

УДК 532.516

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДВУМЕРНОГО СЛОЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ*

Д. А. Краснова

Институт вычислительного моделирования СО РАН
Российская Федерация, 660036, Красноярск, Академгородок, 50/44. E-mail: krasnova-d@mail.ru

Исследованы групповые свойства уравнений движения двумерного слоя идеальной жидкости относительно функции, описывающей толщину слоя жидкости под свободной границей. Уравнения записаны в модифицированных переменных, что позволило зафиксировать границы области по новой переменной ξ . Поставлена задача группового анализа, найден продолженный оператор на первые производные, используя критерий инвариантности, построены определяющие уравнения и найдены преобразования эквивалентности для системы уравнений (1)–(4). Преобразования эквивалентности – это такие преобразования, которые сохраняют структуру исходной системы уравнений. Доказано, что преобразования эквивалентности для системы (5)–(8) имеют структуру бесконечномерной группы преобразований. Данная задача имеет прикладное значение для нахождения точных решений систем дифференциальных уравнений вида (1)–(4).

Ключевые слова: групповой анализ, идеальная жидкость.

TRANSFORMATIONS OF THE EQUIVALENCE OF THE MOVEMENT EQUATIONS OF A TWO-DIMENSIONAL LAYER OF IDEAL LIQUID

D. A. Krasnova

Institute computational modeling SB RAS
50/44, Academgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation. E-mail: krasnova-d@mail.ru

Group properties of the equations of the movement of a two-dimensional layer of ideal liquid concerning the function describing thickness of a layer of liquid under free border are investigated. The equations are written down in the modified variables that allowed to record area borders on a variable. The task of the group analysis is set, the continued operator on the first derivatives is found, using the criterion of invariancy, the defining equations are constructed and equivalence transformations for system of the equations (1)–(4) are found. Transformations of equivalence are such transformations which keep structure of initial system of the equations. It is proved that the equivalence transformations for the system (5)–(8) have the structure of the infinite-dimensional group of transformations. This task has applied the value for finding of exact decisions of systems of the differential equations of a look (1)–(4).

Keywords: Group analysis, ideal liquid.

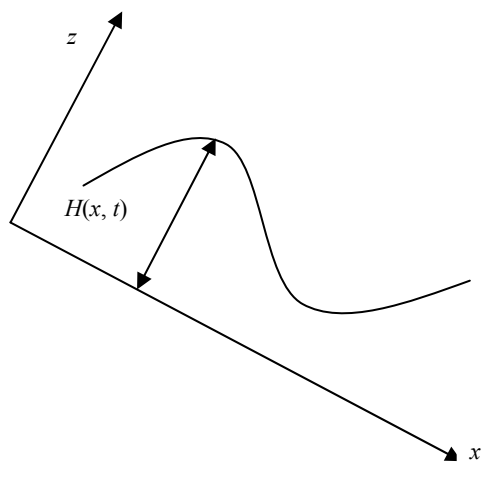
Описание системы уравнений. Многие исследователи нелинейных уравнений давно используют групповой анализ дифференциальных уравнений. Так как принципы инвариантности закладываются при выводе уравнений, применение группового анализа особенно эффективно и плодотворно в области фундаментальной механики и физики [1–4].

В последнее время особо актуальным стало исследование задач математического моделирования разнообразных физических процессов. Главной целью группового анализа является построение точных решений дифференциальных уравнений. На пути построения этих решений важной частью задачи является нахождение преобразований эквивалентности для заданной системы уравнений. В данной работе получены преобразования эквивалентности для системы уравнений, описывающей двумерное движение иде-

альной жидкости, записанных в модифицированных переменных.

Рассмотрим систему уравнений движения двумерного слоя идеальной жидкости по наклонной плоскости. Уравнения запишем в декартовой системе координат так, чтобы ось z была ортогональна к подложке, а ось x направлена в сторону действия скатывающей силы. Жидкость занимает область $\Omega = \{(x, z) : -\infty < x < +\infty, 0 < z < H(x, t)\}$, где t – время; H – толщина слоя жидкости. В уравнения движения жидкости входят компоненты вектора скорости (u, w) , p – давление (скатывающие силы заменой переменных можно включить в давление). Слой жидкости имеет твердую подложку при $z = 0$ и свободную границу при $z = H(x, t)$ (см. рисунок).

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 11–01–00238.



Движение двумерного слоя жидкости толщины H по наклонной плоскости

Рассмотрим систему уравнений движения двумерного слоя идеальной жидкости по наклонной плоскости. Уравнения запишем в декартовой системе координат так, чтобы ось z была ортогональна к подложке, а ось x направлена в сторону действия скатывающей силы. Жидкость занимает область $\Omega = \{(x, z) : -\infty < x < +\infty, 0 < z < H(x, t)\}$, где t – время; H – толщина слоя жидкости. В уравнения движения жидкости входят компоненты вектора скорости (u, w) , p – давление (скатывающие силы заменой переменных можно включить в давление). Слой жидкости имеет твердую подложку при $z = 0$ и свободную границу при $z = H(x, t)$ (см. рисунок).

В дальнейшем вводятся новые координаты

$$\bar{t} = t, \quad \bar{x} = x, \quad \xi = \frac{z}{H(x, t)},$$

модифицированные компоненты вектора скорости и давление [5]:

$$\bar{u} = uH, \quad \bar{w} = w - u\xi H_x, \quad \bar{p} = p.$$

Это позволяет фиксировать границы области по ξ , $\Omega = \{(x, \xi) : -\infty < x < +\infty, 0 < \xi < 1\}$. Система уравнений в новых переменных записывается в виде (черту над переменными опускаем)

$$\rho[Hu_t - H_t(u + \xi u_\xi) + uu_x + wu_\xi - \frac{H_x(u)^2}{H}] = H^2[-p_x + \frac{\xi H_x}{H} p_\xi], \quad (1)$$

$$\rho[H(w+S)_t - \xi H_t(w+S)_\xi + u(w+S)_x + w(w+S)_\xi] = -p_\xi, \quad (2)$$

$$u_x + w_\xi = 0, \quad (3)$$

$$H_\xi = 0, \quad (4)$$

где ρ – плотность жидкости (ее можно положить равной единице); $S = (\xi u^1 H_x)/H$; нижние индексы обозначают дифференцирование по x, ξ, t функций u, w, p . Функция $H(x, t)$ и ее производные существенно входят в уравнения (1)–(4), которые образуют замкнутую систему относительно u, w, p .

Решение определяющих уравнений. Поставим задачу группового анализа для уравнений (1)–(4). Необходимо найти преобразования эквивалентности для этой системы уравнений. Преобразования эквивалентности – это преобразования, которые сохраняют структуру исходной системы уравнений [1].

Введем индексные обозначения:

$$x^1 = x, \quad x^2 = \xi, \quad x^3 = t,$$

$$u^1 = u, \quad u^2 = w, \quad u^3 = p, \quad u^4 = H.$$

Будем считать, что если $f(x^1, x^2, x^3)$ – некоторая функция, то

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}, \quad \dots, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Система уравнений (1)–(4) перепишется в индексных обозначениях так:

$$Hu_3^1 - H_3(u^1 + x^2 u_2^1) + u^1 u_1^1 + u^2 u_2^1 - \frac{1}{H} H_1(u^1)^2 + H^2 u_1^3 - x^2 H H_1 u_1^3 = 0, \quad (5)$$

$$Hu_3^2 + x^2(u_3^1 H_1 + u^1 H_{13} - \frac{1}{H} u^1 H_1 H_3) - x^2 H_3(u_2^2 + \frac{1}{H} H_1(u^1 + x^2 u_2^1)) + u^1 u_1^2 + u^1 x^2(\frac{1}{H} H_1 u_1^1 + \frac{1}{H} H_{11} u^1 - \frac{1}{(H_1)^2}) +$$

$$+ u^2(u_2^2 + \frac{1}{H} H_1(u^1 + x^2 u_2^1)) + u_2^3 = 0, \quad (6)$$

$$u_1^1 + u_2^2 = 0, \quad (7)$$

$$u_2^4 = 0. \quad (8)$$

Инфинитезимальный оператор, допускаемый системой (5)–(8), ищем в виде [1]

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad (9)$$

где $i, \alpha = 1, 2, 3, 4$, а координаты оператора ξ^i, η^α зависят от всех зависимых и независимых переменных (по всем повторяющимся индексам производится суммирование).

Поскольку в систему уравнений входят первые производные, то для формирования определяющих уравнений нужно продолжить оператор X на первые производные:

$$X_1 = X + \zeta_l^\beta \frac{\partial}{\partial u_l^\beta},$$

$$\zeta_l^\beta = \frac{\partial \eta^\beta}{\partial x^i} + u_l^n \frac{\partial \eta^\beta}{\partial x^n} - u_l^\beta \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} + u_l^n \frac{\partial \xi^j}{\partial x^n} \right),$$

где $\beta, l = 1, 2, 3$ (суммирование по повторяющимся индексам), координаты ζ_l^β зависят от всех x^i, u^α и производных u_l^α . Далее, действуя оператором X_1 на уравнения (8), (7), (6), (5), из критерия инвариантности [1] получаем определяющие уравнения, которые расщепляем по независимым переменным. При этом переходим на многообразие, задаваемое исходными

уравнениями, т. е. u_3^1, u_3^2, u_2^2 выражаем через оставшиеся элементы и подставляем в определяющие уравнения. Используем также четвертое уравнение $u_2^4 = 0$.

После достаточно трудоемких выкладок при расщеплении определяющих уравнений относительно независимых переменных получаем следующее представление координат оператора (9):

$$\begin{aligned}\xi^1 &= B_1 x^1 + C_1, \\ \xi^2 &= (B_1 - A_4) x^2, \\ \xi^3 &= B_3 x^3 + C_3, \\ \eta^1 &= (B_1 + A_4 - B_3) u^1, \\ \eta^2 &= (B_1 - B_3) u^2, \\ \eta^3 &= (B_1 - B_3) u^3 + D(x^3), \\ \eta^4 &= A_4 u^4,\end{aligned}$$

где $A_1, A_4, B_1, B_3, C_1, C_3$ – постоянные; $D(x^3)$ – произвольная функция.

Выпишем операторы преобразования эквивалентности:

$$\begin{aligned}X_1 &= \frac{\partial}{\partial x^1}, \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial x^3}, \\ X_3 &= x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + u^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + u^2 \frac{\partial}{\partial u^2} + 2u^3 \frac{\partial}{\partial u^3}, \\ X_4 &= x^3 \frac{\partial}{\partial x^3} - u^1 \frac{\partial}{\partial u^1} - u^2 \frac{\partial}{\partial u^2} - 2u^3 \frac{\partial}{\partial u^3}, \\ X_5 &= -x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + u^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + u^4 \frac{\partial}{\partial u^4}, \\ X_6(D(x^3)) &= D(x^3) \frac{\partial}{\partial u^3}.\end{aligned}$$

На основании теоремы Ли для найденных операторов ставится во взаимно однозначное соответствие группа преобразований переменных $x^1, x^2, x^3, u^1, u^2, u^3, h$. Тем самым доказали, что преобразования эквивалентности для системы (5)–(8) имеют структуру бесконечномерной группы преобразований:

$$\begin{aligned}G^{\text{ЭКВ}} : \{ \overline{x^1} &= b_3 b_4 x^1 + b_1; \quad \overline{x^2} = b_3 b_4 b_5^{-1} x^2; \\ \overline{x^3} &= b_4 x^3 + b_2; \quad \overline{u^1} = b_3 b_5 u^1; \quad \overline{u^2} = b_3 u^2; \\ \overline{u^3} &= b_3^2 u^3 + \Psi(x^3); \quad \overline{h} = b_5 H \}, \quad (10)\end{aligned}$$

где b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 – групповые параметры (10), $\Psi(x^3)$ – произвольная функция. Заметим, что для H в $G^{\text{ЭКВ}}$ допускается только растяжение с одновременным растяжением для x^2 и u^1 .

Автор благодарит своего научного руководителя В. К. Андреева за постановку задачи.

Библиографические ссылки

1. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1978. 400 с.
2. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М. : Наука, 1983. 280 с.
3. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике / В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов. Новосибирск : Наука, 1994. 319 с.
4. Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2001. 192 с.
5. Кузнецов В. В. Термокапиллярные течения в пограничных и тонких слоях : дис. ... докт. физ.-мат. наук. Новосибирск : ИГ СО РАН, 2001. 187 с.

References

1. Ovsyannikov L. V. *Gruppovoy analiz differentsialnykh uravneniy* (Group analysis of differential equations). Moscow, Nauka, 1978, 400 p.
2. Ibragimov N. H. *Gruppy preobrazovaniy v matematicheskoy fizike* (Groups of transformations in mathematical physics). Moscow, Nauka, 1983, 280 p.
3. Andreev V. K., Kaptsov O. V., Pukhnachev V. V., Rodionov A. A. *Primeneniye teoretiko-gruppovykh metodov v gidrodinamike* (Application of group-theoretic methods in hydrodynamics). Novosibirsk, Nauka, 1994, 319 p.
4. Kiryakov P. P., Senashov S. I., Yakhno A. N. *Prilozheniye simmetriy i zakonov sokhraneniya k resheniyu differentsialnykh uravneniy* (Application of symmetriya and preservation laws to the solution of the differential equations). Novosibirsk, Publishing SB RAS, 2001, 192 p.
5. Kuznetsov V. V. *Termokapillyarnyye techeniya v pogranchnykh i tonkikh sloyakh* (Thermocapillary currents in boundary and thin layers). Diss. doct. phys.-mat. sciences. Novosibirsk, IG SB RAS, 2001, 187 p.

© Краснова Д. А., 2013