y_2^0, \dots, Y_n^0)$ и процесс ее

сборки по адресам. Для этого возможно использовать $\phi(y^0)$ – непрерывное, однозначное отображение единичного интервала на n -мерный куб, называемое кривой Пеано, заполняющей пространство и представляющей непрерывную, нигде не дифференцируемую кривую, которая проходит через все точки единичного гиперкуба в пространстве R^n . Это соответствие задано отображением элементов конечного множества отрезков из единичного интервала и элементами конечного множества гиперкубов, входящих в R^n . Формула будет представлять рекурсивную структуру, размер которой изменяется. Для записи такой формулы в компьютере используются линейные динамические структуры.

В рассматриваемых задачах управление является измеримой функцией, что не допускает применения методов рядов Тейлора для построения опорных траекторий.

В символьный метод оценки множеств достижимости входит запись компонент символьных формул решений как векторных функций, состоящих из символьных компонент $s(t^k)$, зависящих от символьных форм начальных данных y_1^0, \dots, y_n^0 и описывающих сдвиг вдоль кривой, аппроксимирующей траекторию решения системы, на каждом шаге. Сдвиг вдоль траектории решений определяется на основе построенных символьных формул решений. Символьные формулы не преобразуются на каждом шаге алгоритма, они хранятся в памяти компьютера, для этого полезным являются символьные формулы кусочно-полиномиальных функций. Используя символьную формулу Y , аппроксимирующую оператор сдвига вдоль траектории, в методе определяются прообразы экстремальных значений (верхних и нижних границ для множеств решений) как решения экстремальной задачи. Эти точки определяют границы множеств достижимости.

Выполнение преобразований символьных формул – это первый этап гарантированного метода включения решений, за которым следует этап числовых вычислений. Символьные преобразования реализуются в системах компьютерной алгебры. Однако такое применение компьютерной алгебры, как правило, является крайне затратным по времени исполнения, особенно если вычисления производятся в цикле. Найденные формулы часто являются громоздкими, что и приводит к неэкономным вычислениям, особенно если речь идет о вычислениях в цикле. Поэтому в статье предлагается хранить и обрабатывать формулы, хранящиеся в виде помеченных деревьев.

Преобразования символьных формул. Вычисления, рассматриваемые в статье, представлены как алгебраические выражения над входными данными, которые сохраняют важнейшие соотношения между входными данными и результирующей аналитической информацией. В предлагаемых методах символьных вычислений моделируются операторы присваивания, условные операторы, циклы и процедуры. Это помогает повысить эффективность и точность при настойчивом применении процедур упрощения.

Определим умножение на укоренившихся помещенных деревьях, тем самым создавая набор этих структур данных как ассоциативную алгебру. Алгебра гомоморфизмов задана на исходной алгебре операторов, отображаемой в данную алгебру деревьев. Если операторы представить на этой структуре данных, то появятся сокращения, связанные с тем, что непостоянные операторы выражаются через коммутирующие операторы. Это приводит к алгоритму, применение которого для определения формул производных ускорит вычисления оператора экспоненциально. Многие вопросы, описанные в этом разделе, опираются на работы [19; 20].

Кратко напомним основные определения, используемые в этой работе.

Алгебра над полем – это векторное пространство, снабженное билинейным произведением. Отсюда следует, что алгебра над полем является одновременно векторным пространством и кольцом, причём эти структуры согласованы.

Алгебра Ли – это векторное пространство L над полем k ; на пространстве введено билинейное отображение $[-, -]: L \times L \rightarrow L$, удовлетворяющее условиям:

$$\begin{aligned} [x, y] + [y, x] &= 0 \text{ для всех } x, y \in L; \\ [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] &= 0 \text{ для всех } x, y, z \in L. \end{aligned}$$

Так, пример алгебры Ли выглядит следующим образом: билинейное отображение $[-, -]$ определено как $[x, y] = xy - yx$ для $x, y \in A$. Дифференцированием в алгебре U называется линейное отображение $\delta: U \rightarrow U$, удовлетворяющее правилу Лейбница дифференцирования произведения

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b).$$

Пусть R – это коммутативная алгебра с единичным элементом над полем k характеристики 0. Пусть D_1, \dots, D_N – это N перестановочных производных R , т. е. для $i, j = 1, \dots, N$, $D_i D_j a = D_j D_i a$ для всех $a \in R$.

Предположим, что мы также получили M производных $Dif_1, \dots, Dif_M \in R$, которые могут быть выражены как R линейных комбинаций производных D_i , т. е. для $j = 1, \dots, M$,

$$Dif_j = \sum_{\mu=1}^N a_j^\mu D_\mu, \text{ где } a_j^\mu \in R. \quad (4)$$

Для создания эффективного символьного алгоритма необходимо записать производные высокого порядка, порожденные Dif_1, \dots, Dif_M , с помощью членов перестановочных производных D_1, \dots, D_N .

Обозначим свободную ассоциативную алгебру символом Dif_1, \dots, Dif_M , и пусть $Diff(D_1, \dots, D_N; R)$ – это пространство формальных линейных дифференциальных операторов с коэффициентами из R , т. е.

$Diff(D_1, \dots, D_N; R)$ является алгеброй всех отображений $R \rightarrow R$, порожденных отображениями $D_\mu L(a)$, $a \in R$ (отображение $L(a)$, $a \in R$ определяется зависимостью $L(a)(b) = ab$ для $b \in R$).

Пусть

$$\chi: k\langle E_1, \dots, E_M \rangle \rightarrow Diff(D_1, \dots, D_N; R) \quad (5)$$

обозначает отображение, которое отображает $p \in k\langle E_1, \dots, E_M \rangle$ в линейный дифференциальный оператор $\chi(p)$, полученный подстановкой (1) и упрощением, с использованием того факта, что D_μ являются производными R . Пусть $p \in k\langle E_1, \dots, E_M \rangle$ имеет вид

$$p = \sum_{i=1}^l p_i, \text{ где каждый член } p_i \text{ имеет степень } m. \text{ Для}$$

расчета значения $\chi(p)$ будем вычислять $\chi(p_i)$. Это даст значение формулы $lm!N^m$ членов. Предположим, что $Expenditure(p)$ – это затраты применения алгоритма A для упрощения $p \in k\langle E_1, \dots, E_M \rangle$. Затраты пропорциональны количеству дифференцирований и умножений.

$$\text{Тогда } Expenditure(p) = O\left(\frac{lmn!N^m}{Simple}\right).$$

Проанализируем алгоритм, выполняющий предварительную обработку выражения p , целью которой является устранение любых членов, сокращаемых после подстановок (1), из вычислений.

Возможно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Предположим:

- 1) p – это сумма $l = 2^{m-1}$ членов, каждый из которых является однородным относительно степени m ;
- 2) $\chi(p)$ – это линейный дифференциальный оператор степени 1;
- 3) $m, N \rightarrow \infty$ таким образом, что $2^m \ll N^m$.

$$\text{Тогда } \frac{Expenditure_{Better}(p)}{Expenditure_{Simple}(p)} = O\left(\frac{1}{m \cdot 2^m}\right). \quad (6)$$

Напомним, что скобка Ли $[,]: g \times g \rightarrow g$ – это билинейная, кососимметрическая операция, удовлетворяющая тождеству Якоби: $[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0$.

Значение теоремы 1 состоит в том, что алгоритм, представленный для упрощения вычисления производных, входящих в формулу $\chi(p)$, является методом, который часто экспоненциально улучшает эффективность вычислений. Конечно, если мы априорно знаем определенные свойства $\chi(p)$, то мы можем использовать эти свойства, чтобы вычисления были эффективнее. Тем не менее, наш алгоритм не требует знания свойств $\chi(p)$.

Сокращения, которые появляются, когда непостоянные операторы выражены через коммутирующие операторы, возникают естественно. Это приводит к алгоритму, применение которого для операторов, таких как производные, ускоряет вычисления экспоненциально.

Пусть $\{E_1, \dots, E_M\}$ – множество символов. Будем называть дерево помеченным метками $\{E_1, \dots, E_M\}$, если каждому узлу дерева, отличному от корня, соответствует элемент $\{E_1, \dots, E_M\}$, присвоенный ему. Обозначим множество всех деревьев, помеченных метками $\{E_1, \dots, E_M\}$, через $Forest\{E_1, \dots, E_M\}$. Пусть $k\{Forest\{E_1, \dots, E_M\}\}$ обозначает векторное пространство над полем k с базисом $Forest\{E_1, \dots, E_M\}$.

Определим умножение в $k\{Forest\{E_1, \dots, E_M\}\}$ следующим образом. Поскольку набор помеченных деревьев образует базис для $k\{Forest\{E_1, \dots, E_M\}\}$ векторного пространства, достаточно описать произведение двух помеченных деревьев.

Пусть t_1, t_2 – два помеченных дерева. Пусть s_1, s_2, \dots, s_r – дети корня t_1 . Если t_2 имеет $n+1$ узлов (считая корень), существуют $(n+1)^r$ способов присоединения r поддеревьев t_1 , для которых s_1, \dots, s_r используются как корни помеченного дерева t_2 . Присоединим каждый s_i как потомок некоторого узла t_2 , сохраняющий исходные метки. Произведение деревьев $t_1 t_2$ определяется как сумма этих $(n+1)^r$ помеченных деревьев. Можно показать, что это произведение ассоциативно и что дерево, состоящее только из корня, является мультипликативным тождеством (элементом, являющимся единичным для мультипликативной операции) (см. [19; 20] для доказательства).

Определим ко-умножение над $k\{Forest\{E_1, \dots, E_M\}\}$ следующим образом.

Пусть t – помеченное дерево, и пусть s_1, \dots, s_r – дети корня t . Если P – подмножество $C_t = \{s_1, \dots, s_r\}$, полагаем, что t_p – помеченное дерево, образованное путем создания (размещения) элементов из P как потомков нового корня. При этом сохраняются исходные метки. Определим ко-умножение как операцию $\Delta(t) = \sum_{P \subseteq C_t} t_p \otimes t_{C_t \setminus P}$, где $X \setminus Y$ обозначает операцию теоретико-множественного относительного дополнения Y в X . Определим ко-единицу измерения, полагая $\varepsilon(t)$ равным 1, если t имеет только один узел (его корень), и равным 0 в противном случае. Можно показать, что это делает $k\{Forest(E_1, \dots, E_M)\}$ ко-коммутативной ко-алгеброй. Возможно определить шкалу градации на $k\{Forest(E_1, \dots, E_M)\}$, полагая $k\{Forest(E_1, \dots, E_M)\}$ подпространством $k\{Forest(E_1, \dots, E_M)\}$, натянутым на деревья с $n+1$ узлами и обозначенным через $k\{Forest_n(E_1, \dots, E_M)\}$.

Помеченное упорядоченное дерево является помеченным деревом, для которого существует линейное упорядочение потомков каждого узла. Обозначим векторное пространство над k с базисом из множества помеченных упорядоченных деревьев через $k\{LOF(E_1, \dots, E_M)\}$. Определения операций умножения и ко-умножения для $k\{LOF(E_1, \dots, E_M)\}$ аналогичны определениям, приведенным выше.

Следующая теорема доказана в работе [20].

Теорема 2. Набор помеченных деревьев t , корень которых имеет ровно одного потомка, является базисом для $P(k\{Forest\{E_1, \dots, E_M\}\})$.

Доказательство. Непосредственно получим, что любое дерево, корень которого имеет только одного потомка k , охватывает примитивные элементы. Пусть $O = k\{Forest\{E_1, \dots, E_M\}\}$, и определим линейное отображение $\pi: O \otimes O \rightarrow O$ следующим образом: если t_1 и t_2 – помеченные деревья, то $\pi(t_1 \otimes t_2)$ – это помеченное дерево, образованное путем идентификации корней t_1 и t_2 . Другими словами, $\pi(t_1 \otimes t_2)$ является помеченным деревом, для которого поддеревья корня образуют все поддеревья корней t_1 и t_2 . Легко видеть, что если t – помеченное дерево, корень которого имеет r потомков, то $\pi \circ \Delta(t) = 2^r t$. С другой стороны, если $a = \sum a_i t \in P(O)$, мы получаем, что $\pi \circ \Delta(a) = 2a$. Так как деревья t являются линейно независимыми, следует, что $a_i = 0$, если корень t имеет более одного потомка. Это завершает доказательство теоремы.

Далее опишем, как помеченные деревья могут быть использованы для упрощения вычислений дифференциальных операторов. Начнем с определения отображения

$$\psi: k\{Forest\{E_1, \dots, E_M\}\} \rightarrow Diff(D_1, \dots, D_N; R)$$

следующим образом.

Шаг 1. Задав помеченное дерево $t \in LF_m(E_1, \dots, E_M)$, ставим в соответствие корню число 0 и назначаем остальным узлам числа $1, \dots, m$. Мы в дальнейшем идентифицируем узел с числом, назначенным узлу. Чтобы определить отображение, мы просуммируем индексы μ_1, \dots, μ_m , связанные с каждым узлом дерева, кроме корня. Закрепим узел k дерева t , и пусть l, \dots, l' обозначают детей этого узла.

Пусть

$$R(k; \mu_1, \dots, \mu_r) = \begin{cases} D_{\mu_1} \dots D_{\mu_r} a_{\gamma_k}^{\mu_l}, & \text{если } k \text{ – не корень,} \\ D_{\mu_1} \dots D_{\mu_r}, & \text{если } k \text{ – корень.} \end{cases}$$

Обозначим эту величину $R(k)$. Заметим, что $R(k) \in R$ при $k > 0$.

Шаг 2. Определим

$$\psi(t) = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_m=1}^N R(m) \dots R(1)R(0)$$

и расширим ψ на все $k\{Forest\{E_1, \dots, E_M\}\}$ в силу его линейности.

Следующие три предложения описывают основные свойства отображения ψ . Первое предложение является примером упрощения факторизации χ с помощью множества помеченных деревьев. Легко получить, что часто менее затратно вычислять ψ и φ совместно, чем вычислять χ .

Предложение 1

- а) отображение ψ является гомоморфизмом алгебры;
- б) $\chi = \psi \circ \varphi$.

Доказательство. Доказательство (а) получено непосредственным вычислением по правилу Лейбница и содержится в работе [19]. Так как χ и $\psi \circ \varphi$ согласованы (располагаются) на генерируемом множестве E_1, \dots, E_M , то часть (б) предложения 1 следует из части (а). Это завершает доказательство предложения.

На самом деле верно более сильное утверждение: отображение ψ соблюдает взаимодействие коммутации на $k\{Forest\{E_1, \dots, E_M\}\}$ -ассоциативной алгебре символов над помеченными деревьями и умножение в R в следующем смысле.

Предложение 2

Для всех $a, b \in R$ и для всех $t \in k\{LF(E_1, \dots, E_M)\}$

$$((\psi \otimes \psi) \circ \Delta(t))(a \otimes b) = \psi(t)(ab).$$

Для многих приложений важно знать, ограничиваются ли действия этих гомоморфизмов областью алгебры Ли, порожденной производными E_1, \dots, E_M . Следующее ниже утверждение показывает, что если известны вычисленные элементы алгебры Ли, то сле-

дует рассматривать только деревья, корень которых содержит только один узел – потомка.

Предложение 3

а) пусть $L(E_1, \dots, E_M)$ обозначает алгебру Ли, порожденную производными E_1, \dots, E_M , тогда

$$\varphi(L(E_1, \dots, E_M)) \subseteq P(k\{LF(E_1, \dots, E_M)\}),$$

$$\psi(P(k\{LF(E_1, \dots, E_M)\})) \subseteq Der R;$$

б) элементы $L(E_1, \dots, E_M)$ отображаются под действием φ в суммы деревьев, корень которых имеет только одного потомка.

Завершим этот раздел простым примером вычисления производной третьего порядка с использованием деревьев.

Фиксируем производные

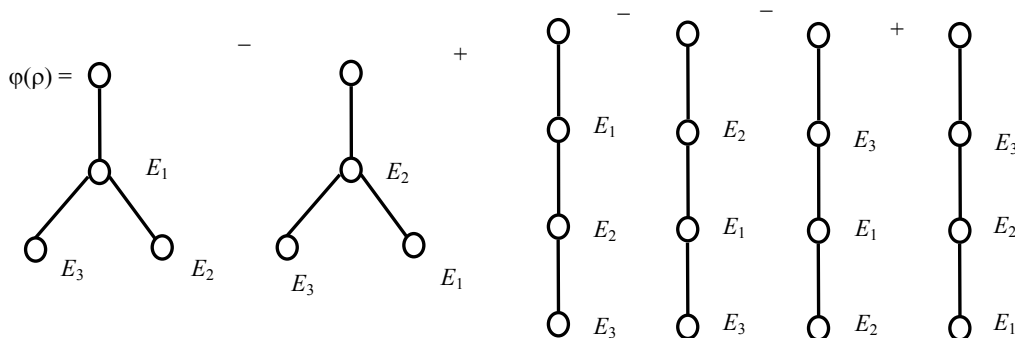
$$E_j = \sum_{\mu=1}^N a_j^\mu D_\mu, \quad 1 \leq j \leq 3,$$

и рассмотрим производные высшего порядка

$$p = E_3 E_2 E_1 - E_3 E_1 E_2 - E_2 E_1 E_3 + E_1 E_2 E_3.$$

Вычисление $\chi(p)$ «в лоб» включает в себя вычисление $24N^3$ членов: $8N^3$ – члены-сомножители D_{μ_1} , $2N^3$ из них сокращаются, $12N^3$ членов, содержащих множители $D_{\mu_2\mu_1}$, все из них сокращаются, и $4N^3$ членов, включающих множители $D_{\mu_3\mu_2\mu_1}$, все из них сокращаются.

Вычисляя $\varphi(p)$, получим



Все сокращения членов при вычислениях $\chi(p) = \psi(\varphi(p))$ происходят при вычислении $\varphi(p)$.

Сделаем следующие предположения: $p \in k \langle E_1, \dots, E_m \rangle$ (элемент ассоциативной алгебры символов) есть сумма $p = \sum_{i=1}^l p_i$, где каждый член p_i имеет степень m ;

затраты на умножение составляют одну единицу; затраты на дифференцирование – одна единица; затраты на сложение равны нулю; затраты добавления узла к дереву – одна единица, так что стоимость построения дерева $t \in LF_m(E_1, \dots, E_m)$ равна m единиц.

Предложение 1

Вычислительные затраты на вычисление $\chi(p)$

равны величине $2lmm!N^m$.

Доказательство. Предположим, что p_i имеет вид $E_{\gamma_m} \dots E_{\gamma_1}$ для некоторых индексов $1 \leq \gamma_1, \dots, \gamma_m \leq M$. Тогда $\chi(p)$ равно

$$\left(\sum_{\mu_m=1}^N a_{\gamma_m}^{\mu_m} D_{\mu_m} \right) \dots \left(\sum_{\mu_1=1}^N a_{\gamma_1}^{\mu_1} D_{\mu_1} \right).$$

После разложения появляются $m!N^m$ членов, каждый из которых включает в себя m дифференцирований и m умножений (включая умножения и дифференцирования, связанные с применением оператора $\chi(p)$).

Предложение 2

Затраты на вычисление $\varphi(p)$ равны $lmm!$.

Доказательство. Моному степени m отображение φ ставит в соответствие сумму (объединение) $m!$ помеченных деревьев. Этот факт легко доказать по индукции (доказательство в [19]). По предположениям, представленным выше, затраты на построение помеченного дерева с m узлами (в дополнение к корню) составляют m единиц. Поэтому общие затраты равны $lmm!$.

Предложение 3

Пусть $\sigma = \varphi(p)$ обозначим через $|\sigma|$ число помеченных деревьев с ненулевыми коэффициентами σ . Тогда затраты на вычисление $\psi(\sigma)$ равны $2m|\sigma|N^m$.

Доказательство. Фиксируем помеченное дерево $t \in LF_m(E_1, \dots, E_M)$. Из определения отображения ψ мы видим, что затраты на вычисление $\psi(t)$ равны $2mN^m$, и, следовательно, полные затраты равны $2m|\sigma|N^m$.

Объединяя эти три утверждения, получим теорему.

Теорема 3. В соответствии с принятыми выше предположениями затраты $Cost_{Simple}(p)$ вычисления

$\chi(p) = \sum_{i=1}^l \chi(p_i)$ составляют $2lmm!N^m$, тогда как

$Cost_{BETTER}(p)$ вычисления $L = \psi \circ \varphi(p)$ равны $lmm! + 2m|\sigma|N^m$.

Используя теорему 3, можно построить еще более эффективные алгоритмы для вычисления результата воздействия элементов $k \langle E_1, \dots, E_M \rangle$, которые, как известно, являются дифференциальными операторами. В этом случае деревья, для которых корень имеет более одного потомка, даже не нужно строить.

Приложения

1. Рассмотрим движение управляемого объекта на плоскости, описываемого следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= V \cos \varphi, \\ \frac{dy_2}{dt} &= V \sin \varphi, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{k}{V} u, |u| \leq 1,$$

$$V = \text{const}, k = \text{const} > 0.$$

Значения угла φ рассматриваются на интервале $(-\pi, \pi)$. Здесь y_1, y_2 – координаты объекта, отождествляемого с точкой на плоскости; φ – угол между вектором скорости объекта и осью x ; u – управляющий параметр, удовлетворяющий указанному ограничению и характеризующий скорость изменения угла φ ; k – максимальное боковое ускорение; V – величина скорости; $\alpha = \frac{k}{V}$.

Неравенство в (7) ограничивает радиус кривизны траектории объекта, а именно, радиус кривизны не может больше единицы. Рассматриваемая система использовалась Р. Айзексом при постановке задачи «шофер-убийца» (рис. 1). Состояние $z_0 = (y_1(t_0), y_2(t_0), \varphi(t_0))$ объекта в начальный момент времени предполагается заданным.

Множество достижимости $G(T)$ в момент времени $T \geq 0$ есть совокупность всех точек фазового пространства, в каждую из которых возможен перевод системы (7) в момент времени $T \geq 0$ при помощи некоторого допустимого управления на промежутке $T = [0, t^*]$ из начальной точки z_0 .

2. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, в правую часть которой входит управляющее воздействие:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= 2y_2 + y_4, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -2y_1 + y_3 + u(t), \\ \frac{dy_3}{dt} &= y_2 + 10y_4, \\ \frac{dy_4}{dt} &= 2y_1 - 2y_3 + u_2(t). \end{aligned} \tag{8}$$

Система (8) – это гамильтонова система, имеющая гамильтониан

$$H = y_1^2 + y_2 y_4 + 5y_4 + y_1^2 - y_1 y_3 + y_3^2 - u_1(t) y_1 - u_2(t) y_3.$$

В этой формуле y_1, y_2 – обобщенные координаты, y_2, y_4 – обобщенные импульсы.

На возмущающие силы системы $u_1(t), u_2(t)$ наложены ограничения

$$\{|u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1\}.$$

В [1] для этой системы были выбраны начальные данные в виде параллелепипеда размерности 4. Динамические оценки множеств достижимости были построены в виде эллипсоидов [1]. Поэтому полезно

предложить гарантированные оценки множеств достижимости, качественно совпадающие с результатами [1], показывающими отсутствие экспоненциального роста границ эллипсоидов. В [1] графики построены в логарифмической шкале с несколькими числовыми метками. Других числовых данных для этой системы в [1] не приводится (рис. 2, 3).

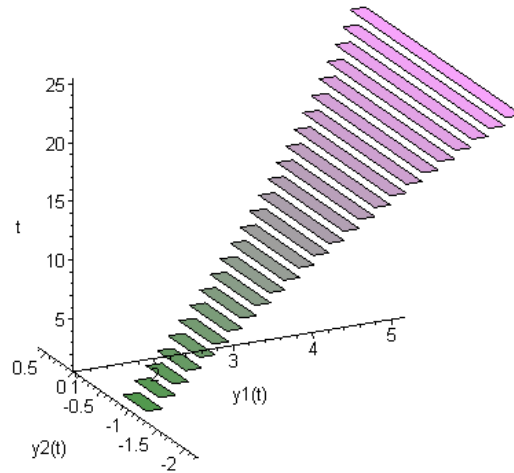


Рис. 1. Гарантированные границы множества достижимости задачи (7) – проекция на оси $t-y_1-y_2$ задачи «шофер-убийца»

Fig. 1. Guaranteed set boundaries of tasks (7) – projection on an axis $t-y_1-y_2$ “driver-killer” tasks

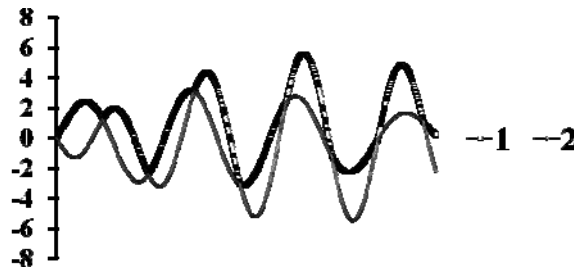


Рис. 2. Гарантированные границы множества достижимости задачи (8) – проекция на оси $t-y_1$: 1 – верхняя граница проекции множества достижимости; 2 – нижняя граница проекции множеств достижимости

Fig. 2. Guaranteed set boundaries of tasks (8) – projection on an axis $t-y_1$: 1 – upper limit of set projection of reachability; 2 – lower limit of set projection of reachability

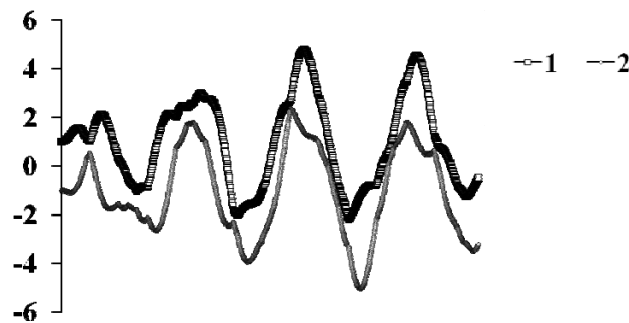


Рис. 3. Гарантированные границы множества достижимости задачи (8) – проекция на оси $t-y_2$: 1 – верхняя граница проекции множества достижимости; 2 – нижняя граница проекции множеств достижимости

Fig. 3. Guaranteed set boundaries of tasks (8) – projection on an axis $t-y_2$: 1 – upper limit of set projection of reachability; 2 – lower limit of set projection of reachability

Заключение. В статье описаны символьные алгоритмы, улучшающие применение гарантированных методов оценки решений дифференциальных уравнений для вычисления включений множеств достижимости управляемых систем. В статье применяется операция умножения на укоренившихся помеченных деревьях, что создает набор этих структур данных как ассоциативную алгебру. Затем определяется алгебра гомоморфизма из исходной алгебры операторов в данную алгебре деревьев. Сокращения, которые появляются, когда непрерывные операторы выражены через коммутирующие операторы, возникают естественно, когда операторы представлены с использованием этой структуры данных. Это приводит к алгоритму, применение которого для операторов, таких как производные, ускоряет вычисления оператора, что повышает эффективность применения гарантированных методов.

Библиографические ссылки

1. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М. : Наука, 1977. 392 с.
2. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М. : Наука, 1988. 319 с.
3. Chernousko F. L. State Estimation for Dynamic Systems. Boca Raton : CRC Press, 1994. 304 p.
4. Овсеевич А. И., Шматков А. М. К вопросу о сопоставлении вероятностного и гарантированного подходов к прогнозу фазового состояния динамических систем // Известия Академии наук. Теория и системы управления. 2007. № 4. С. 11–16.
5. Черноусько Ф. Л. Эллипсоидальные аппроксимации множеств достижимости управляемых линейных систем с неопределенной матрицей // Прикладная математика и механика. 1996. Т. 60, № 6. С. 940–950.
6. Куржанский А. Б., Фурасов Б. Д. Задачи гарантированной идентификации билинейных систем с дискретным временем // Известия Академии наук. Теория и системы управления. 2000. № 4. С. 5–12.
7. Кнут Д. Э. Искусство программирования. Т. 2. Основные алгоритмы. Т. 2. Основные алгоритмы. 3-е изд. М. : Вильямс, 2000. 832 с.
8. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М. : Иностранная литература, 1963. 832 с.
9. Пацко Б. В., Пятко С. Г., Федотов А. А. Трехмерные множества достижимости нелинейных управляемых систем // Известия Академии наук. Теория и системы управления. 2003. № 3. С. 8–16.
10. Тятюшкин А. И., Моржин О. В. Численное исследование множеств достижимости нелинейных управляемых дифференциальных систем // Автоматика и телемеханика. 2011. Вып. 6. С. 160–170.
11. Финкельштейн Е. А., Горнов А. Ю. Алгоритм квазиравномерного заполнения множества достижимости нелинейной управляемой системы // Известия Иркутского государственного университета. Сер. «Математика». 2017. Т. 19. С. 217–223.
12. Новиков В. А., Рогалев А. Н. Построение сходящихся верхних и нижних оценок решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1993. Т. 33, № 2. С. 219–231.
13. Рогалев А. Н. Включение множеств решений дифференциальных уравнений и гарантированные оценки глобальной ошибки // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8, № 6. С. 80–94.
14. Rogalyov A. N. Computation of reachable sets guaranteed bounds // Proceedings of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology – Control, Diagnostics, and Automation (ACIT – CDA 2010). Calgary, Canada : ACTA Press, 2010. B6. P. 132–139.
15. Рогалев А. Н. Вычисление гарантированных границ множеств достижимости управляемых систем // Автоматика. 2011. Т. 47, № 3. С. 100–112.
16. Rogalev A. N. Calculation of Guaranteed Boundaries of Reachable Sets of Controlled Systems // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2011. Vol. 47. № 3. P. 287–296.
17. Рогалев А. Н., Рогалев А. А. Численный расчет включений фазовых состояний в задачах наблюдения за движением самолета // Вестник СибГАУ. 2012. № 1(41). С. 53–57.
18. Рогалев А. Н., Рогалев А. А. Численные оценки предельных отклонений траекторий летательных аппаратов в атмосфере // Вестник СибГАУ. 2015. Т. 16, № 1. С. 97–104.
19. Grossman R. Evaluation of expressions involving higher order derivations // J. Math. Systems, Estimation, and Control. 1991. № 1. P. 91–106.
20. Grossman R., Larson R. G. Hopf-algebraic structures of families of trees // J. Algebra. 1989. Vol. 126. P. 184–210.

References

1. Kurzhanskiy A. B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and observation under uncertainty]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 392 p.
2. Chernous'ko F. L. *Otsenivanie fazovogo sostoyaniya dinamicheskikh sistem* [Dynamical systems phase state evaluating]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 319 p.
3. Chernousko F. L. State Estimation for Dynamic Systems. Boca Raton, CRC Press, 1994, 304 p.
4. Ovseevich A. I., Shmatkov A. M. [Probability and guaranteed approaches for dynamical systems phase state forecasting]. *Izvestiya Akademii Nauk. Teoriya i sistemy upravleniya*. 2007, No. 4, P. 11–16 (In Russ.).
5. Chernous'ko F. L. [Ellipsoidal approximation of reachable sets of controlled systems with matrix of uncertainty]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1996, Vol. 60, No. 6, P. 940–950 (In Russ.).
6. Kurzhanskij A. B., Furasov B. D. Zadachi garantirovannoj identifikatsii bilinejnykh sistem s diskretnym vremenem, *Izvestiya Akademii Nauk. Teoriya i sistemy upravleniya*. 2000, Vol. 4, P. 5–12 (in Russ.).
7. Donal'd Knut. *Iskusstvo programmirovaniya. Osnovnye algoritmy* [Art of programming. Basic algorithms]. Moscow, Vil'yams Publ., 2000, 832 p.
8. Shannon K. *Raboty po teorii informatsii i kibernetike* [Notes on information theory and cybernetics]. Moscow, Inostrannaya literature Publ., 1963, 832 p.

9. Panko B. V., Pyatko S. G., Fedotov A. A. [Three-dimensional reachable sets of nonlinear controlled systems]. *Izvestiya Akademii Nauk. Teoriya i sistemy upravleniya*. 2003, Vol. 3, P. 8–16 (In Russ.).
10. Tyatyushkin A. I., Morzhin O. V. [Nonlinear controlled differential systems reachable sets numerical estimation]. *Avtomatika i telemekhanika*. 2011, No. 6, P. 160–170 (In Russ.).
11. Finkel'shtejn E. A., Gornov A. Yu. [Algorithm of quasiuniform fill of Nonlinear controlled systems reachable sets]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika*. 2017, Vol. 19, P. 217–223 (In Russ.).
12. Novikov V. A., Rogalev A. N. [Upper and lower converging bounds estimation constructing for ODE systems solutions]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*. 1993, Vol. 33, No. 2, P. 219–231 (In Russ.).
13. Rogalev A. N. [Differential equations solutions sets inclusions and guaranteed estimation of global error]. *Vychislitel'nye tekhnologii*. 2003, Vol. 8, No. 6, P. 80–94 (In Russ.).
14. Rogalyov A. N. [Computation of reachable sets guaranteed bounds]. *Proceedings of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology – Control, Diagnostics, and Automation*. ACTA Press, B6, Calgary, Canada. 2010, P. 132–139.
15. Rogalev A. N. [Estimation of guaranteed bounds of controlled systems reachable sets]. *Avtometriya*. 2011, Vol. 47, No. 3, P. 100–112 (In Russ.).
16. Rogalev A. N. [Calculation of Guaranteed Boundaries of Reachable Sets of Controlled Systems]. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. Allerton Press, 2011, Vol. 47, No. 3, P. 287–296.
17. Rogalev A. N., Rogalev A. A. [Numerical computations of phase states inclusions for problems of aircraft displacement inspection]. *Vestnik SibGAU*. 2012, No. 1(41), P. 53–57 (In Russ.).
18. Rogalev A. N., Rogalev A. A. [Numerical estimations of maximum deviations for aircraft trajectories in the atmosphere]. *Vestnik SibGAU*. 2015, Vol. 16, No 1, P. 97–104 (In Russ.).
19. Grossman R. [Evaluation of expressions involving higher order derivations]. *J. Math. Systems, Estimation, and Control*. 1991, No. 1, P. 91–106.
20. Grossman R., Larson R. G. Hopf-algebraic structures of families of trees. *J. Algebra*. 1989, Vol. 126, P. 184–210.