УДК 539.3

ТОНКАЯ КРУГОВАЯ ПЛАСТИНА ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ ГРАВИТАЦИОННОГО ТИПА*

Ю. В. Захаров[1,2], К. Г. Охоткин[1], А. В. Пашковский[2], А. Д. Скоробогатов[2], И. В. Уваев[1]

[1]Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева
Россия, 660014, Красноярск, просп. им. газеты «Красноярский рабочий», 31, E-mail: yuzakharov@mail.ru
[2]Сибирский государственный технологический университет
Россия, 660049, г. Красноярск, просп. Мира, 82. E-mail: yuzakharov@mail.ru

Задача об устойчивости оболочек наряду с задачей об изгибе стержней являются всегда актуальной проблемой механики деформируемого твердого тела, особенно применительно к авиационно-ракетной технике. Основными типовыми элементами применяемых в устройствах исполнительной автоматики космических аппаратов являются гибкие пластины и оболочки. В этой работе рассмотрена задача изгиба тонкой круговой пластины под действием постоянной распределенной нагрузки гравитационного типа. Получено нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, описывающее такой изгиб. Построено приближенное аналитическое решение поставленной задачи с учетом геометрической нелинейности. Решение найдено при условии малости прогиба по сравнению с радиусом пластины. Построены формы изогнутой пластины.

Ключевые слова: гравитационная нагрузка, изгиб пластины, геометрическая нелинейность.

THIN CIRCULAR PLATE UNDER A UNIFORMLY DISTRIBUTED LOAD OF THE GRAVITATIONAL TYPE

Yu. V. Zakharov[1,2], K. G. Okhotkin[1], A. V. Pashkovsky[2], A. D. Skorobogatov[2], I. V. Uvaev[1]

[1]Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev
31 “Krasnoyarskiy Rabochiy” prosp., Krasnoyarsk, 660014, Russia. E-mail: yuzakharov@mail.ru
[2]Siberian State Technological University
82 Mira prosp., Krasnoyarsk, 660049, Russia. E-mail: yuzakharov@mail.ru

The problem of stability of shells and the problem of bending of columns are always relevant topics of the mechanics of deformable body, especially in the field of aviation and missile technology. The most common types of elements that are used in the automatic actuators of spacecrafts are flexible plates and shells. This article demonstrates an approach to the problem of bending of the thin circular plate under the constant distributed load of the gravitational type. The problem is presented in the form of nonlinear integral-differential equation that describes such bending. An approximate analytical solution that takes into account the geometric nonlinearity has been derived. The solution has been found under the condition that the deflection is sufficiently smaller than the radius of the plate. The shapes of the bent plate have been built.

Keywords: load of the gravitational type, bent plate, geometrical nonlinearity.

В авиационной, ракетной, кораблестроительной и других областях промышленности всегда большое внимание привлекают проблемы устойчивости и колебаний различных конструкций: оболочек, мембран, стержневых систем и т. д.

Гибкие пластины и оболочки являются типовыми элементами микроэлектромеханических систем, применяемых в устройствах исполнительной автоматики космических аппаратов. Задача об устойчивости оболочек наряду с задачей об изгибе стержней являются всегда актуальной проблемой механики деформируемого твердого тела.

В работах [1–3] даётся общая методика исследования задач изгиба оболочек. В работах [4] и [5] методом стрельбы решается задача изгиба круглой мембраны при радиальном сжатии. В работе [6] решение задачи о радиальном сжатии круглой пластины решается в аналитическом виде. Работа [7] посвящена численному анализу задачи об изгибе круглой мембраны из ферроэласта в однородном магнитном поле. В настоящей работе предметом исследования является изгиб тонкой круговой пластины под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки постоянного направления.

*Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки РФ, соглашение 14.B37.21.0405 «Моделирование композитных элементов крупногабаритных трансформируемых механических систем космических аппаратов связи и телекоммуникаций», государственный контракт №14.513.11.0117.

Исследование изгиба круговой пластины под действием гравитационной нагрузки. Рассмотрим круговую пластину под действием распределенной нагрузки, направленной перпендикулярно её плоскости и сохраняющей свое направление. Для записи уравнений равновесия используем цилиндрическую систему координат, как показано на рис. 1.

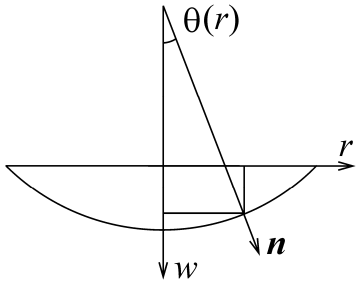

Рис. 1. Система координат

Исследование проводится в геометрически нелинейном случае, то есть $\frac{dr}{dl} = \cos\theta$, где r – радиальная координата, l – криволинейная длина, отсчитываемая от оси w, θ – угол наклона касательной к полярной оси.

В заданной системе координат система уравнений равновесия сил и моментов будет выглядеть следующим образом

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dl}\left(rF_r\right) - \frac{F_\varphi}{r} = 0 \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dl}\left(rF_z\right) = q \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dl}\left(rM_r\right) - \frac{\cos\theta}{r}M_\varphi = -F_r\sin\theta + F_z\cos\theta \end{cases}, \quad (1)$$

где F_r – погонная (на единицу длины) сила в радиальном направлении, F_φ – погонная трансверсальная сила, F_z – погонная сила в аксиальном направлении, q = const – поверхностная плотность внешней распределенной нагрузки, M_r и M_φ – соответственно погонные радиальный и трансверсальный изгибающие моменты.

Преобразуем третье уравнение системы (1). Для этого применим закон Гука для линейно упругого материала

$$M_r = D\left(\kappa_r + \mu\kappa_\varphi\right), \quad M_\varphi = D\left(\kappa_\varphi + \mu\kappa_r\right),$$

где $D = Eh^3/12(1-\mu)$ – цилиндрическая жесткость; h – толщина пластины; R – радиус; E – модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона; κ_r и κ_φ – соответственно главные радиальная и трансверсальная кривизны изогнутой поверхности пластины. Далее, учитывая соотношения для кривизн

$$\kappa_r = \cos\theta\frac{d\theta}{dr}, \quad \kappa_\varphi = \frac{\sin\theta}{r},$$
$$\kappa_r + \kappa_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\sin\theta\right),$$

получаем

$$\begin{cases} \frac{\cos\theta}{r}\frac{d}{dr}\left(rF_r\right) - \frac{F_\varphi}{r} = 0 \\ \frac{\cos\theta}{r}\frac{d}{dr}\left(rF_z\right) = q \\ D\frac{d}{dl}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\sin\theta\right)\right) = -F_r\sin\theta + F_z\cos\theta \end{cases}. \quad (2)$$

Интегрируя первые два уравнения системы (2), имеем

$$F_r = \frac{1}{r}\int F_\varphi dl + \frac{C_1}{r}$$
$$F_z = \frac{1}{r}\int\frac{qrdr}{\cos\theta} + \frac{C_2}{r}. \quad (3)$$

Подставим (3) в третье уравнение системы (2), вынося общий множитель $1/r$ за скобки, получим

$$D\frac{d}{dl}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\sin\theta\right)\right) = $$
$$= \frac{1}{r}\left[-\left(\int F_\varphi dl + C_1\right)\sin\theta + \left(\int\frac{qrdr}{\cos\theta} + C_2\right)\cos\theta\right]. \quad (4)$$

При отсутствии внешней нагрузки, сосредоточенной по краю, в пластине в точке $r = R$ усилия равны 0, значит $F_r(R) = 0$ и $F_z(R) = 0$, поэтому $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$. Используем следующее стандартное выражение для трансверсальной силы и соотношение между радиальным и трансверсальным продольными напряжениями

$$F_\varphi = h\sigma_\varphi,$$
$$\sigma_\varphi = \cos\theta\frac{d}{dr}\left(\frac{r\sigma_r}{\cos\theta}\right).$$

Радиальное напряжение направлено вдоль касательной, поэтому, как видно из рис. 1

$$\sigma_r = q\sin\theta,$$
$$\sigma_\varphi = q\frac{d}{dl}\left(r\,\mathrm{tg}\,\theta\right),$$
$$\int F_\varphi dl = \int hq\frac{d}{dl}\left(r\,\mathrm{tg}\,\theta\right)dl = hq\int\frac{d}{dl}\left(r\,\mathrm{tg}\,\theta\right)dl = hqr\,\mathrm{tg}\,\theta.$$

Подставляя полученное выражение в (4), получаем, учитывая, что $dr = \cos\theta dl$

$$D\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\sin\theta\right)\right) = \frac{1}{r}\left[-hqr\,\mathrm{tg}^2\,\theta + \int\frac{qrdr}{\cos\theta}\right]. \quad (5)$$

Раскрывая скобки в левой части уравнения (5), получим интегро-дифференциальное уравнение

$$D\frac{d^2\sin\theta}{dr^2} + D\frac{1}{r}\frac{d\sin\theta}{dr} -$$
$$- D\frac{\sin\theta}{r^2} + hqr\,\mathrm{tg}^2\,\theta = \frac{1}{r}\int\frac{qrdr}{\cos\theta}. \quad (6)$$

Построим далее приближенное аналитического решение нелинейного уравнения (6) в предположении малости прогиба пластины. Будем считать, что угол наклона касательной θ изменяется очень медленно, следовательно, cosθ под знаком интеграла мало отличается от 1. В свою очередь, r меняется от 0 до R, тем самым определяя поведение подынтегральной функции. Поэтому в интегральном члене можно воспользоваться теоремой о среднем и положить $\cos\theta = 1$. После такого упрощения мы получим дифференциальное уравнение

$$D\frac{d^2\sin\theta}{dr^2}+D\frac{1}{r}\frac{d\sin\theta}{dr}-D\frac{\sin\theta}{r^2}+hqr\sin^2\theta=\frac{qr}{2},$$

или, объединяя первые два слагаемых, получим

$$D\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\sin\theta}{dr}\right)-D\frac{\sin\theta}{r^2}+hqr\sin^2\theta=\frac{qr}{2}. \quad (7)$$

Уравнение имеет ядро r и, следовательно, особую точку при $r = 0$. Поэтому в центре пластины ставится условие ограниченности решения.

Обезразмерим уравнение (7), произведя замену $x = r / R$, имеем

$$DR^2\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{d\sin\theta}{dx}\right)-DR^2\frac{\sin\theta}{x^2}+\frac{hqx\sin^2\theta}{R}=\frac{qx}{2R},$$

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{d\sin\theta}{dx}\right)-\frac{\sin\theta}{x^2}+\frac{hqx\sin^2\theta}{DR^3}=\frac{qx}{2DR^3}.$$

Введем новый безразмерный параметр нагрузки $k \equiv q/(DR^3)$, тогда уравнение преобразуется к виду

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{d\sin\theta}{dx}\right)-\frac{\sin\theta}{x^2}+hkx\sin^2\theta=\frac{k}{2}x. \quad (8)$$

Граничные условия при жестком закреплении по контуру имеют вид

$$\left|\theta(0)\right|<\infty, \qquad \theta(1)=0 \quad (9)$$

Так как прогиб пластины мал, можно считать, что $\sin\theta >> \sin^2\theta$. Из того, что $0 \le x \le 1$, следует $\frac{\sin\theta}{x^2} >> hkx\sin^2\theta$, значит, можно положить $hkx\sin^2\theta = 0$, тогда уравнение (8) приводится к виду

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{d\sin\theta}{dx}\right)-\frac{\sin\theta}{x^2}=\frac{k}{2}x,$$

$$\left|\theta(0)\right|<\infty, \qquad \theta(1)=0.$$

Обозначая для простоты записи $\sin\left(\theta(x)\right)=y(x)$, и раскрывая скобки, получаем линеаризованное уравнение

$$x^2y''+xy'-y=\frac{k}{2}x^3. \quad (10)$$

Решение его найдем методом вариации произвольных постоянных, для этого решим однородное уравнение, соответствующее (10)

$$x^2y''+xy'-y=0. \quad (11)$$

Решение его пишется сразу

$$y=C_1x+\frac{C_2}{x}. \quad (12)$$

Считая C_1 и C_2 зависящими от x, подставим (11) в (9), тогда получаем систему уравнений

$$C_1'x+\frac{C_2'}{x}=0, \quad C_1'-\frac{C_2'}{x^2}=\frac{k}{2}x. \quad (13)$$

Разделим первое уравнение (13) на x и сложим со вторым, затем умножим второе уравнение на $-x$ и сложим с первым. Получим

$$C_2'=-\frac{k}{4}x^3, \quad C_1'=\frac{k}{4}x. \quad (14)$$

Следовательно,

$$C_2=-\frac{k}{16}x^4+C_{20}, \quad C_1=\frac{k}{8}x^2+C_{10}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (10), имеем окончательно

$$\sin\theta=C_{10}x+\frac{C_{20}}{x}+\frac{k}{16}x^3. \quad (16)$$

Ввиду первого граничного условия (9), $C_{20} = 0$. Применяя второе условие (9), получаем

$$C_{10}=-\frac{k}{16}. \quad (17)$$

Тогда

$$\sin\theta=\frac{k}{16}\left(x^3-x\right). \quad (18)$$

Криволинейная длина и прогиб определяются по формулам

$$l(r)=\int_0^r\frac{dr}{\sqrt{1-\sin^2\theta(r)}}, \quad w(r)=-\int_r^R\frac{\sin^2\theta(r)dr}{\sqrt{1-\sin^2\theta(r)}}. \quad (19)$$

С учетом (17), выражения (18) принимают вид

$$l(r)=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-k_1^2\left(x^3-x\right)^2}},$$

$$w(r)=-\int_x^1\frac{k_1^2\left(x^3-x\right)^2dx}{\sqrt{1-k_1^2\left(x^3-x\right)^2}}. \quad (20)$$

Здесь введено обозначение $k_1 = k/16$. Построенное решение (20) соответствует первой моде статического нагружения пластины.

Из условия неотрицательности подкоренного выражения в интегралах (20) следует, что максимальное значение $k_1 \approx 2{,}5$. Так как в данной работе рассматривались малые прогибы, то мы ограничились значениями $k_1 < 1$. При этом прогиб не превосходит значения 0,1.

Формы изогнутой пластины приведены на рис. 2. Величина внешней нагрузки q, геометрические и физические параметры пластины и параметр k_1 связаны соотношением $16k_1 = q/(DR^3)$

Построенные решения качественно совпадают с численными решениями Л. И. Шкутина и уточняют известные приближенные аналитические решения [1–3].

В работе проведено исследование изгиба тонкой круговой пластины, находящейся под действием постоянной равномерно распределенной нагрузки гравитационного типа. При условии малости величины прогиба по сравнению с радиусом самой пластины построено уточненное приближенное аналитическое решение поставленной задачи с учетом геометрической нелинейности.

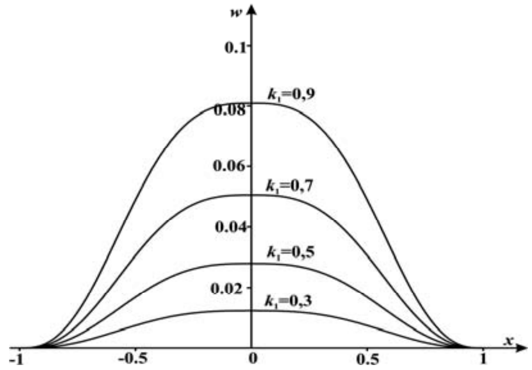

Рис. 2. Формы изгиба тонкой круговой пластины при различных значениях безразмерной нагрузки k_1. Масштаб по осям 1:10

Библиографические ссылки

1. Рекач В. Г., Кривошапко С. Н. Расчет оболочек сложной геометрии. М. : Изд-во УДН, 1988. 176 с.

2. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М. : Наука, 1967. 984 с.

3. Феодосьев В. И. К расчету хлопающей мембраны // ПММ – 1922. Т. X, № 2. С. 295–300.

4. Шкутин Л. И. Численный анализ осесимметричных форм выпучивания радиально сжатой пластины // Изв. Вузов / Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. Спецвыпуск: Нелинейные проблемы механики сплошных сред. Ростов н/Д : Изд-во Ростов. ун-та, 2003. С. 299–304.

5. Шкутин Л. И. Численный анализ осесимметричных форм выпучивания пластин при радиальном сжатии // ПМТФ – 2004. Т. 45, №1. С. 107–114.

6. Захаров Ю. В., Охоткин К. Г., Устойчивость тонкой круговой пластины при радиальном сжатии // ДАН – 2001 г. Т. 377, № 6. С. 764–768.

7. Алексеева Е. И., Горбунов А. И., Крамаренко Е. Ю., Левина Е. Ф., Райхер Ю. Л., Степанов Г. В. Столбов О. В. Деформация плоской мембраны из ферроэласта, закрепленной по ободу, в однородном магнитном поле // Зимняя школа по механике сплошных сред – 2007. Ч. 1. С. 31–34.

References

1. Rekach V. G., Krivoshapko S. N. *Raschet obolochek slozhnoy geometrii* (Calculation of shells of complex geometry). Moscow, Izd-vo UDN., 1988. 176 p.

2. Vol'mir A. S. Ustoychivost' deformiruemykh system (Stability of deformable systems). Moscow, Nauka, 1967. 984 p.

3. Feodos'ev V. I. *PMM*, 1922. vol. X, no. 2, pp. 295–300.

4. Shkutin L. I. *Izv. Vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki. Spetsvypusk: Nelineynye problemy mekhaniki sploshnykh sred.* Rostov-na-Donu, 2003, pp. 299–304.

5. Shkutin L. I. *PMTF*, 2004, vol. 45, no. 1, pp. 107–114.

6. Zakharov Yu.V., Okhotkin K.G. *DAN*, 2001, vol. 377, no. 6, pp. 764–768.

7. Alekseeva E. I., Gorbunov A. I., Kramarenko E. Yu., Levina E. F., Raykher Yu. L., Stepanov G. V., Stolbov O. V. *Zimnyaya shkola po mekhanike sploshnykh sred*, 2007, ch. 1. pp. 31–34.

УДК 802:378.4

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НОВЫХ ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ОБУЧЕНИИ ИНОСТРАННЫМ ЯЗЫКАМ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Н. В. Ивлева, Е. В. Фибих

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева
Россия, 660014, Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31
E-mail: natalie_ivleva@mail.ru, fibichev@mail.ru

Рассматриваются новые методы повышения эффективности преподавания иностранных языков студентам технических специальностей с использованием информационно-коммуникационных технологий, а также их практическое применение на базе Ресурсного центра иностранных языков Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М. Ф. Решетнёва. Внедрение информационно-коммуникационных технологий в учебный процесс основывается на языковой образовательной самостоятельности студентов, что способствует более продуктивному развитию языковой компетенции у студентов и будущих специалистов в определенной отрасли технических знаний в целом.

Ключевые слова: информационно-коммуникационные технологии, Интернет, информация, образование, дистанционное обучение, языковая компетенция, образовательная самостоятельность.