

**Возможные магнитные структуры для упорядоченного Ni<sub>5</sub>GeO<sub>4</sub>(BO<sub>3</sub>)<sub>2</sub> (пространственная группа Pn2<sub>1</sub>m (№ 31))**

τ	Направления магнитных моментов на ионах
1	$e^1_x + e^2_x - e^3_x - e^4_x + e^5_x - e^6_x - e^{13}_x - e^{14}_x + e^{15}_x + e^{16}_x - e^{17}_x + e^{18}_x$ ; $e^1_y + e^2_y + e^3_y + e^4_y + e^5_y + e^6_y - e^{13}_y - e^{14}_y - e^{15}_y - e^{16}_y - e^{17}_y - e^{18}_y$ ; $e^1_z + e^2_z - e^3_z - e^4_z + e^5_z - e^6_z + e^7_z + e^8_z + e^9_z - e^{12}_z + e^{13}_z + e^{14}_z - e^{15}_z - e^{16}_z + e^{17}_z - e^{18}_z - e^{19}_z - e^{20}_z + e^{22}_z + e^{23}_z$
2	$e^1_x + e^2_x - e^3_x - e^4_x + e^5_x - e^6_x + e^7_x + e^8_x + e^9_x - e^{12}_x + e^{13}_x + e^{14}_x - e^{15}_x - e^{16}_x + e^{17}_x - e^{18}_x - e^{19}_x - e^{20}_x + e^{22}_x + e^{23}_x$ ; $e^1_y + e^2_y + e^3_y + e^4_y + e^5_y + e^6_y + e^7_y + e^8_y + e^9_y + e^{12}_y + e^{13}_y + e^{14}_y + e^{15}_y + e^{16}_y + e^{17}_y + e^{18}_y + e^{19}_y + e^{20}_y + e^{22}_y + e^{23}_y$ ; $e^1_z + e^2_z - e^3_z - e^4_z + e^5_z + e^6_z - e^{13}_z - e^{14}_z + e^{15}_z + e^{16}_z - e^{17}_z + e^{18}_z$ ;
3	$e^1_x + e^2_x + e^3_x + e^4_x + e^5_x + e^6_x + e^7_x + e^8_x + e^9_x + e^{12}_x + e^{13}_x + e^{14}_x + e^{15}_x + e^{16}_x + e^{17}_x + e^{18}_x + e^{19}_x + e^{20}_x + e^{22}_x + e^{23}_x$ ; $e^1_y + e^2_y - e^3_y - e^4_y + e^5_y + e^6_y + e^7_y + e^8_y - e^{12}_y + e^{13}_y + e^{14}_y - e^{15}_y - e^{16}_y + e^{17}_y - e^{18}_y - e^{19}_y - e^{20}_y + e^{22}_y + e^{23}_y$ ; $e^1_z + e^2_z + e^3_z + e^4_z + e^5_z + e^6_z - e^{13}_z - e^{14}_z - e^{15}_z - e^{16}_z - e^{17}_z - e^{18}_z$
4	$e^1_x + e^2_x + e^3_x + e^4_x + e^5_x + e^6_x - e^{13}_x - e^{14}_x - e^{15}_x - e^{16}_x - e^{17}_x - e^{18}_x$ ; $e^1_y + e^2_y + e^3_y + e^4_y + e^5_y + e^6_y - e^{13}_y - e^{14}_y - e^{15}_y - e^{16}_y - e^{17}_y - e^{18}_y$ ; $e^1_z + e^2_z + e^3_z + e^4_z + e^5_z + e^6_z + e^7_z + e^8_z + e^9_z + e^{12}_z + e^{13}_z + e^{14}_z + e^{15}_z + e^{16}_z + e^{17}_z + e^{18}_z + e^{19}_z + e^{20}_z + e^{22}_z + e^{23}_z$

Таким образом, в ходе проделанной работы с помощью симметричного анализа были построены возможные магнитные структуры для полностью неупорядоченного и различных случаев упорядочения магнитных ионов кристалла Ni<sub>5</sub>GeO<sub>4</sub>(BO<sub>3</sub>)<sub>2</sub>. Как показывают результаты рентгеновских исследований кристаллической структуры Ni<sub>5</sub>GeO<sub>4</sub>(BO<sub>3</sub>)<sub>2</sub>, упорядочения Ni и Ge в позиции 4g даже после длительного отжига не наблюдается, магнитные ионы в позиции 4g располагаются случайным образом. Несмотря на то, что то Ni и Ge распределены равновероятно, возможно образование локального (ближнего) порядка в небольших областях кристалла. В этом случае различные области могут иметь несколько различную магнитную структуру. Как показали результаты расчета, если упорядочение происходит в рамках одной кристаллографической ячейки, то направления магнитных моментов либо лежат в плоскости ab, либо направлены вдоль оси c. В случае удвоенной ячейки различные типы упорядочения магнитных ионов дают более сложную картину: для некоторых представлений в этом случае магнитный момент для некоторых ионов имеет все три компоненты. Кроме этого, в ряде случаев при единственном фазовом переходе магнитоупорядоченная структура

может быть только ферромагнитной или наоборот только антиферромагнитной. Вероятнее всего реальная магнитная структура исследуемого соединения довольно сложная и может зависеть от условий роста кристалла (поскольку может изменяться распределение магнитных ионов в позиции 4g). Полученные в данной работе результаты помогут при анализе и интерпретации экспериментальных данных.

**Библиографические ссылки**

1. Ковалев О. В. Неприводимые представления пространственных групп : науч. изд. Киев : Изд-во АН УССР, 1961.
2. Изюмов Ю. А., Найш В. Е., Озеров Р. П. Нейтронография магнетиков : науч. изд. М. : Атомиздат, 1981.
3. Толедано Ж.-К.; Толедано П. Теория Ландау фазовых переходов : науч. изд. М. : Мир. 1994.
4. International Tables for Crystallography (2006). Vol. A. : sci. ed. / edit. Theo Hahn – Dordrecht (Netherlands): Springer, 2005.

© Назаренко И. И., Софронова С. Н., 2013

УДК 519.62

**МОДАЛЬНЫЙ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ БАЛОК, ПОДАТЛИВЫХ ПРИ ТРАНСВЕРСАЛЬНОМ СДВИГЕ**

В. А. Нестеров

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева  
 Россия, 660014, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31. E-mail: gorkolya@mail.ru

*Рассматривается задача о собственных колебаниях балки с низкой трансверсальной сдвиговой жесткостью. На основе теории пластин Рейсснера-Мидлина разработана конечно-элементная модель, в которой в качестве узловых неизвестных фигурируют углы трансверсального сдвига. Представлены результаты модальных расчетов изотропных, трехслойных и композитных балок при учете неклассических граничных условий.*

*Ключевые слова: балка, собственные колебания, трансверсальный сдвиг, метод конечных элементов.*

MODAL FINITE ELEMENT ANALYSIS OF SHEAR FLEXIBLE BEAMS

V. A. Nesterov

Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev  
31 "Krasnoyarskiy Rabochiy" prospect, Krasnoyarsk, 660014, Russia. E-mail: gorkolya@mail.ru

The author considers a problem of free oscillations of a beam with low value of transverse shear stiffness. On the base of Reissner-Midlin plate theory, the finite element of a shear flexible beam is developed. There are transverse shear strains among the basic kinematic nodal variables. The urgency of the model is shown by test modal analysis of beams. Vibrations of sandwich beams and thick layered composite beams under non-classical boundary conditions are investigated.

Keywords: beam, free vibrations, transverse shear strains, finite element method.

Композиционные материалы часто используются в производстве ракетно-космической техники, поскольку они, обладая высокими удельными механическими свойствами, позволяют изготавливать конструкции с большой степенью весового совершенства. Для композитов характерна низкая трансверсальная сдвиговая жесткость. Эту особенность поведения композитов необходимо учитывать при проектировании и расчете. Математическая модель при этом усложнится по сравнению с той, что используется при расчете конструкций из традиционных материалов.

Рассматривается задача о собственных колебаниях балок, податливых при трансверсальном сдвиге. Решение выполняется с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Математическая модель базируется на теории пластин Рейсснера-Мидлина [1; 2]. Для вывода матриц жесткости и инерции используется вариационный подход. Для этого выражение полной энергии конечного элемента колеблющейся балки варьируется по узловым компонентам, среди которых присутствуют осредненные по высоте сечения углы трансверсального сдвига. Разработанная конечно-элементная модель протестирована на примерах решения классических задач. Ее актуальность показана расчетами, выполненными для монолитных изотропных балок с низкой трансверсальной сдвиговой жесткостью, для трехслойных балок с податливым наполнителем, а также для балок, изготовленных из однонаправленного композита (ортотропная модель). Частоты и формы собственных колебаний подтверждаются конечно-элементными решениями в среде пакета COSMOS/M, где эти задачи рассматривались в более строгой (двумерной) постановке.

Исследуемая конечно-элементная модель допускает описание граничных условий неклассического вида, когда на торцах балки регламентируется поведение углов трансверсального сдвига. Показано, что для некоторых типов граничных условий задача о собственных колебаниях балки не может быть решена при использовании классических расчетных моделей.

Получим разрешающие уравнения для задачи о свободных поперечных колебаниях балки с низкой трансверсальной сдвиговой жесткостью. Задачу будем решать с помощью МКЭ, поэтому сначала необходимо записать выражение энергетического функционала. Полная энергия колеблющейся балки скла-

дывается из потенциальной энергии деформации и кинетической энергии движения:

$$\tilde{E} = \tilde{U} + \tilde{T}. \tag{1}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \frac{1}{2} \int \int \int_{(V)} (\tilde{\sigma}_x \tilde{e}_x + \tilde{\sigma}_z \tilde{e}_z + \tilde{\tau}_{xz} \tilde{e}_{xz}) dx dy dz, \\ \tilde{T} &= \frac{1}{2} \int \int \int_{(V)} \rho(x, y, z) v^2 dx dy dz, \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\rho$  – плотность материала в точке с координатами  $(x, y, z)$ ;  $v$  – скорость движения этой точки тела;  $V$  – объем тела.

Последовательно применяя гипотезы о поведении балки с низкой трансверсальной сдвиговой жесткостью [3], вместо (1) получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^l \left( N \frac{du}{dx} + M \frac{d\theta}{dx} + Q\psi \right) dx - \\ &- \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l \left\{ B_\rho (u^2 + w^2) + 2C_\rho u \left( \psi - \frac{dw}{dx} \right) + D_\rho \left( \psi - \frac{dw}{dx} \right)^2 \right\} \times \\ &\times dx = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где  $N, M, Q$  – внутренние балочные усилия ( $N$  – продольная сила,  $M$  – изгибающий момент,  $Q$  – перерезывающая сила), вычисляемые по формулам

$$\begin{aligned} N &= B \frac{du}{dx} + C \left( \frac{d\psi}{dx} - \frac{d^2w}{dx^2} \right), \\ M &= C \frac{du}{dx} + D \left( \frac{d\psi}{dx} - \frac{d^2w}{dx^2} \right), \quad Q = K\psi, \end{aligned} \tag{4}$$

где  $B_\rho, C_\rho, D_\rho$  – параметры, характеризующие инерционные свойства

$$\begin{aligned} B_\rho &= \int \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\frac{-s}{2}}^{\frac{h-s}{2}} \rho dy dz, \quad C_\rho = \int \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\frac{-s}{2}}^{\frac{h-s}{2}} \rho z dy dz, \\ D_\rho &= \int \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\frac{-s}{2}}^{\frac{h-s}{2}} \rho z^2 dy dz. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь  $h$  и  $b$  – высота и ширина сечения балки соответственно.

Перейдем теперь непосредственно к формированию матрицы жесткости балочного конечного элемента. Будем полагать, что прогиб изменяется по кубическому закону вдоль длины элемента, а угол сдвига  $\psi$  и продольное перемещение  $u$  – по линейному закону:

$$w(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3, \quad \psi(x) = \alpha_5 + \alpha_6 x, \\ u(x) = \alpha_7 + \alpha_8 x. \quad (6)$$

Введем в рассмотрение вектор основных кинематических переменных

$$\delta = \left\{ w \quad \frac{dw}{dx} \quad \psi \quad u \right\}^T. \quad (7)$$

Вектор узловых кинематических параметров произвольного элемента балки представим в следующем виде:

$$\delta_e = \left\{ w_1 \left( \frac{dw}{dx} \right)_1 \quad \psi_1 \quad u_1 \quad w_2 \left( \frac{dw}{dx} \right)_2 \quad \psi_2 \quad u_2 \right\}^T. \quad (8)$$

Следуя вариационному подходу к МКЭ, получим систему уравнений для произвольного балочного элемента, которая в матричном представлении имеет следующий вид:

$$K_e \delta_e - \omega^2 S_e \delta_e = 0, \quad (9)$$

где  $K_e$  и  $S_e$  – матрица жесткости и матрица инерциальных параметров балочного элемента балочного элемента со следующими ненулевыми компонентами:

$$k_{11} = 12 \frac{D}{l^3}, \quad k_{12} = 6 \frac{D}{l^2}, \quad k_{15} = -12 \frac{D}{l^3}, \quad k_{16} = 6 \frac{D}{l^2}, \\ k_{22} = 4 \frac{D}{l}, \quad k_{23} = -\frac{D}{l}, \quad k_{24} = -\frac{C}{l}, \quad k_{25} = -6 \frac{D}{l^2}, \\ k_{26} = 2 \frac{D}{l}, \quad k_{27} = \frac{D}{l}, \quad k_{28} = \frac{C}{l}, \quad k_{33} = \frac{D}{l} + \frac{Kl}{3}, \quad k_{34} = \frac{C}{l}, \\ k_{36} = \frac{D}{l}, \quad k_{37} = -\frac{D}{l} + \frac{Kl}{6}, \quad k_{38} = -\frac{C}{l}, \quad k_{44} = \frac{B}{l}, \\ k_{46} = \frac{C}{l}, \quad k_{47} = -\frac{C}{l}, \quad k_{48} = -\frac{B}{l}, \quad k_{55} = 12 \frac{D}{l^3}, \\ k_{56} = -6 \frac{D}{l^2}, \quad k_{66} = 4 \frac{D}{l}, \quad k_{67} = -\frac{D}{l}, \quad k_{68} = -\frac{C}{l}, \\ k_{77} = \frac{D}{l} + \frac{Kl}{3}, \quad k_{78} = \frac{C}{l}, \quad k_{88} = \frac{B}{l}, \\ s_{11} = \frac{13B_p l^2 + 42D_p}{35l}, \quad s_{12} = \frac{11B_p l^2}{210} + \frac{D_p}{10}, \quad s_{13} = \frac{D_p}{2}, \\ s_{14} = \frac{C_p}{2}, \quad s_{15} = \frac{3(3B_p l^2 - 28D_p)}{70l}, \quad s_{16} = -\frac{13B_p l^2}{420} + \frac{D_p}{10}, \\ s_{17} = \frac{D_p}{2}, \quad s_{18} = \frac{D_p}{2}, \quad s_{19} = \frac{C_p}{2}, \quad s_{22} = \frac{1}{105} B_p l^3 + \frac{2}{15} D_p l,$$

$$s_{23} = -\frac{D_p l}{12}, \quad s_{24} = -\frac{C_p l}{12}, \quad s_{25} = \frac{13B_p l^2}{420} - \frac{D_p}{10}, \\ s_{26} = -\frac{1}{140} B_p l^3 - \frac{1}{30} D_p l, \quad s_{27} = \frac{D_p l}{12}, \quad s_{28} = \frac{C_p l}{12}, \\ s_{33} = \frac{D_p l}{3}, \quad s_{34} = \frac{C_p l}{3}, \quad s_{35} = -\frac{D_p}{2}, \quad s_{36} = \frac{D_p l}{2}, \\ s_{37} = \frac{D_p l}{6}, \quad s_{38} = \frac{C_p l}{6}, \quad s_{44} = \frac{B_p l}{3}, \quad s_{45} = -\frac{C_p}{2}, \\ s_{46} = \frac{C_p l}{12}, \quad s_{47} = \frac{C_p l}{6}, \quad s_{48} = \frac{B_p l}{6}, \quad s_{55} = \frac{13B_p l^2 + 42D_p}{35l}, \\ s_{56} = -\frac{11B_p l^2}{210} - \frac{D_p}{10}, \quad s_{57} = -\frac{D_p}{2}, \quad s_{58} = -\frac{C_p}{2}, \\ s_{66} = \frac{1}{105} B_p l^3 + \frac{2}{15} D_p l, \quad s_{67} = -\frac{D_p l}{12}, \quad s_{68} = -\frac{C_p l}{12}, \\ s_{77} = \frac{D_p l}{3}, \quad s_{78} = \frac{C_p l}{3}, \quad s_{88} = \frac{B_p l}{3}.$$

С помощью матриц  $K_e$  и  $S_e$  формируются глобальные матрицы жесткости и инерции  $K_\Sigma$  и  $S_\Sigma$ , фигурирующие в глобальных уравнениях состояния

$$K_\Sigma \Delta - \omega^2 S_\Sigma \Delta = 0, \quad (10)$$

где глобальный вектор узловых неизвестных имеет вид

$$\Delta = \{\delta_1 \quad \delta_2 \quad \dots \quad \delta_i \quad \dots \quad \delta_{n+1}\}^T, \quad (11)$$

$\delta_i$  – вектор узловых неизвестных  $i$ -го узла

$$\delta_i = \left\{ w_i \left( \frac{dw}{dx} \right)_i \quad \psi_i \quad u_i \right\}^T.$$

Описанный алгоритм вывода матрицы жесткости и матрицы инерции реализован в специальной программе формирования фундаментальных матриц и векторов теории МКЭ, предназначенных для расчета балок, податливых при трансверсальном сдвиге [4].

Выполним тестовое решение для стальной ( $E = 210$  ГПа,  $\mu = 0,3$ ,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>) балки длиной 1 м, с прямоугольным поперечным сечением ( $h = 1$  см,  $b = 1$  мм). Будем полагать, что координатная ось  $X$  проходит через центры тяжести сечений. В этом случае смешанные жесткости ( $C$ ), фигурирующие в матрице жесткости элемента  $K_e$ , и параметр инерции ( $C_p$ ), присутствующий в матрице  $S_e$ , равны нулю.

Сначала в нашем КЭ расчете зададим граничные условия свободного опирания, причем углы сдвига  $\psi$  на торцах не фиксируются:

$$\text{при } x = 0: w = 0, u = 0, \quad \text{при } x = L: w = 0. \quad (12)$$

Результат сравним с классическим решением, определяемым по формуле

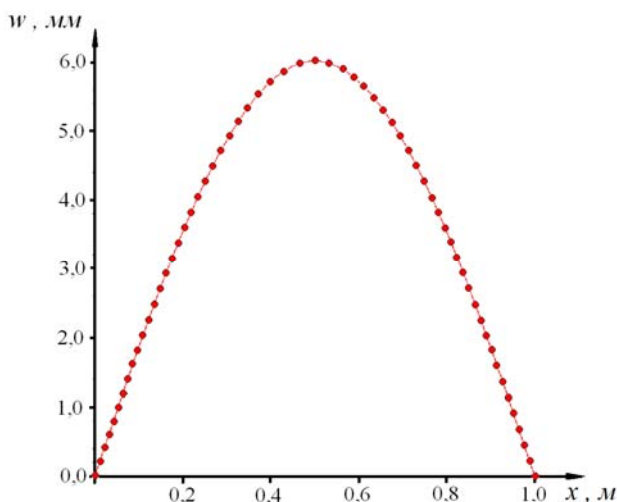
$$\omega_i = \frac{i^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad (13)$$

где  $J$  – момент инерции сечения.

С помощью программы [5] решена обобщенная задача на собственные значения для 50-узловой моде-

ли стальной балки длиной 1 м с прямоугольным поперечным сечением ( $h = 1$  см,  $b = 1$  мм) и получено значение первой круговой частоты, равное 147,811 (рад/с). Вычисленное по формуле (13) значение равно 147,833 (рад/с). Форма колебаний при этой частоте показана на рисунке.

Представлены первые пять частот собственных колебаний стальной балки, определенные по нашей модели, вычисленные по формуле (13) и найденные в результате решения в пакете COSMOS/M с использованием элементов PLANE2D (табл. 1). Почти идеальное совпадение по частотам подтверждает правильность рассматриваемого здесь подхода. Совпадение имеет место и по формам колебаний. Отметим, что результаты модального анализа в пакете COSMOS/M выдаются в виде циклической частоты  $f$ , измеряемой в Гц ( $c^{-1}$ ) и связанной с круговой частотой формулой  $\omega = 2 \pi f$ .



Первая форма колебаний балки

Частоты собственных колебаний для первых пяти мод

Таблица 1

Номер моды	Тестируемое решение	Аналитическое решение	Решение в пакете COSMOS/M
1	147,811	147,833	147,809
2	590,982	591,332	590,956
3	1 328,730	1 330,497	1 328,605
4	2 359,758	2 365,328	2 359,361
5	3 682,269	3 695,826	3 681,293

Важно отметить, что в данном случае частоты первых мод колебаний являются первыми в списке собственных значений задачи, т. е. наименьшими.

Выполним модальный анализ, уменьшив в 100 раз (по сравнению с предыдущим расчетом) жесткость балки при трансверсальном сдвиге. Все остальные параметры жесткости, размеры и граничные условия оставим без изменения. Результаты решения по нашей модели представлены списком первых пяти собственных значений задачи, расположенных во втором столбце (табл. 2). Здесь же для сравнения приводится

решение (табл. 2, третий столбец), выполненное в пакете COSMOS/M, в котором для учета уменьшенного параметра трансверсальной жесткости задействуется опция ортотропных свойств материала (для элементов PLANE2D). При этом фактически уменьшается соответствующий модуль сдвига в списке механических свойств материала. Вновь отмечаем хорошее совпадение результатов. Подчеркнем необходимость учета трансверсального сдвига в модальном анализе. Сравнение соответствующих данных (см. табл. 1 и 2) показывает заметное расхождение частот собственных колебаний, определенных с учетом трансверсального сдвига, и теми же величинами, вычисленными по классической формуле, где этот эффект не принимается во внимание.

Выполнено решение задачи о собственных колебаниях балки с шарнирно-опертыми концами, на которых зафиксирован угол трансверсального сдвига. В этом случае рассматривается разрешающая система алгебраических уравнений со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0: w = 0, u = 0, \psi = 0, \\ \text{при } x = L: w = 0, \psi = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Результаты решения (первые пять частот) приведены в четвертом столбце (табл. 2). Они показывают, что для рассматриваемой здесь шарнирно-опертой балки (с данным набором геометрических и механических параметров) расхождение в собственных значениях, определенных по двум моделям (с фиксацией угла  $\psi$  на торцах и без такового), невелико. Тем не менее качественное расхождение – верное: фиксация угла  $\psi$  на торцах делает балку более жесткой, что отражается в повышении величин собственных частот.

Таблица 2

Частоты колебания шарнирно-опертой балки

Номер моды	Торцы со свободным сдвигом	Решение в пакете COSMOS/M	Торцы с фиксированным сдвигом
1	146,271	146,058	146,308
2	567,477	564,397	568,005
3	1 218,091	1 204,820	1 220,416
4	2 040,959	2 006,992	2 047,117
5	2 982,133	2 915,593	2 994,430

Параметры инерции балки в данном случае для прямоугольного сечения с шириной  $b$  и высотой  $h$  определяются следующим образом:

$$B_p = \rho b h, C_p = 0, D_p = \rho \frac{b h^3}{12}.$$

Рассмотрим трехслойную балку с податливым заполнителем. Решим задачу о ее собственных колебаниях. Назначим следующие геометрические параметры: длина – 1 м, толщина несущих слоев – 1 мм, толщина слоя заполнителя – 3 см. Материал несущих слоев – сталь ( $E = 210$  ГПа,  $\mu = 0,28$ ,  $\rho = 7 700$  кг/м<sup>3</sup>). Изотропный материал заполнителя обладает модулем сдвига  $G_{зап} = 2,9$  МПа. С помощью программы [6] получены результаты решения задачи на собственные

значения при ширине сечения в 1 мм (табл. 3). Параметры инерции трехслойной балки вычисляются по формулам

$$B_p = (2\rho_n h_n + \rho_3 h_3) b, C_p = 0,$$

$$D_p = \left( \rho_n (H^3 - h_3^3) + \rho_3 h_3^3 \right) \frac{b}{12},$$

где  $\rho_n$  и  $\rho_3$  – плотности материалов несущих слоев и заполнителя;  $h_n$  и  $h_3$  – толщины несущих слоев и слоя заполнителя;  $H$  – общая толщина пакета,  $H = 2 h_n + h_3$ .

Таблица 3

**Частоты колебания трехслойной шарнирно-опертой балки**

Номер моды	Торцы со свободным сдвигом	Решение в пакете COSMOS/M	Торцы с фиксированным сдвигом
1	20,99	20,388	21,220
2	43,304	42,278	43,805
3	65,346	64,473	66,119
4	87,312	87,22	88,341
5	109,248	111,049	110,555

Для сравнения приводится результат (табл. 3, третий столбец) решения задачи в пакете COSMOS/M, где трехслойная конструкция моделировалась элементами PLANE2D (заполнитель) и BEAM2D (несущие слои).

Хорошее совпадение частот собственных колебаний (табл. 3), вычисленных с помощью двух разных моделей, подтверждает правильность разрабатываемого нами подхода. Здесь же приводятся результаты расчета для модели с фиксированным сдвигом на торцах (см. табл. 3, четвертый столбец). Небольшое отличие частот для балок с фиксацией сдвига и без такового характерно для граничных условий шарнирного опирания.

Выполнен модальный расчет трехслойной конструкции в пакете COSMOS/M с моделированием балки элементами слоистой пластины SHELL4L. На торцах – условия шарнирного опирания: слева – неподвижный шарнир, справа – подвижный в направлении продольной оси. Ширина сечения балки – 50 мм. Остальные размеры и механические свойства материалов такие же, как в балке предыдущего расчета.

Результаты расчетов (табл. 4) сравниваются с данными, определенными по нашей модели. Как видим, имеется заметное расхождение, что свидетельствует о том, что в модели пакета COSMOS/M не учитываются рассматриваемые нами эффекты. В данном случае большего доверия заслуживают наши результаты, поскольку они почти точно совпадают с решением, полученным в том же пакете COSMOS/M при строгом моделировании поведения заполнителя (см. табл. 3).

Рассмотрим трехслойную балку с граничными условиями жесткого защемления торцов.

$$\text{при } x = 0 \text{ и при } x = L: w = 0,$$

$$u = 0, \psi = 0, dw/dx = 0. \quad (15)$$

Сохраним геометрические параметры предыдущей задачи: длина – 1 м, толщина несущих слоев – 1 мм,

толщина слоя заполнителя – 3 см, ширина сечения – 1 мм. Материал несущих слоев – сталь ( $E = 210$  ГПа,  $\mu = 0,28$ ,  $\rho = 7\,700$  кг/м<sup>3</sup>). Модуль сдвига изотропного материала заполнителя примем  $G_{\text{зап}} = 290$  МПа.

Таблица 4

**Частоты колебания трехслойной полосы**

Номер моды	Торцы со свободным сдвигом	Решение в пакете COSMOS/M (SHELL4L)
1	20,964	22,227
2	43,292	46,028
3	65,338	69,487
4	87,306	92,829
5	109,243	116,097

Рассмотрим результаты решения задачи (табл. 5). Для сравнения приводятся частоты (см. табл. 5, третий столбец), вычисленные с помощью пакета COSMOS/M, где трехслойная конструкция моделировалась элементами PLANE2D (заполнитель) и BEAM2D (несущие слои). Защемление торцов обеспечено фиксацией угловых узлов на краях. Вновь следует отметить весьма хорошее совпадение и в количественном (табл. 5) и в качественном отношении результатов, полученных по нашей модели и в пакете COSMOS/M.

Выполнен модальный расчет для балки с защемленными торцами, на которых, однако, освобожден угол сдвига. Значения частот собственных колебаний показаны в предпоследнем столбце табл. 5. Они существенно расходятся с соответствующими величинами, вычисленными для жестко защемленной балки (табл. 5, второй столбец). Следовательно, в модальном расчете балки со вторым видом защемления для точного определения частот и форм собственных колебаний требуется рассматриваемая в нашей работе модель (постановка).

Для сравнения выполнено решение задачи для балки с шарнирным опиранием торцов, где, кроме того, допущен сдвиг (см. табл. 5, последний столбец). Как видим, результаты отличаются от тех, что получены для защемленной балки со свободным сдвигом на торцах.

Последнее решение задачи об определении частот собственных колебаний защемленной (со свободным сдвигом на торцах) трехслойной балки выполнено для весьма податливого заполнителя  $G_{\text{зап}} = 2,9$  МПа. Получены следующие величины пяти первых частот:  $f_1 = 21,262$  Гц,  $f_2 = 43,833$  Гц,  $f_3 = 66,136$  Гц,  $f_4 = 88,365$  Гц,  $f_5 = 110,567$  Гц. Сравнивая эти значения с частотами колебания шарнирно-опертой балки со свободным сдвигом на торцах (см. табл. 4), можно заключить, что в случае достаточно малой жесткости балки при трансверсальном сдвиге защемление торцов со свободным сдвигом можно моделировать шарнирным опиранием (тоже со свободным сдвигом).

В заключение выполним модальный анализ монолитной балки, изготовленной из однонаправленного композита, например углепластика, у которого следующие актуальные для данной задачи механические

свойства:  $E = 180$  ГПа,  $G = 5$  ГПа и плотность  $\rho = 1500$  кг/м<sup>3</sup>. Выполним серию расчетов для различных вариантов граничных условий. Получены резуль-

таты этих вычислений в виде первых пяти частот собственных колебаний (табл. 6).

Таблица 5

Частоты колебания трехслойной балки, заземленной по торцам

Номер моды	Жесткое защемление торцов	Решение в пакете COSMOS/M	Защемление со свободным сдвигом на торцах	Шарнирно-опертые торцы со свободным сдвигом
1	134,105	130,53	77,563	70,122
2	309,411	298,818	254,025	245,059
3	518,337	497,572	477,927	467,133
4	742,287	710,749	716,150	703,270
5	972,990	931,689	956,270	941,120

Таблица 6

Частоты колебания многослойной балки при различных вариантах закрепления торцов

Номер моды	Шарнирно-опертые торцы со свободным сдвигом		Шарнирно-опертые торцы с фиксированным сдвигом	Защемление торцов	
	Авторская модель	COSMOS/M		фиксированный сдвиг	свободный сдвиг
1	49,598	49,587	49,599	111,787	96,267
2	197,494	197,335	197,521	305,515	269,699
3	441,062	440,279	441,197	592,381	533,552
4	776,122	773,732	776,538	966,163	884,950
5	1 197,208	1 191,62	1 198,192	1 420,876	1 319,846

Как и в предыдущих примерах, здесь рассматривались следующие варианты граничных условий: классическое шарнирное опирание со свободным трансверсальным сдвигом на торцах, шарнирное опирание с фиксацией сдвига на торцах, жесткое защемление торцов, защемление со свободным сдвигом на торцах.

Здесь же приведены данные расчета, выполненного для балки с классическим шарнирным опиранием в пакете COSMOS/M, где монолитная композитная конструкция, колебания которой происходят в одной плоскости, моделируется элементами PLANE2D.

Как следует из представленных значений (см. табл. 6), имеется хорошее совпадение данных нашего расчета с результатами вычислений, выполненных в пакете. Напомним, что наше решение соответствует одномерной балочной модели, а расчеты в пакете COSMOS/M проводились с помощью двумерной модели, чтобы адекватно учесть поведение конструкции с низкой трансверсальной сдвиговой жесткостью.

Анализ представленных данных (см. табл. 6) подтверждает ранее сделанный вывод о том, что в общем случае модальный расчет композитных балок с неклассическими граничными условиями (шарнирно-опертые торцы с фиксированным сдвигом и защемление со свободным сдвигом на торцах) приводит к результатам, отличным от тех, которые получаются при классических вариантах этих граничных условий. Это обстоятельство подчеркивает актуальность разработанной модели.

В заключение сформулируем выводы.

1. Получен энергетический функционал для решения задачи о собственных колебаниях балок с низкой трансверсальной жесткостью.

2. Разработана конечно-элементная модель податливой при сдвиге балки, вектор узловых неизвестных которой включает углы трансверсального сдвига. Сформированы матрица жесткости и матрица инерции для соответствующего балочного элемента.

3. В результате проведенного численного исследования на примере расчета изотропных, ортотропных композитных и трехслойных балок показана актуальность разработанной модели при проведении модального анализа конструкций с низкой трансверсальной сдвиговой жесткостью, а также при учете граничных условий неклассического вида.

#### Библиографические ссылки

1. *Reissner E.* The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates // *Trans. ASME. J. of Applied Mechanics.* 1945. Vol. 12 (2). P. 69–77.
2. *Midlin R. D.* Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Elastic Plates // *Trans. ASME. J. of Applied Mechanics.* 1951. Vol. 18. P. 31–38.
3. *Васильев В. В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988.
4. Комплекс программ для получения основных матриц и векторов теории МКЭ для конечных элементов балки, пластины и оболочки, податливых при трансверсальном сдвиге: свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2010611594 / 26.02.2010 / *Нестеров В. А.* Заяв. № 2009617627, 31.12.2009.
5. Конечно-элементное исследование НДС, устойчивости и собственных колебаний балки с учетом трансверсальной податливости: свидетельство о гос.

регистрации программы для ЭВМ № 2010611595 / 26.02.2010 / Нестеров В. А. Заяв. № 2009617628, 31.12.2009.

6. Исследование НДС, устойчивости и собственных колебаний трехслойной балки с податливым заполнителем с помощью МКЭ при учете трансвер-

сального сдвига в качестве узлового неизвестного: свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2010611781 / 09.03.2010 / Нестеров В. А. Заяв. № 2010610178, 18.01.2010.

© Нестеров В. А., 2013

УДК 512.54

## СТРОЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ СИЛОВСКОЙ ПОДГРУППЫ В НЕКОТОРЫХ ГРУППАХ ШУНКОВА\*

В. И. Сенашов

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева  
Россия, 660014, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31  
Институт вычислительного моделирования СО РАН  
660036, Красноярск, Академгородок, 50. E-mail: sen1112home@mail.ru

*Изучаются группы, введенные В. П. Шунковым в 1975 г., и названные в его честь группами Шункова в 2000 г. Используется методика исследования бесконечных групп, разработанная в красноярской школе по теории групп. Цель работы – установить строение бесконечной силовской 2-подгруппы в группе Шункова, не обладающей почти слойно конечной периодической частью, когда в группе нормализатор любой конечной нетривиальной подгруппы обладает почти слойно конечной периодической частью. Доказано, что если некоторая силовская 2-подгруппа такой группы бесконечна, то она является расширением квазициклической 2-группы при помощи обращаемого автоморфизма. Этот результат найдет применение при изучении бесконечных групп с условиями конечности. Строение искомой бесконечной силовской 2-подгруппы полностью установлено.*

*Ключевые слова:* группа, силовская подгруппа, инволюция, слойная конечность.

## STRUCTURE OF THE INFINITE SYLOV SUBGROUP IN SOME SHUNKOV GROUPS

V. I. Senashov

Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev  
31 “Krasnoyarskiy Rabochiy” prospect, Krasnoyarsk, 660014, Russia  
Institute of Computational Modeling of Siberian Branch of RAS  
ICM SB RAS Akademgorodok, 660036, Krasnoyarsk, Russia

*The author studies groups entered by V. P. Shunkov in 1975 and named in his honor Shunkov groups in 2000, for the study the author uses a technique of infinite groups, developed at Krasnoyarsk School on group theory. The aim of the work was to establish the structure of an infinite Sylow 2-subgroup in Shunkov that does not have an almost layer-finite periodic part, when the normalizer of any finite non-trivial subgroup has an almost layer-finite periodic part. The author proves that if a Sylow 2-subgroup of the group is infinite, then it is an extension of a quasi-cyclic 2-group by reversing automorphism. This result will be used in the study of infinite groups with finiteness conditions. The structure of the unknown infinite Sylow 2-subgroup was completely revealed.*

*Keywords:* group, Sylow subgroup, involution, layer-finiteness.

Слойно конечные группы впервые появились без названия в статье С. Н. Черникова [1], а затем в его последующих публикациях за ними закрепилось название *слойно конечных групп*. Группа называется *слойно конечной*, если множество ее элементов любого данного порядка конечно. *Почти слойно конечные группы* – это расширения слойно конечных групп с помощью конечных групп. Класс почти слойно конечных групп значительно шире класса слойно конечных групп. В то время как только некоторые чер-

никовские группы слойно конечны, все черниковские группы являются почти слойно конечными.

Здесь мы изучаем группы с условием: нормализатор любой конечной нетривиальной подгруппы обладает почти слойно конечной периодической частью. Класс групп, удовлетворяющий этому условию, довольно широк. В нем содержатся свободные бернсайдовские группы нечетного периода  $\geq 665$  [2] и группы, построенные А. Ю. Ольшанским [3].

**Определение.** Группа называется *группой Шункова*

\* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 10-01-00509) и гранта Министерства образования России (проект – алгебро-логические структуры и комплексный анализ с приложениями к передаче и защите информации).