УДК 512.54
Doi: 10.31772/2587-6066-2018-19-3-432-437

Для цитирования: Сенашов В. И., Белов Д. К. Моделирование слойной структуры бесконечных групп // Сибирский журнал науки и технологий. 2018. Т. 19, № 3. С. 432–437. Doi: 10.31772/2587-6066-2018-19-3-432-437

For citation: Senashov V. I., Belov D. K. [Modeling of the layer structure of infinte groups]. *Siberian Journal of Science and Technology.* 2018, Vol. 19, No. 3, P. 432–437 (In Russ.). Doi: 10.31772/2587-6066-2018-19-3-432-437

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЙНОЙ СТРУКТУРЫ БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУПП

В. И. Сенашов[1,2], Д. К. Белов[2*]

[1]Институт вычислительного моделирования СО РАН
Российская Федерация, 660036, г. Красноярск, Академгородок, 50/44
E-mail: sen1112home@mail.ru
[2]Сибирский федеральный университет
Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, просп. Свободный, 79
*E-mail: white94@inbox.ru

Математическое моделирование бесконечных дискретных объектов возможно, если эти объекты удовлетворяют каким-либо условиям конечности. Если все слои элементов в бесконечной группе конечны, то для такой группы возможно функциональное описание мощности слоев. Слоем называется множество всех элементов группы одного порядка. Бесконечные слойно конечные группы впервые исследовались С. Н. Черниковым сначала без названия, а затем в его последующих публикациях за ними закрепилось название слойно конечных групп. Наиболее интенсивные исследования свойств слойно конечных групп проводили в 1940-х – 1950-х годах С. Н. Черников, Р. Бэр, Х. Х. Мухаммеджан. Дается функциональное описание для некоторых слойно конечных групп. Показано, что очень хорошо поддаются визуализации примарные слойно конечные группы и слойно конечные группы в случае двух простых делителей порядков элементов группы. Для примарного случая удобно использовать обычное графическое представление. В случае двух простых делителей порядков элементов слойно конечной группы проведена визуализация функций мощности слоев при помощи поверхностей в трехмерном пространстве. Для большего числа простых делителей порядков элементов предложен подход моделирования слойной структуры полной слойно конечной группы при помощи подгруппового анализа. Исследованы функции мощности слоев для полных слойно конечных групп и некоторых конечных расширений этих групп, продемонстрированы их графические представления.

Ключевые слова: *группа, слой, мощность слоя, порядок, конечное расширение.*

MODELING OF THE LAYER STRUCTURE OF INFINTE GROUPS

V. I. Senashov[1,2], D. K. Belov[2*]

[1]Institute of Computational Modelling SB RAS
50/44, Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation
E-mail: sen1112home@mail.ru
[2]Siberian Federal University
79, Svobodny Av., Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation
*E-mail: white94@inbox.ru

Mathematical modeling of infinite discrete objects is possible if these objects satisfy any conditions of finiteness. If all the layers of elements in the group are finite, a functional description of the power of the layers for such a group is possible. A layer is a set of all elements of the group of the same order. For the first time the infinite layer-finite groups were investigated by S. N. Chernikov initially without a title, and then in his subsequent publications the name of layer-finite groups was fixed. The most intensive studies of the properties of layer-finite groups were carried out in the 1940s and 1950s by S. N. Chernikov, R. Baer, X. X. Muhammedzhan. The paper gives a functional description for some layer-finite groups. It is shown that primary layer-finite groups and layer-finite groups can be very well visualized in the case of two prime divisors of the orders of the elements of the group. For a primary case, it is convenient to use the usual graphical representation. In the case of two prime divisors of the orders of elements of a layer-finite group, visualization of the power functions of the layers by means of surfaces in three-dimensional space is carried out. For a larger number of simple order-divisors, an approach for modeling the layer structure of a complete layer-finite group *using subgroup analysis is proposed. In this paper, we study the power functions of the layers for complete layer-finite groups and some finite extensions of these groups, and demonstrate their graphical representations.*

Keywords: group, layer, power of layer, order, finite extension.

Введение. Ранее С. Н. Черниковым исследовались бесконечные слойно конечные группы, которые впервые появились в его работах сначала без названия, а затем в его последующих публикациях за ними закрепилось название слойно конечных групп. Мы будем исследовать мощности слоев в некоторых слойно конечных группах. Слоем называется множество всех элементов группы одного порядка.

Наиболее интенсивные исследования свойств слойно конечных групп проводили в 1940-х – 1950-х годах С. Н. Черников, Р. Бэр, Х. Х. Мухаммеджан. К концу 1950-х годов основные свойства были уже получены и опубликованы в различных журналах. В таком виде они оставались до 1980 г., когда появилась монография С. Н. Черникова [1]. Свойства слойно конечных и почти слойно конечных групп рассматриваются в работах [2–13].

Если все слои элементов в группе конечны, то для такой группы возможно функциональное описание мощности слоев.

В статье дается функциональное описание для некоторых слойно конечных групп. Показано, что поддаются визуализации примарные слойно конечные группы и слойно конечные группы в случае двух простых делителей порядков элементов группы. В случае двух простых делителей проведена визуализация при помощи поверхностей в трехмерном пространстве. Для большего числа простых делителей предложен подход при помощи подгруппового анализа. Моделирование слоев в группах при помощи слойных графов можно найти в работах [14; 15].

Основной результат. Сначала в качестве примера рассмотрим некоторые слойно конечные p-группы и их конечные расширения.

Найдем мощности слоев группы C_{p^∞}, где p – простое число. В группе C_{p^∞} один элемент порядка 1, $p-1$ элемент порядка p, p^2-p элементов порядка p^2, …, p^n-p^{n-1} элементов порядка p^n, …

График функции мощности слоев группы C_{p^∞} представляет собой точки, лежащие на прямой с уравнением:

$$y = x\frac{p-1}{p}, x \ge p.$$

Изобразим это на графике (рис. 1).

В случае большего числа прямых множителей график функции мощности слоев группы $\underbrace{C_{p^\infty}\times\cdots\times C_{p^\infty}}_{m}$ представляет собой точки, лежащие на кривой с уравнением

$$y = x^m\frac{p^m-1}{p^m}, x \ge p,$$

где m – число квазициклических групп в прямом разложении группы

$$\underbrace{C_{p^\infty}\times\cdots\times C_{p^\infty}}_{m}.$$

Изобразим это на графике (рис. 2).

При моделировании картины, представляющей собой мощности слоев группы $C_{p^\infty}\times C_{p^k}$, будем иметь дело с двумя функциями, содержащими значения, соответствующие мощностям слоев, которые имеют вид

$$y = x^2\frac{p^2-1}{p^2},\ \text{при}\ p \le x \le p^k,$$

$$y = x\left(p^k-p^{k-1}\right),\ \text{при}\ x > p^k.$$

Изобразим это на графике (рис. 3).

График функции мощности слоев группы $C_{p^\infty}\times C_{p^k}$, начиная со значения p до значения p^k, представляет собой точки, лежащие на параболе, и с p^{k+1} до p^{k+m} – точки, лежащие на прямой.

Рассмотрим группу $C_{p^\infty}\times C_{q^\infty}$, где $p<q$. График функции мощности слоев группы $C_{p^\infty}\times C_{q^\infty}$ (рис. 4) представляет собой точки, лежащие на сегменте поверхности второго порядка с абсциссами p, p^2, …, p^n, …, и ординатами q, q^2, …, q^n, …, задаваемой уравнением

$$z = x\frac{p-1}{p}y\frac{q-1}{q}, x \ge p, y \ge q.$$

Рассмотрим группы с числом простых делителей элементов, больше двух. Для примера, рассмотрим группу $C_{2^\infty}\times C_{3^\infty}\times C_{3^\infty}\times C_{5^\infty}$. Изобразить ее мощности слоев сложно, для этого удобно работать в четырехмерном пространстве. Будем работать с подгруппами, отвечающими паре простых чисел. Например, 2, 3, изображая мощности части слоев, отвечающие номерам слоев, делящихся на 2 и 3. Получается подгруппа $C_{2^\infty}\times C_{3^\infty}\times C_{3^\infty}$.

Функция мощности слоев этой подгруппы будет иметь вид

$$z = \frac{4xy^2}{9}, x \ge p, y \ge q.$$

Слойная картина в этом случае будет иметь вид, представленный на рис. 5.

Видно, что полученная иллюстрация представляет точки с абсциссами 2, 2^2, 2^3, … и ординатами 3, 3^2, 3^3, …, лежащие на сегменте поверхности.

Еще рассмотрим пару простых чисел 3, 5, изображая мощности части слоев, отвечающие номерам слоев, делящихся на 3 и 5. Получается подгруппа $C_{3^\infty}\times C_{3^\infty}\times C_{5^\infty}$.

Функция мощности слоев этой подгруппы будет иметь вид

$$z = \frac{32x^2 y}{45}, x \geq p, y \geq q.$$

Слойная картина в этом случае показана на рис. 6.

Видно, что полученная иллюстрация представляет точки с абсциссами 3, 3^2, 3^3, … и ординатами 5, 5^2, 5^3, …, лежащие на сегменте поверхности.

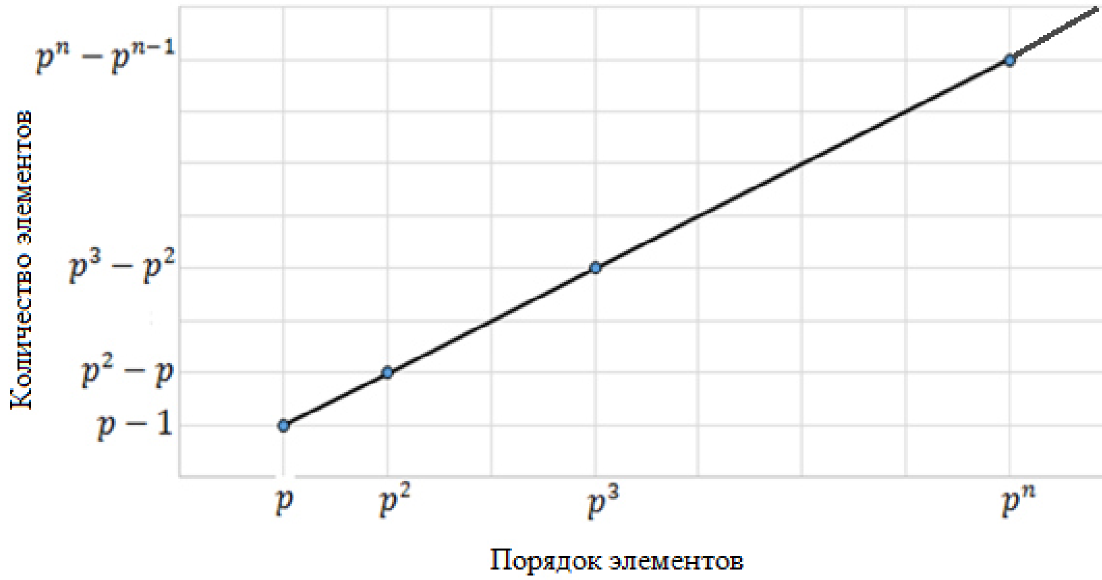

Рис. 1. График функции мощности слоев группы C_{p^∞}

Fig. 1. Graph of capacity function of layers of the group C_{p^∞}

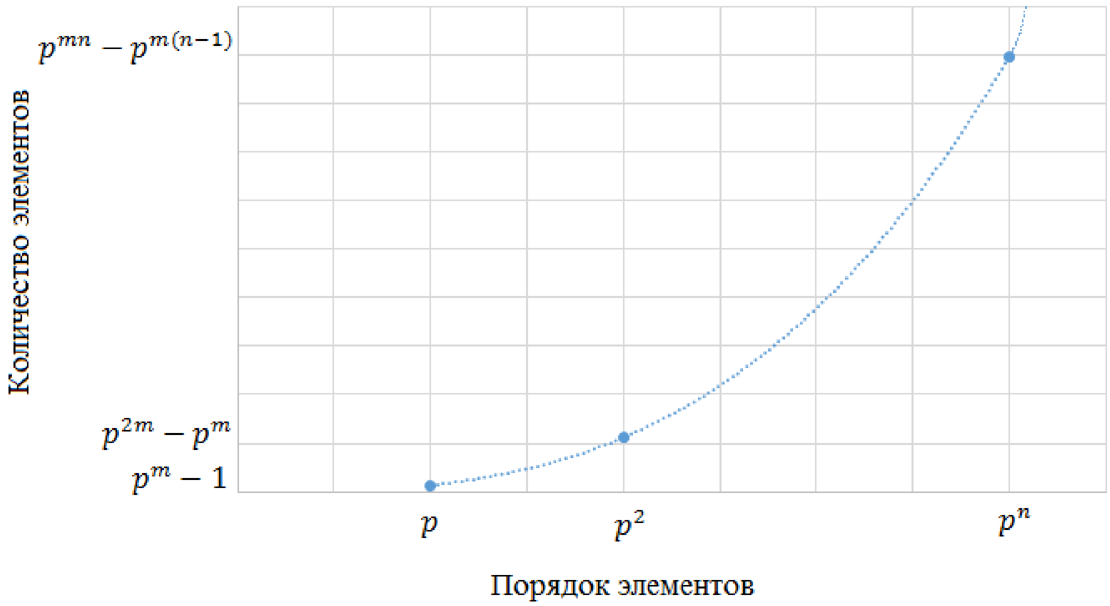

Рис. 2. График функции мощности слоев группы $\underbrace{C_{p^\infty} \times \cdots \times C_{p^\infty}}_{m}$

Fig. 2. Graph of capacity function of layers of the group $\underbrace{C_{p^\infty} \times \cdots \times C_{p^\infty}}_{m}$

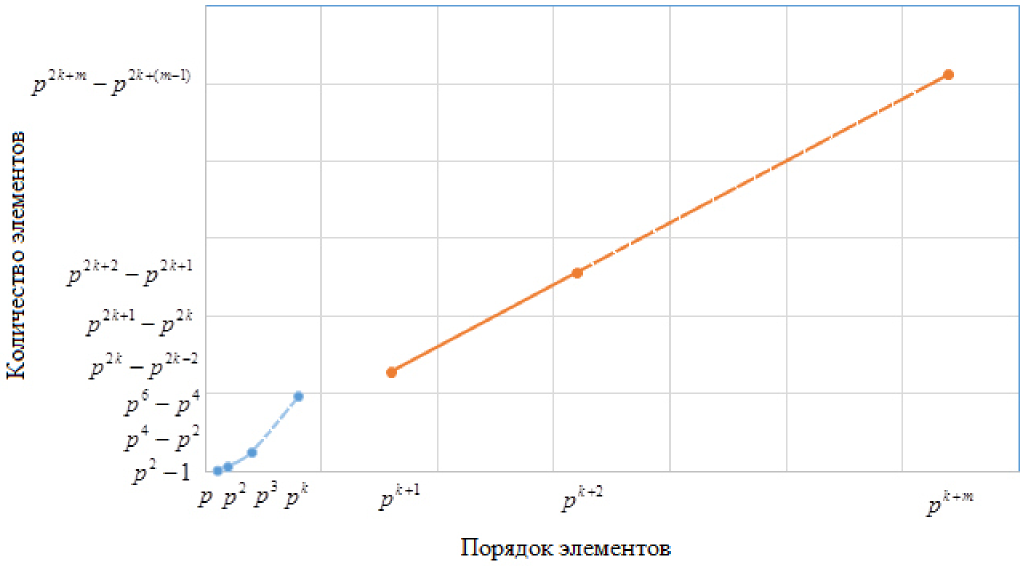

Рис. 3. Слойная картина группы $C_{p^\infty}\times C_{p^k}$

Fig. 3. A layered picture of the group $C_{p^\infty}\times C_{p^k}$

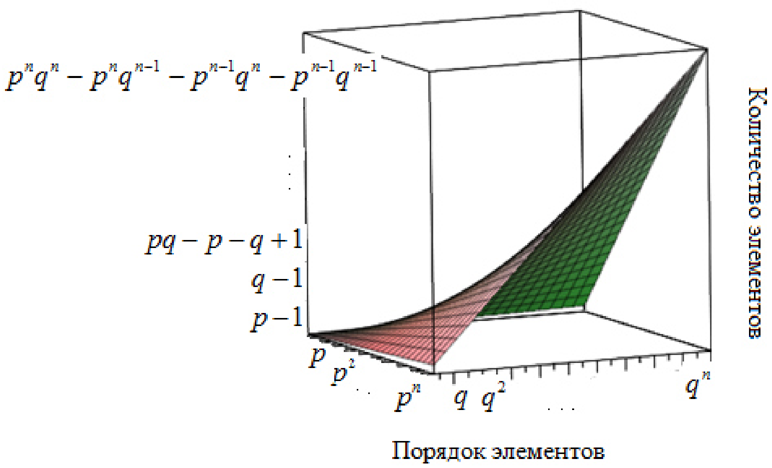

Рис. 4. Слойная картина группы $C_{p^\infty}\times C_{q^\infty}$

Fig. 4. A layered picture of the group $C_{p^\infty}\times C_{q^\infty}$

Осталось рассмотреть случай пары чисел 2 и 5. Этому случаю соответствует подгруппа $C_{2^\infty}\times C_{5^\infty}$.

Функция мощности слоев этой группы будет иметь вид

$$z=\frac{2xy}{5},x\geq p,y\geq q.$$

Слойная картина в этом случае будет иметь вид, представленный на рис. 7.

Видно, что полученная иллюстрация представляет точки с абсциссами 2, 2^2, 2^3, … и ординатами 5, 5^2, 5^3, …, лежащие на сегменте поверхности второго порядка.

Рассматривая эти три подгруппы, можно представить себе, как выглядит слойная картина группы $C_{2^\infty}\times C_{3^\infty}\times C_{3^\infty}\times C_{5^\infty}$.

Аналогично рассмотренному примеру можем рассматривать произвольную полную слойно конечную группу (так как полная слойно конечная группа является прямым произведением конечного числа квазициклических групп) с числом делителей порядков элементов больше двух.

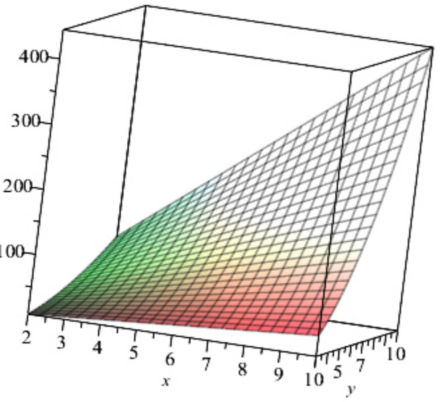

Рис. 5. Слойная картина подгруппы $C_{2^\infty} \times C_{3^\infty} \times C_{3^\infty}$

Fig. 5. A layered picture of the group $C_{2^\infty} \times C_{3^\infty} \times C_{3^\infty}$

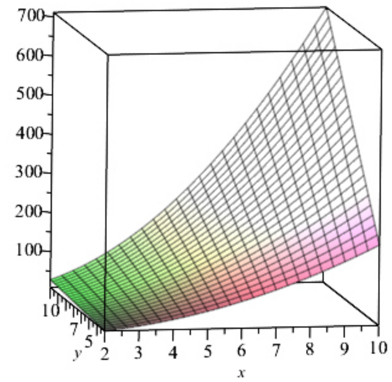

Рис. 6. Слойная картина подгруппы $C_{3^\infty} \times C_{3^\infty} \times C_{5^\infty}$

Fig. 6. A layered picture of the group $C_{3^\infty} \times C_{3^\infty} \times C_{5^\infty}$

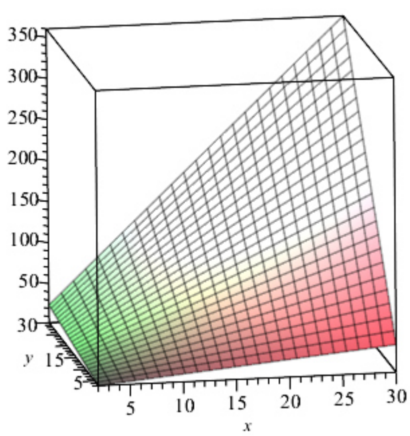

Рис. 7. Слойная картина подгруппы $C_{2^\infty} \times C_{5^\infty}$

Fig. 7. A layered picture of the group $C_{2^\infty} \times C_{5^\infty}$

Заключение. В статье найдены функции, по которым вычисляются мощности слоев некоторых полных слойно конечных групп и их конечных расширений, продемонстрированы их графические представления. Построены графики для функций, описывающих мощности слоев примарных слойно конечных групп. В случае двух простых делителей порядков элементов группы проведена визуализация при помощи поверхностей в трехмерном пространстве. Для большего числа простых делителей предложен подход при помощи подгруппового анализа.

Библиографические ссылки

1. Черников С. Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М. : Наука, 1980. 384 с.
2. Сенашов В. И. Слойно конечные группы. Новосибирск : Наука, 1993. 158 с.
3. Черников С. Н. Бесконечные слойно конечные группы // Мат. сб. 1948. Т. 22, № 64. С. 101–133.
4. Сенашов В. И., Шунков В. П. Почти слойная конечность периодической части группы без инволюций // Дискретная математика. 2003. Т. 15, № 3. С. 91–104.
5. Сенашов В. И. Группы с условием минимальности для не почти слойно конечных подгрупп // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, № 7, 8. С. 1002–1008.
6. Сенашов В. И. Достаточные условия почти слойной конечности группы // Укр. мат. журн. 1999. Т. 51, № 4. С. 472–485.
7. Сенашов В. И. О группах с сильно вложенной подгруппой, обладающей почти слойно конечной периодической частью // Укр. мат. журн. 2012. Т. 64, № 3. С. 384–391.
8. Сенашов В. И. Почти слойно конечные группы. LAP Lambert Academic Publishing, 2013. 106 с.
9. Сенашов В. И. Почти слойная конечность периодической группы без инволюций // Укр. мат. журн. 1999. Т. 51, № 11. С. 1529–1533.
10. Сенашов В. И. Взаимоотношения почти слойно конечных групп с близкими классами // Вестник СибГАУ. 2014. Т. 15, № 1. С. 76–79.
11. Сенашов В. И. Свойства локально-циклических групп // Сибирский журнал науки и технологий. 2017. Т.19, № 2. С. 290–293.
12. Сенашов В. И. Графы групп // Информационные технологии в математике и математическом образовании : материалы IV Всерос. науч.-метод. конф. с междунар. участием 18–19 нояб. 2015, г. Красноярск,. Краснояр. гос. пед. ун-т. С. 93–98.
13. Сенашов В. И. Слойно конечные и почти слойно конечные группы // Информационные технологии и математическое моделирование : избр. ст. IX науч. интернет-конф. с междунар. участием. 2016. С. 69–87.
14. Сенашов В. И., Ооржак О. М. О. Слойные графы групп // Вестник Тувинского государственного университета. Технические и физико-математические науки. 2015. Т. 26, № 3. С. 145–150.
15. Сенашов В. И., Герасимова А. М. О слойных графах групп // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. 2017. Т. 2, № 13. С. 303–304.

References

1. Chernikov S. N. *Gruppy s zadannymi svoystvami sistemy podgrupp* [Groups with given properties of a system of subgroups]. Moscow, Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 1980, 384 p.
2. Senashov V. I. *Sloyno konechnyye gruppy* [Layer-finite groups]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1993, 158 p.
3. Chernikov S. N. [Infinite layer-finite groups]. *Mat. sb.* 1948, Vol. 22, No. 1, P. 101–133 (In Russ.).
4. Senashov V. I., Shunkov V. P. [Almost layer finiteness of the periodic part of a group without involutions]. *Diskretnaya matematika*. 2003, Vol. 15, No. 3, P. 91–104 (In Russ.).
5. Senashov V. I. [Groups with the minimality condition for not almost layer-finite finite subgroups]. *Ukr. mat. zhurn*. 1991, Vol. 43, No. 7–8, P. 1002–1008 (In Russ.).
6. Senashov V. I. [Sufficient conditions for the almost layer finiteness of the group]. *Ukr. mat. zhurn*. 1999, Vol. 51, No. 4, P. 472–485 (In Russ.).
7. Senashov V. I. [On groups with strongly embedded subgroups having an almost layer-wise finite periodic part]. *Ukr. mat. zhurn*. 2012, Vol. 64, No. 3, P. 384–391 (In Russ.).
8. Senashov V. I. *Pochti sloyno konechnyye gruppy* [Almost layered finite groups]. LAP Lambert Academic Publishing, 2013, 106 p.
9. Senashov V. I. [Pochti sloynaya konechnost' periodicheskoy gruppy bez involyutsiy]. *Ukr. mat. zhurn*. 1999, Vol. 51, No. 11, P. 1529–1533 (In Russ.).
10. Senashov V. I. [Mutual relations of almost layered finite groups with close classes]. *Vestnik SibGAU.* 2014, Vol. 15, No. 1, P. 76–79 (In Russ.).
11. Senashov V. I. [Properties of locally cyclic groups]. *Siberian Journal of Science and Technology*. 2017, Vol. 18, No. 2, P. 290–293 (In Russ.).
12. Senashov V. I. [Graphs of groups]. *Materialy IV Vseross. nauch.-metod. konf. s mezhdun. uchastiyem Informatsionnyye tekhnologii v matematike i matematicheskom obrazovanii.* Krasnoyarsk, 18–19 November 2015. Krasnoyarsk. state. ped. un-t Publ., P. 93–98 (In Russ.).
13. Senashov V. I. [Layer-finite and almost layer-finite groups]. *Informatsionnyye tekhnologii i matematicheskoye modelirovaniye. Izbr. stat'i IX Nauchn. internet-konf. s mezhdun. uchastiyem*. 2016, P. 69–87 (In Russ.).
14. Senashov V. I., Oorzhak O. M. O. [Layered graphs of groups]. *Vestnik Tuvinskogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskiye i fiziko-matematicheskiye nauki.* 2015, Vol. 26, No. 3, P. 145–150 (In Russ.).
15. Senashov V. I., Gerasimova A. M. [On layer graphs of groups]. *Aktual'nyye problemy aviatsii i kosmonavtiki.* 2017, Vol. 2, No. 13, P. 303–304 (In Russ.).