УДК 517.55

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА*

Е. К. Лейнартас[1], Е. И. Яковлев[2]

[1]Сибирский федеральный университет
Россия, 660041, Красноярск, просп. Свободный, 79. E-mail:lein@mail.ru
[2]Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева
Россия, Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31. E-mail:yei@nm.ru

Рассматривается проблема существования глобальных аналитических решений обобщенной задачи Коши с начально-краевыми условиями типа Рикье, заданными на координатных гиперплоскостях. Использованы как классические методы комплексного анализа, так и относительно новые методы теории амеб алгебраических гиперповерхностей. Доказана разрешимость в классе функций экспоненциального типа краевой задачи для полиномиального дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. Найдена зависимость характеристик роста решений краевой задачи от роста краевых условий и правой части уравнения. Примененные методы могут быть полезны для дальнейших исследований в теории дифференциальных операторов.

Ключевые слова: задача Коши, дифференциальные операторы, интегральные представления, амеба алгебраической гиперповерхности, преобразование Бореля.

ON THE SOLVABILITY OF ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR POLYNOMIAL DIFFERENTIAL OPERATOR IN THE CLASS OF FUNCTIONS OF EXPONENTIAL TYPE

E. K. Leinartas[1], E. I. Yakovlev[2]

[1]Siberian Federal University
79 “Svobodnyi” prosp., Krasnoyarsk, 660041, Russia. E-mail: lein@mail.ru
[2]Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev
31 “Krasnoyarskiy Rabochiy” prosp., Krasnoyarsk, 660014, Russia. E-mail: yei@nm.ru

The work is devoted to the problem of existence of global analytical solutions of the generalized Cauchy problem with initial-boundary conditions of Riquier type, specified on the coordinate hyperplanes. Used as the classic methods of complex analysis, and relatively new methods of the theory of amoebas algebraic hyperplanes. The authors prove the solvability of value problem in the class of functions of exponential type boundary for polynomial differential operator with constant coefficients and reveal the linear connection of the characteristics of the growth of solutions of boundary-value problem from the growth of the boundary conditions and right-hand side of the equation. Research methods can be useful for further research of the theory of differential operators.

Keywords: Cauchy problem, differential operators, integral representations, amoeba of algebraic hypersurface, transformation of Borel.

Различным вариантам Коши–Ковалевской посвящено много работ. В классической ситуации данные Коши задаются на нехарактеристической гиперповерхности и речь идет, как правило, о существовании локальных аналитических решений. О глобальных аналитических решениях известно значительно меньше. Например, в монографии [1] рассматривается задача Коши в комплексной области, в частности вопрос о существовании глобальных решений. В некоторых обобщениях задачи Коши дополнительные условия на решения ставятся на нескольких гиперповерхностях [2–4] и их называют начально-краевыми условиями типа Рикье.

В данной статье рассматривается обобщенная задача Коши для полиномиального дифференциального оператора с постоянными коэффициентами с начально-краевыми условиями типа Рикье, заданными на координатных гиперплоскостях. Доказываются существование и единственность глобального решения этой задачи в классе целых функций экспоненциального типа, указывается связь характеристик роста решения с ростом входных данных задачи (теорема 1). Для доказательства использованы как классические методы комплексного анализа (преобразование Бореля степенных рядов, интегральные представления), так и сравнительно новые методы теории амеб алгебраических гиперповерхностей.

*Работа первого автора поддержана грантом РФФИ 11.01-00852.

1. Введем следующие обозначения $z = (z_1, ..., z_n)$ – точки n-мерного комплексного пространства C^n; $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ – мультииндексы, $\| \alpha \| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1!...\alpha_n!)$, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot z_n^{\alpha_n}$, D_j – оператор дифференцирования по *j*-й переменной, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot D_n^{\alpha_n}$.

В главе 5, посвященной задаче Коши, монографии Л. Хермандера [5] доказывается следующая теорема (теорема 5.1.1).

Теорема. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$D^\beta F = \sum_{\|\alpha\| \le m} c_\alpha(z) D^\alpha F + G, \qquad (1)$$

где коэффициенты $c_\alpha(z)$ суть аналитические функции от $z = (z_1, ..., z_n)$ в окрестности нуля в пространстве C^n; $\| \beta \| = m$. Зададим краевые условия:

$$D_j^k [F - \Phi]\big|_{z_j = 0} = 0, \text{ если } 0 \le k < \beta_j,$$

$$j = 1, \ldots, n. \ (2)$$

Если $\sum_{\|\alpha\| = \|\beta\|} c_\alpha(0)$ меньше некоторого положительного числа, зависящего только от $\| \beta \|$, то тогда для любых функций G и, Φ аналитических в окрестности нуля, краевая задача (1)–(2) имеет, и притом единственное, аналитическое в окрестности нуля решение F.

Отметим, что в (2) содержится $\| \beta \|$ граничных условий и $\| \beta \|$ есть порядок дифференциального уравнения (1).

Частными случаями данной теоремы являются классическая теорема Коши–Ковалевской (если $| \beta = (m, 0, ..., 0)$ и $c_\beta(z) \ne 0$) и теорема Гурса–Бодо [5].

Замечание. Краевую задачу (1)–(2) можно назвать обобщенной задачей Коши с начально-краевыми условиями типа Рикье (см. [2–4]). В данном случае значения искомой функции и ее производных задаются на координатных плоскостях.

Для формулировки глобального варианта теоремы Хермандера о разрешимости задачи (1)–(2) и его доказательства используем некоторые понятия и факты теории амеб алгебраических гиперповерхностей (см. [6]). Обозначим через $\mathbf{Z}$ множество целых чисел и через $\mathbf{Z}^\mathbf{n} = \mathbf{Z} \times \cdots \times \mathbf{Z}$ – n-мерную целочисленную решетку. Пусть $A = \{\alpha\} \subset Z^n$ – некоторое фиксированное конечное множество и $P(z) = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha z^\alpha$ – полином, а $V = \{z \in C^n : P(z) = 0\}$ – множество его нулей.

Многогранником Ньютона N_p многочлена P называется выпуклая оболочка в $\mathbf{R}^\mathbf{n}$ элементов множества А.

Амебой алгебраической гиперповерхности называется образ множества нулей V многочлена $P(z)$ при отображении

$$\mathrm{Log} : z = (z_1, ..., z_n) \to (\log|z_1|, ..., \log|z_n|) = \mathrm{Log}|z|.$$

Заметим, что отображение Log является композицией двух:

$$Abs : z = (z_1, ..., z_n) \to (|z_1|, ..., |z_n|)$$
$$\text{и } \log : (|z_1|, ..., |z_n|) \to (\log|z_1|, ..., \log|z_n|).$$

Множество V, а значит и $\mathrm{Log}(V)$, замкнуто, поэтому его дополнение открыто. Пусть $\{E\}$ – набор непустых связанных компонент дополнения $\mathbf{R}^\mathbf{n} \setminus Log(V)$. Для любой непустой компоненты E_* функция $1/P(z)$ голоморфна в $\mathrm{Log}^{-1} E \subset C^n \setminus V$ и разлагается там в ряд Лорана (см., например, [6]):

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_\beta \frac{a_\beta}{z^\beta},$$

коэффициенты которого можно определить следующим образом:

$$a_\beta = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{z^\beta}{P(z)} \frac{dz}{z},$$

где $\Gamma = \mathrm{Log}^{-1} u, u = (u_1, ..., u_n) \in E$ – остов полицилиндра $\Gamma = \{z \in C^n : |z_j| = e^{u_j}, j = 1, ..., n\}$. Известно, что область сходимости ряда Лорана логарифмически выпукла, т. е. связная компонента E дополнения амебы $\mathrm{Log}(V)$ является выпуклым множеством.

Для $v \in N_p \cap Z^n$ *двойственным конусом* называется множество

$$C_v^V = \{s \in R^n : \langle s, v \rangle = \max_{\alpha \in N_p} \langle s, \alpha \rangle\}.$$

Существует инъективная функция v из множества компонент связности $v : \{E\} \to Z^n \cap N_p$ такая, что двойственный конус $C_{v(E)}^V$ есть асимптотический конус для выпуклой компоненты E.

Приведем некоторые сведения из теории целых функций (см., например, [7]).

Целая функция $F(z)$ называется *функцией экспоненциального типа*, если она удовлетворяет неравенству

$$|F(z)| \le M \exp\langle a, |z| \rangle \qquad (3)$$

для некоторых $M > 0$, где $a \in R_+^n$, $x \in R^n$, $x_j \ge 0$, $|z| = (|z_1|, ..., |z_n|)$, $\langle a, |z| \rangle = a_1 |z_1| + ... + a_n |z_n|$.

Множество тех точек $a \in R_+^n$, для которых при фиксированной целой функции $F(z)$ справедливо неравенство (3), будем обозначать σ_F и называть *тип-множеством функции* $F(z)$.

Отметим, что открытое ядро $\mathring{\sigma}_F$ множества σ_F является выпуклым множеством и R_+^n является асимптотическим конусом для $\mathring{\sigma}_F$.

Будем рассматривать полиномиальные дифференциальные операторы $P(D)$ с постоянными коэффициентами со следующим условием на многогранник Ньютона N_p характеристического многочлена $P(z) = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha z^\alpha$: существует вершина $m \in N_p$ такая, что $\alpha \le m$ для всех $\alpha \in N_p$. Здесь неравенство $\alpha \le m$ означает, что $\alpha_j \le m_j$ для всех $j = 1, ..., n$.

При выполнении данного условия соответствующая компонента E_m дополнения амебы $R^n \setminus A_p$ не пуста и двойственный конус C_V^m содержит R_+^n.

Теорема 1. Если функция $\Phi(z)$, задающая краевые условия (2), и правая часть $G(z)$ уравнения (1) являются функциями экспоненциального типа с тип-множествами σ_Φ и σ_G соответственно, то решение $F(z)$ также является функцией экспоненциального типа, тип-множество которой $\mathring{\sigma}_F$ удовлетворяет условию $\mathring{\sigma}_F \supset \mathring{\sigma}_\Phi \cap \mathring{\sigma}_G \cap \mathrm{Abs}(\mathrm{Log}^{-1} E_m)$.

2. Для доказательства теоремы 1 нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Преобразованием Бореля функции экспоненциального типа

$$F(z) = \sum_{x\ge 0} \frac{f(x)}{x!} z^x, \quad x! = x_1! \cdots x_n!$$

называется функция

$$\hat{F}(z) = \sum_{x\ge 0} \frac{f(x)}{z^{x+I}},$$

где $I = (1,...,1)$.

Взаимосвязь между ростом целой функции $F(z)$ и сопряженными радиусами сходимости ассоциированной по Борелю функции $\hat{F}(z)$ устанавливает теорема Бореля. Необходимые понятия и доказательство приведены в монографии Л. И. Ронкина [7].

Теорема Бореля. Гиперповерхность сопряженных типов при сопряженных порядках $(1, ..., 1)$ целой функции $F(z)$ совпадает с гиперповерхностью сопряженных радиусов сходимости ряда, определяющего ее преобразования по Борелю $\hat{F}(z)$.

В частности, теорема Бореля означает, что открытое ядро тип-множества $\mathring{\sigma}_F$ совпадает с областью сходимости ряда функции $\hat{F}(z)$.

Лемма 1. Если решение $F(z)$, правая часть $G(z)$ и функция $\Phi(z)$, задающая краевые условия в задаче (1)–(2), являются функциями экспоненциального типа:

$$F(z) = \sum_{x\ge 0} \frac{f(x)}{x!} z^x, \quad G(z) = \sum_{x\ge 0} \frac{g(x)}{x!} z^x,$$

$$\Phi(z) = \sum_{x\ge 0} \frac{\varphi(x)}{x!} z^x,$$

то коэффициенты $f(x)$ ряда для $F(z)$ удовлетворяют разностному уравнению

$$\sum_{0\le\alpha\le m} a_\alpha f(x+\alpha) = g(x),\ x \ge 0 \tag{4}$$

и краевым условиям

$$f(x) = \varphi(x),\ \ 0 \le x,\ \ x \not\ge m. \tag{5}$$

Здесь $x \not\ge m$ означает, что для некоторого j_0 $\alpha_{j_0} < m_{j_0}$.

Доказательство. Подставляя в (1)–(2) разложения функций F, G, Φ в степенные ряды и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z^x, поле стандартных выкладок получим (4)–(5).

Разрешимость задачи (4)–(5) и формулы для решения приведены в [8].

С точки зрения теории разностных уравнений ассоциированная по Борелю функция $\hat{F}(z)$ является производящей функцией решения $f(x)$ разностного уравнения. Соответственно ассоциированные по Борелю функции $\hat{G}(z)$ и $\hat{\Phi}(z)$ – производящие функции соответственно правой части $g(x)$ уравнения (4) и функции $\varphi(x)$, задающей краевые условия (4).

Лемма 2. Для производящей функции $\hat{F}(z)$ решения $f(x)$ разностной задачи (4)–(5) справедлива формула

$$\hat{F}(z) = \left(\sum_{0\le\alpha\le m} c_\alpha z^\alpha \hat{\Phi}_\alpha(z)\right)\frac{1}{P(z)} + \hat{G}(z)\frac{1}{P(z)},$$

где $\hat{\Phi}_\alpha(z) = \sum_{x\not\ge\alpha} \frac{\varphi(x)}{z^{x+I}}$.

Доказательство. Поделим равенства (4) на z^{x+I} и просуммируем по всем $x \ge 0$:

$$\sum_{x\ge 0}\left(\sum_{0\le\alpha\le m} c_\alpha \frac{f(x+\alpha)}{z^{x+I}}\right) = \sum_{x\ge 0}\frac{g(x)}{z^{x+I}} = \hat{G}(z).$$

Меняя в левой части равенства порядок суммирования, получим:

$$\sum_{0\le\alpha\le m} c_\alpha z^\alpha \left(\sum_{x\ge 0}\frac{f(x+\alpha)}{z^{x+I+\alpha}}\right) =$$

$$= \sum_{0\le\alpha\le m} c_\alpha z^\alpha \left(\hat{F}(z) - \sum_{x\not\ge\alpha}\frac{f(x+\alpha)}{z^{x+I}}\right) =$$

$$= P(z)\hat{F}(z) - \sum_{\alpha\not\ge m} c_\alpha z^\alpha \left(\hat{\Phi}_\alpha(z)\right),$$

где $\hat{\Phi}_\alpha(z) = \sum_{0\le x, x\not\ge\alpha} \frac{\varphi(x)}{z^{x+I}}$ – частичная сумма ряда $\hat{\Phi}(z)$.

Таким образом,

$$P(z)\hat{F}(z)-\sum_{0\le\alpha\le m} c_\alpha z^\alpha\left(\hat{\Phi}_\alpha(z)\right)=\hat{G}(z)$$

или

$$\hat{F}(z)=\sum_{0\le\alpha\le m} c_\alpha z^\alpha\hat{\Phi}_\alpha(z)\frac{1}{P(z)}+\frac{\hat{G}(z)}{P(z)}.$$

Известны также интегральные представления, связывающие функции F и $\hat{F}$, ассоциированные по Борелю (см., например, [7]):

$$F(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\iint_\Gamma \hat{F}(\xi)\exp\langle z,\xi\rangle d\xi,$$

где Γ – остов полицилиндра, $\Gamma:=\left\{\xi\in C^n:\left|\xi_j\right|=R_j,\ j=1,...,n\right\}$; $R=(R_1,...,R_n)\in\mathring{\sigma}_F$, $\langle z,\xi\rangle=z_n\xi_1+...+z_n\xi_n$; $d\xi=d\xi_1\wedge...\wedge d\xi_n$.

Учитывая лемму 2, в случае экспоненциальных входных данных получаем следующее интегральное представление для решения задачи (1)–(2):

$$F(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\Gamma\frac{\sum_{\|\alpha\|\ge 0} c_\alpha\xi^\alpha\hat{\Phi}_\alpha(\xi)\exp\langle z,\xi\rangle d\xi}{P(\xi)}+ \\ +\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\Gamma\frac{\hat{G}(\xi)\exp\langle z,\xi\rangle d\xi}{P(\xi)}, \quad (6)$$

где $\Gamma=\left\{\left|z_j\right|=R_j\,j=1,...,n\right\}$; $R=(R_1,...,R_n)\in\sigma_\Phi\cap\sigma_G$ и $\mathrm{Log}R\in E_m$.

Доказательство теоремы 1. Тип-множества σ_Φ и σ_G выпуклы и октантообразны (см. [7]), т. е. положительный октант R_+^n является дли них асимптотическим конусом. Этим же свойством обладает и компонента E_m амебы характеристического многочлена $P(z)$. Поэтому пересечение $\mathring{\sigma}_\Phi\cap\mathring{\sigma}_G\cap AbsLog^{-1}E_m\neq\varnothing$. Возьмем $R=(R_1,...,R_n)$ из этого пересечения, тогда остов $\Gamma=\left\{\xi\in C^n;\left|\xi_j\right|=R_j\,j=1,...,n\right\}$ лежит в области, где голоморфны функции $\hat{\Phi}_\alpha$, $\hat{G}$ и $1/P(\xi)$ (здесь используется тот факт, что ряды $\hat{\Phi}(\xi)$, $\hat{G}(\xi)$ сходятся в $\mathring{\sigma}_\Phi$ и $\mathring{\sigma}_G$), поэтому для $F(z)$ справедливо интегральное представление (6), которое означает, что $F(z)$ – функция экспоненциального типа.

Стандартная оценка интеграла показывает, что $R=(R_1,...,R_n)\in\mathring{\sigma}_F$, таким образом $\mathring{\sigma}_\Phi\cap\mathring{\sigma}_G\cap\cap\mathrm{AbsLog}^{-1}E_m\subset\mathring{\sigma}_F$

Библиографические ссылки

1. Дубинский Ю. А. Задача Коши в комплексной области. М. : Изд-во Моск. энерг. ин-та, 1996.
2. Riquier C. Les systemes d'equations aux derivees partielles. Paris : Gauthier-Villars, 1910.
3. Гюнтер Н. М. О распространении теоремы Коши на любую систему уравнений в частных производных // Мат. сб. 1925. Т. 32, № 2. С. 367–447.
4. Казаков А. Л. Обобщенная задача Коши с данными на двух поверхностях для квазилинейной аналитической системы // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1041–1055.
5. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М. : Мир, 1965.
6. Forsberg M., Passare M., Tsikh A. Laurent Determinants and Arrangements of of Hyperplane Amoebas // Advances in Mathematics. 2000. Vol. 151. P. 45–70.
7. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М. : Наука, 1971.
8. Лейнартас Е. К. Устойчивость задачи Коши для многомерного разностного оператора и амеба характеристического множества // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 5. С. 864–870.

References

1. Dubinsky Y. A. *Zadacha Koshi v kompleksnoy oblasti* (Cauchy problem in a complex domain). Moscow, MEI, 1996, 180 p.
2. Riquier C. Les systemes d'equations aux derivees partielles. Paris, Gauthier-Villars, 1910.
3. Gunther N. M. *Mat. Sb.*, 1925, vol. 32, no. 2, pp. 367–447.
4. Kazakov A. L. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2007, vol. 48, no. 5, pp. 1041–1055.
5. Hermander L. *Lineynyye differentsial'nyye operatory s chastnymi proizvodnymi* (Linear differential operators with partial derivatives). Moscow, Mir, 1965, 380 p.
6. Forsberg M., Passare M., Tsikh A Laurent Determinants and Arrangements of of Hyperplane Amoebas. *Advances in Math*. 2000, vol. 151, pp. 45–70.
7. Ronkin L. I. *Vvedeniye v teoriyu tselykh funktsiy mnogikh peremennykh* (Introduction to the theory of entire functions of several variables). Moscow, Nauka, 1971, 430 p.
8. Leĭnartas E. K. *Sibirsk. Mat. Zh.,* 2011, vol. 52, no. 5, pp. 1087–1095.