

пульсных преобразователей напряжения с резонансным переключением // Вестник МАИ. М., 2012. Вып. 4. С. 141–146.

### References

1. Konev U. I., Gulyakovich G. N., Polyaniin K. P. *Microelectronnie electrosistemi. Primeneniya v radioelectronike* (Microelectronic electric systems. Application in electronics). М.: Radio i svyaz, 1987, 240 p.
2. Soustin B. P., Ivanchura V. I., Chernishev A. I., Islyayev H. N. *Sistemy elektropitaniya kosmicheskikh apparatov* (Power supply systems of spacecrafts) Novosibirsk, Nauka, Sibirskaya izdatelskaya firma, 1994, 318 p.
3. Patel M. R. *Spacecraft Power System*. N. Y.: CRC Press, 2005, 961 p.
4. O'Sullivan D., Weinberg A. The sequential switching shunt regulator S3R. Proceedings of the third

ESTEC Spacecraft power conditioning seminar (ESA SP-126), Noordwijk, The Netherlands, 1977, pp. 123–131.

5. Lukin A. V. *Elektropitanie*. 1993. № 2. p. 24–37.
6. Cho Bo Hyung. Novel zero-current-switching (ZCS) PWM switch cell minimizing additional conduction loss. IEEE Transactions on industrial electronics, vol. 49, no. 1, February 2002, p. 165–171.
7. Erickson R. W. *Fundamentals of Power Electronics*. New York: Chapman and Hall, May 1997, 791 p.
8. Goryashin N. N., Zorin A. N. *Vestnik SibGAU*. 2013, no. 47, p. 18–23.
9. Goryashin N. N., Zorin A. N. Proceedings of 14<sup>th</sup> IEEE International conference on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices at Altai. Russia, July 2013, p. 395–398.
10. Goryashin N. N., Luckyanenko M. V., Solomatova A. A., Khoroshko A. U. *Vestnik MAI*. 2012, no. 4, p. 141–146.

© Горяшин Н. Н., Зорин А. Н., Лукьяненко М. В., Соломатова А. А., 2013

УДК 539.3

## УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ СЛЕДЯЩЕЙ НАГРУЗКИ

Ю. В. Захаров<sup>1,2</sup>, А. К. Никулин<sup>1</sup>, Н. В. Филenkova<sup>1</sup>, А. Ю. Власов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева  
Россия, 660014, Красноярск, просп. им. газеты «Красноярский рабочий», 31, E-mail: yuzakharov@mail.ru

<sup>2</sup>Сибирский государственный технологический университет  
Россия, 660049, г. Красноярск, просп. Мира, 82. E-mail: yuzakharov@mail.ru

*Проблема устойчивости стержня Бека до сих пор актуальна, так как не было однозначно экспериментально подтверждено теоретическое значение критической тангенциальной нагрузки на упругий стержень, например, возникающей при воздействии ракетного двигателя на упругую консоль. В работе приближенными аналитическими методами рассмотрено влияние силы, запаздывающей относительно тангенциального положения, и показано, что такой тип нагрузки может привести к динамической потере устойчивости для постоянной, устойчивых в модели Бека. Приведены условия потери устойчивости. Найденные решения расширяют возможности анализа устойчивости и закритического поведения сложных нелинейных систем. Сформулировано новое направление анализа отклонений от идеальной модели Бека.*

*Ключевые слова: стержень Бека, потеря устойчивости, тангенциальная нагрузка, запаздывание нагрузки.*

## STABILITY OF A COLUMN UNDER THE RETARDING FOLLOWER LOAD

Yu. V. Zakharov<sup>1,2</sup>, A. K. Nikulin<sup>1,2</sup>, N. V. Filenkova<sup>2</sup>, A. Yu. Vlasov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev  
31 “Krasnoyarskiy Rabochiy” prosp., Krasnoyarsk, 660014, Russia. E-mail: yuzakharov@mail.ru

<sup>2</sup>Siberian State Technological University  
82 Mira prosp., Krasnoyarsk, 660049, Russia. E-mail: yuzakharov@mail.ru

*The problem of stability of Beck's column is still relevant, as there are no any unambiguous experimental confirmations of the theoretically calculated value of the critical tangential load on the elastic column, where the load may be caused by the effect of the rocket engine, for example.*

\*Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки РФ, соглашение 14.B37.21.0405 «Моделирование композитных элементов крупногабаритных трансформируемых механических систем космических аппаратов связи и телекоммуникаций».

*This article presents the estimation of the influence of the thrust that is delayed toward the tangential position. The estimation has been derived using approximate analytical methods and proves the existence of the dynamic loss of stability even for the states that are stable in the Beck's model. The conditions of the loss of stability are clearly demonstrated. The found solutions extend the capabilities of analysis of the stability and overcritical behavior of the complex nonlinear systems. A new direction of analysis of the deviations from the Beck's model has been formulated.*

*Keywords: Beck's column, loss of stability, tangential load, force with delay*

Вопрос о воздействии тангенциальной нагрузки на упругий стержень рассматривался во многих работах. Николаи [1] показал, что стержень под действием тангенциальной нагрузки не имеет статических форм потери устойчивости. Беком [2] было найдено, что под действием тангенциальной силы потеря устойчивости происходит по динамическому сценарию (флаттер). Такая потеря устойчивости должна происходить при нагрузках близких к 9 силам Эйлера, но проблемой оказалось экспериментальное подтверждение критической нагрузки. Еще в 60-х Тимошенко [3] писал о невозможности современными методами реализовать стержень Бека. До сих пор этот вопрос открыт, хотя обсуждался многими авторами (см., например, обзор [4]). По моделированию консоли Бека был выполнен ряд работ, например, [5–7]. В работе [5] сопоставлялись частотно-силовые характеристики, полученных теоретически и экспериментально при малых нагрузках совпадали с теоретической моделью, хотя значение критической нагрузки оставалось меньше 9 сил Эйлера. В экспериментах Янге [7] была получена критическая нагрузка около 6 сил Эйлера. В работе [6] рассматривалось влияние воздействия ракетного двигателя на упругую консоль.

Из-за сложности реализации данной системы существует несколько теоретических моделей, рассматривающих отклонение от идеального стержня Бека, назовем основные: наличие дополнительной консервативной нагрузки [6], учет трения в системе [8] и колебание положения или значения силы [9]. Данные модели используются для объяснения отличия экспериментальных результатов от идеальной модели Бека.

Одни из наиболее подробных исследований тангенциальной нагрузки были проведены в серии экспериментов Сагиямой [6; 15]. Автор использовал для моделирования нагрузки ракетный двигатель. В ходе своих исследований Сагияма представил серию фотографий стержня под действием субтангенциальной нагрузки.

Исследования влияния тангенциальной нагрузки проводились не только на консоли, но и на пластинах [10] и маятниках [11]. В работе [11] рассматривались отклонения от идеальной системы, вызванные запаздыванием поворота тангенциальной нагрузки для обычного и двухзвеньевого маятника. Но для стержня исследование запаздывания тангенциальной нагрузки проводилось.

В данной работе мы рассматриваем задачу об упругой консоли под действием запаздывающей относительно тангенциального положения нагрузки.

**Модель запаздывания.** Для консоли под действием тангенциальной нагрузки нейтральная линия сво-

бодного конца должна совпадать с направлением действующей силы. Рассмотрим случай, когда сила при начавшемся повороте стержня не успевает повернуться в тангенциальное положение, и будем называть такое состояние запаздыванием.

Допустим, что существует постоянное время запаздывания  $\tau^*$ , тогда угол  $\varphi$  действующей силы к оси  $Ox$

$$\varphi(t^*) = -\theta(L, t^* - \tau^*), \quad (1)$$

где  $\theta(l, t^*)$  – угол наклона нейтральной линии консоли к оси  $Ox$ ,  $L$  – длина стержня,  $l$  – криволинейная координата,  $t^*$  – время. Из уравнения (1) следует, что для поворота силы до угла  $\theta(l, t)$  необходимо время  $\tau^*$  (рис. 1).

Запаздывание нагрузки относительно тангенциального положения может быть вызвано разностью времени поворота стержня и силы. Причиной расхождения в положении стержень-сила может быть инертность реактивной струи или другого источника тангенциальной нагрузки.



Рис. 1. Модель запаздывания тангенциальной нагрузки. Состояние 1 – форма в момент времени  $t^* - \tau^*$ ; 2 – форма стержня в момент времени  $t^*$ , под воздействием силы  $P$

**Колебание стержня с запаздыванием.** Рассмотрим колебание упругого стержня длиной  $L$ , жесткостью  $EI$  и погонной массой  $M$ , на который действует запаздывающая тангенциальная нагрузка  $P$ .



Рис. 2. Модель стержня

Уравнение колебания такой системы имеет вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + q^2 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \omega^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

где  $w(s, t)$  – амплитуда колебания;  $s = l/L$ ,  $q^2 = P/F_{эл}$ ,  $t = \Omega t^*$ ,  $\omega^2 = \Omega^2 M l^4 / EI$  – безразмерные длина, сила, время, частота соответственно;  $\Omega$  – частота колебания стержня;  $F_{эл} = (\pi/2)^2 EI/l^2$  – сила Эйлера. Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} w(0, t) = 0, \quad w'(0, t) = 0, \quad w''(1, t) = 0, \\ w'''(1, t) = -q^2 (w'(1, t) + \varphi). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь штрихи обозначают дифференцирование по координате.

Без учета запаздывания в задаче для стержня Бека [2]  $w'''(1, t) = 0$ , т. е. при  $\tau = 0$  угол  $\varphi = -w'(1, t)$ . Перепишем условие (3) с учетом условия запаздывания (1)

$$w'''(1, t) = -q^2 (w'(1, t) - w'(1, t - \tau)). \quad (4)$$

где  $\tau = \Omega \tau^*$  – безразмерное время запаздывания.

Решение уравнения (2) мы будем искать в виде

$$w(s, t) = W_+(s, t) + W_-(s, t), \quad (5)$$

где  $W_+(s, t)$  и  $W_-(s, t)$  являются линейно независимыми решениями вида

$$\begin{aligned} W_+(s, t) &= Ae^{it} w_+(s), \\ W_-(s, t) &= Be^{-it} w_-(s). \end{aligned} \quad (6)$$

Подставим решение (5) в уравнение (2), получим, что  $w_+(s) = w_-(s) = w(s)$  и имеют вид

$$w(s) = C_1 \sin r_1 s + C_2 \cos r_1 s + C_3 \operatorname{sh} r_2 s + C_4 \operatorname{ch} r_2 s \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} r_1^2 &= \frac{q^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{2}\right)^2 + \omega^2}, \\ r_2^2 &= -\frac{q^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{2}\right)^2 + \omega^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

здесь  $\omega$  не зависит от координаты и времени.

Из первых двух уравнений граничных условий (3) получим

$$C_2 = -C_4, \quad r_1 C_1 = -r_2 C_3. \quad (9)$$

Используя третье и четвертое уравнения условия (3), построим систему уравнений

$$\begin{cases} (-r_1^2 \sin r_1 - r_1 r_2 \operatorname{sh} r_2) C_1 + \\ + (-r_1^2 \cos r_1 - r_2^2 \operatorname{ch} r_2) C_2 = 0, \\ \left( (-r_1^3 + r_1 p_{пов}) \cos r_1 - r_1 (r_2^2 + p_{пов}) \operatorname{ch} r_2 \right) C_1 + \\ + \left( (r_1^3 - r_1 p_{пов}) \sin r_1 - (r_2^3 + r_2 p_{пов}) \operatorname{sh} r_2 \right) C_2 = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где введено обозначение  $p_{пов} = q^2(1 - \exp(-i\tau))/2$  для решения  $W_+(s, t)$ .

Нетривиальные решения для системы (10) будут существовать при условии

$$\begin{vmatrix} -r_1^2 \sin r_1 - r_1 r_2 \operatorname{sh} r_2 \\ -r_1^2 \cos r_1 - r_2^2 \operatorname{ch} r_2 \\ (-r_1^3 + r_1 p_{пов}) \cos r_1 - r_1 (r_2^2 + p_{пов}) \operatorname{ch} r_2 \\ (r_1^3 - r_1 p_{пов}) \sin r_1 - (r_2^3 + r_2 p_{пов}) \operatorname{sh} r_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

Определитель системы (11) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} r_1^4 + r_2^4 - p_{пов} (r_1^2 - r_2^2) + (2r_1^2 r_2^2 + p_{пов} (r_1^2 - r_2^2)) \times \\ \times \cos r_1 \operatorname{ch} r_2 - r_1 r_2 (r_2^2 + 2p_{пов} - r_1^2) \sin r_1 \operatorname{sh} r_2 = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Используя определения  $r_1, r_2$  (8), перепишем уравнение (12)

$$\begin{aligned} q^4 + 2\omega^2 - p_{пов} q^2 + (2\omega^2 + p_{пов} q^2) \cos r_1 \operatorname{ch} r_2 + \\ + \omega (q^2 - 2p_{пов}) \sin r_1 \operatorname{sh} r_2 = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

В общем случае частота  $\omega$  является комплексной и имеет действительную  $\omega'$  и мнимую  $\omega''$  части

$$\omega = \omega' + i\omega''. \quad (14)$$

Безразмерная частота  $\omega$  линейно зависит от  $\Omega$ , которая также является комплексной. Величина нормировки частоты положительна. И тогда решение уравнения (2) будет асимптотически устойчиво при  $\omega'' > 0$  для  $W_+(s, t)$  и  $\omega'' < 0$  для  $W_-(s, t)$ . Перепишем уравнение (13), используя выражение (14)

$$\begin{aligned} q^4 + 2\omega'^2 - q^2 p'_{пов} + (2\omega'^2 + q^2 p'_{пов}) \cos r_1 \operatorname{ch} r_2 + \\ + (\omega' (q^2 - 2p'_{пов}) - 2\omega'' p''_{пов}) \sin r_1 \operatorname{sh} r_2 + \\ + i \{ 4\omega' \omega'' + q^2 p''_{пов} + (4\omega' \omega'' - q^2 p''_{пов}) \cos r_1 \operatorname{ch} r_2 + \\ + (\omega'' (q^2 - 2p'_{пов}) + 2\omega' p''_{пов}) \sin r_1 \operatorname{sh} r_2 \} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} p'_{пов} &= \frac{q^2}{2} (1 - \cos \tau), \\ p''_{пов} &= \frac{q^2}{2} \sin \tau. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнение (15) будет иметь решение, когда действительная и комплексная части (15) будут равны 0

$$\begin{cases} q^4 + 2\omega'^2 - q^2 p'_{пов} + (2\omega'^2 + q^2 p'_{пов}) \cos r_1 \operatorname{ch} r_2 + \\ + (\omega' (q^2 - 2p'_{пов}) - 2\omega'' p''_{пов}) \sin r_1 \operatorname{sh} r_2 = 0, \\ 4\omega' \omega'' + q^2 p''_{пов} + (4\omega' \omega'' - q^2 p''_{пов}) \cos r_1 \operatorname{ch} r_2 + \\ + (\omega'' (q^2 - 2p'_{пов}) + 2\omega' p''_{пов}) \sin r_1 \operatorname{sh} r_2 = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Решения системы уравнений (17) будем анализировать графическим (рис. 3) и численным методами (рис. 4).

Для рис. 3 была выбрана серия зависимостей графического решения системы (17) при постоянной на-

грузке, равной 6 силам Эйлера, и различных значениях  $\tau$ . Пунктирной и сплошной линиями обозначены зависимости  $\omega''$  от  $\omega'$  для первого и для второго уравнения системы (17) соответственно.

Решениями системы уравнений (17) будет пересечение данных зависимостей. Видно, что на рис. 3 пересечения зависимостей происходят в нижней полуплоскости, что соответствует отрицательному значению

комплексной составляющей частоты. Мы рассматриваем случай для  $W_+(s,t)$ , следовательно, такие состояния неустойчивы.

Численным методом были получены частотно-силовые характеристики для первой и второй мод колебания при  $\tau = 0,01$ . Из рис. 4 видно, что при нагрузках до 6 сил Эйлера мнимые части первой и второй мод колебаний отрицательны, что соответствует флаттеру.

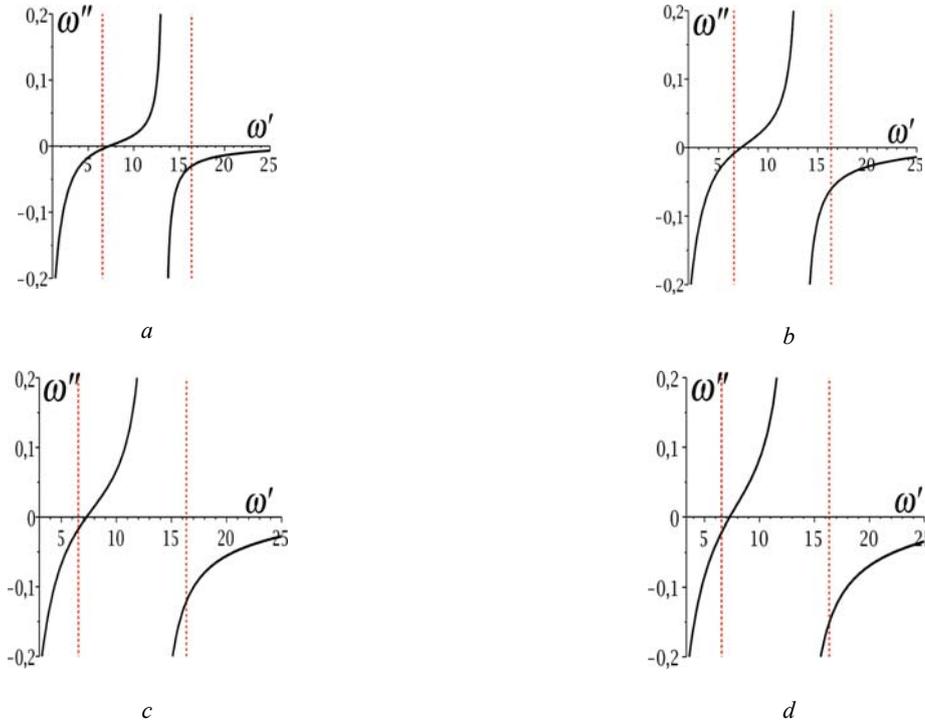


Рис. 3. Частоты колебания при 6 силах Эйлера;  $a - \tau = 0,05$ ;  $b - \tau = 0,1$ ;  $c - \tau = 0,2$ ;  $d - \tau = 0,25$

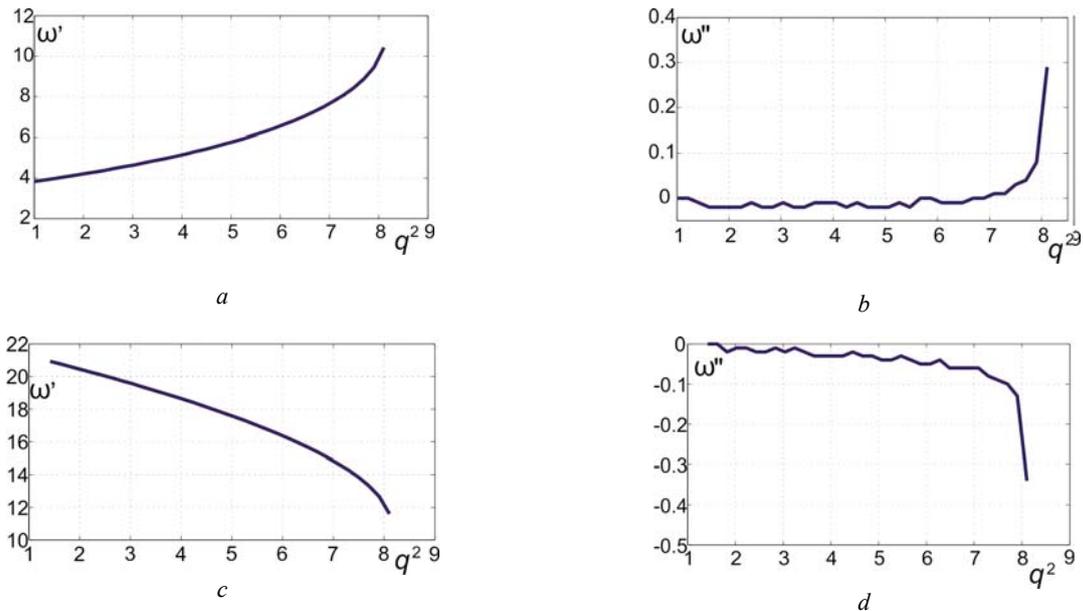


Рис. 4. Частоты колебания при  $\tau = 0,01$ ;  $a$  – действительная часть первой моды;  $b$  – мнимая часть первой моды;  $c$  – действительная часть второй моды;  $d$  – мнимая часть второй моды

После достижения этой нагрузки первая мода становится асимптотически устойчивой, хотя вторая остается в неустойчивом состоянии. По этой причине динамическая потеря устойчивости при запаздывании может происходить при любом значении силы, но при малых  $\tau$  этот процесс может быть достаточно медленным.

Было показано, что колебание стержня под воздействием силы, запаздывающей относительно тангенциального положения, будет всегда динамически неустойчивым. При малых временах запаздывания нарастание амплитуды будет происходить медленно. Показано, что при изменении нагрузки возможна стабилизация первой моды колебания.

#### Библиографические ссылки

1. Николаи Е. Л., Об устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого и скрученного стержня / Изв. Ленингр. политехн. ин-та. Т. 31. 1928. С. 201–231.
2. Beck M., Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes // ZAMM. 1952. Vol. 3. P. 205–208.
3. Timoshenko S. P., Gere J. M. Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, Auckland, 1963. 156 p.
4. Elishakoff I. Controversy associated with the so-called “follower force”: critical overview // Application Mechanics Reviews. 2005. Vol. 58. P. 117–142.
5. Wood W. G., Saw S. S., Saundres P. M. The kinetic stability of a tangentially loaded strut // Proc. R. Soc. London. 1969. Ser. A. Vol. 313. P. 239–248.
6. Sugiyama Y., Langthjem M. A., Ryu B. J. Realistic Follower Forces // J. Sound Vib. 1999. Vol. 205(4). P. 779–782.
7. Ягн И. Ю., Паршин Л. К. Экспериментальное исследование стабильности стержня под действием следящей нагрузки // ДАН СССР. 1969. № 167(1). С. 49–50.
8. Elfelsoufi Z., Azrar L. Integral equation formulation and analysis of the dynamic stability of damped beams subjected to subtangential follower forces // Journal of Sound and Vibration. 2006. Vol. 296. P. 690–713.
9. Celep Z. Dynamic stability of pretwisted columns under periodic axial loads // Journal of Sound and Vibration. 1985. Vol. 103(1). P. 35–42.
10. Datta P. K., Biswas S. Aeroelastic Behaviour of Aerospace Structural Elements with Follower Force: A Review // Intl. J. of Aeronautical & Space Sci. 2011. Vol. 12(2). P. 134–148.

11. Haitao Ma, Eric A. Butcher Stability of elastic columns with periodic retarded follower forces // Journal of Sound and Vibration. 2005. Vol. 286. P. 849–867.

12. The parametrically excited upside-down rod: an elastic jointed pendulum model / J. Gallana, W. B. Fraserb, D. J. Achesonc, A. R. Champneys // Journal of Sound and Vibration. 2005. Vol. 280. P. 359–377.

13. Sugiyama Y., Langthjem M. A., Ryu B. J. Follower Forces // J. Sound Vib. 1999. Vol. 205(4). P. 779–782.

14. Koiter W. T. Unrealistic Follower Forces // J. Sound Vib. 1996. Vol. 174. P. 636–638.

15. Sugiyama Y., Katayama K., Kinoi S. Flutter of cantilevered column under rocket thrust // Journal of Aerospace Engineering. 1995. Vol. 8. P. 9–15.

#### References

1. Nikolai E. L. *Izv. Leningr. politekhn. in-ta*, 1928, vol. 31, p. 201–231.
2. Beck M., Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes, *ZAMM*, 1952, vol. 3, p. 205–208.
3. Timoshenko S. P., and Gere, J. M. Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, Auckland, 1963, 156 p.
4. Elishakoff I., Controversy associated with the so-called “follower force”: critical overview, *Application Mechanics Reviews*, 2005, vol. 58, p. 117–142.
5. Wood W. G., Saw S. S., Saundres P. M. *Proc. R. Soc. London*, 1969, Ser. A., vol. 313, p. 239–248.
6. Sugiyama Y., Langthjem M. A., Ryu B. J. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, vol. 205(4), p. 779–782.
7. Yagn I. Yu. *DAN SSSR.*, 1969, vol. 167(1), p. 49.
8. Elfelsoufi Z., Azrar L. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, vol. 296, p. 690–713.
9. Celep Z., *Journal of Sound and Vibration*, 1985, vol. 103(1), p. 35–42.
10. Datta P. K., Biswas S. *Intl. J. of Aeronautical & Space Sci.*, 2011, vol. 12(2), p.134–148.
11. Haitao Ma, Butcher Eric A. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, vol. 286, p. 849–867.
12. Gallana J., Fraserb W. B., Achesonc D. J., Champneys A. R. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, vol. 280, p. 359–377.
13. Sugiyama Y., Langthjem M. A., Ryu B. J. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, vol. 205(4), p. 779–782.
14. Koiter W. T. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, vol. 174, p. 636–638.
15. Sugiyama Y., Katayama K., Kinoi S. *Journal of Aerospace Engineering*, 1995, vol. 8, p. 9–15.