регистрации программы для ЭВМ № 2010611595 / 26.02.2010 / *Нестеров В. А.* Заяв. № 2009617628, 31.12.2009.

6. Исследование НДС, устойчивости и собственных колебаний трехслойной балки с податливым заполнителем с помощью МКЭ при учете трансверсального сдвига в качестве узлового неизвестного: свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2010611781 / 09.03.2010 / *Нестеров В. А.* Заяв. № 2010610178, 18.01.2010.

УДК 512.54

СТРОЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ СИЛОВСКОЙ ПОДГРУППЫ В НЕКОТОРЫХ ГРУППАХ ШУНКОВА*

В. И. Сенашов

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева
Россия, 660014, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31
Институт вычислительного моделирования СО РАН
660036, Красноярск, Академгородок, 50. E-mail: sen1112home@mail.ru

Изучаются группы, введенные В. П. Шунковым в 1975 г., и названные в его честь группами Шункова в 2000 г. Используется методика исследования бесконечных групп, разработанная в красноярской школе по теории групп. Цель работы – установить строение бесконечной силовской 2-подгруппы в группе Шункова, не обладающей почти слойно конечной периодической частью, когда в группе нормализатор любой конечной нетривиальной подгруппы обладает почти слойно конечной периодической частью. Доказано, что если некоторая силовская 2-подгруппа такой группы бесконечна, то она является расширением квазициклической 2-группы при помощи обращающего автоморфизма. Этот результат найдет применение при изучении бесконечных групп с условиями конечности. Строение искомой бесконечной силовской 2-погруппы полностью установлено.

Ключевые слова: группа, силовская подгруппа, инволюция, слойная конечность.

STRUCTURE OF THE INFINITE SYLOV SUBGROUP IN SOME SHUNKOV GROUPS

V. I. Senashov

Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev
31 “Krasnoyarskiy Rabochiy” prospect, Krasnoyarsk, 660014, Russia
Institute of Computational Modeling of Siberian Branch of RAS
ICM SB RAS Akademgorodok, 660036, Krasnoyarsk, Russia

The author studies groups entered by V. P. Shunkov in 1975 and named in his honor Shunkov groups in 2000, for the study the author uses a technique of infinite groups, developed at Krasnoyarsk School on group theory. The aim of the work was to establish the structure of an infinite Sylov 2-subgroup in Shunkov that does not have an almost layer-finite periodic part, when the normalizer of any finite non-trivial subgroup has an almost layer-finite periodic part. The author proves that if a Sylov 2-subgroup of the group is infinite, then it is an extension of a quasi-cyclic 2-group by reversing automorphism. This result will be used in the study of infinite groups with finiteness conditions. The structure of the unknown infinite Sylov 2-subgroup was completely revealed.

Keywords: group, Sylov subgroup, involution, layer-finiteness.

Слойно конечные группы впервые появились без названия в статье С. Н. Черникова [1], а затем в его последующих публикациях за ними закрепилось название слойно конечных групп. Группа называется *слойно конечной*, если множество ее элементов любого данного порядка конечно. *Почти слойно конечные группы* – это расширения слойно конечных групп с помощью конечных групп. Класс почти слойно конечных групп значительно шире класса слойно конечных групп. В то время как только некоторые черниковские группы слойно конечны, все черниковские группы являются почти слойно конечными.

Здесь мы изучаем группы с условием: нормализатор любой конечной нетривиальной подгруппы обладает почти слойно конечной периодической частью. Класс групп, удовлетворяющий этому условию, довольно широк. В нем содержатся свободные бернсайдовские группы нечетного периода ≥ 665 [2] и группы, построенные А. Ю. Ольшанским [3].

Определение. Группа называется *группой Шунко-*

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 10-01-00509) и гранта Министерства образования России (проект – алгебро-логические структуры и комплексный анализ с приложениями к передаче и защите информации).

ва, если для любой ее конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную подгруппу.

В настоящей работе доказывается следующая теорема.

Теорема. *Пусть в группе Шункова G, не обладающей почти слойно конечной периодической частью, нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы обладает почти слойно конечной периодической частью. Если некоторая силовская 2-подгруппа группы G бесконечна, то она является расширением квазициклической 2-группы при помощи обращающего автоморфизма.*

Заметим, что если группа Шункова удовлетворяет всем условиям теоремы, но обладает почти слойно конечной периодической частью, то бесконечная силовская 2-подгруппа может иметь самое разнообразное строение. В частности, в качестве бесконечной силовской 2-подгруппы может выступать любая черниковская 2-подгруппа. Результат находится в русле исследований классических объектов школы Шункова и найдет применение при изучении бесконечных групп с условиями конечности.

Ранее автором изучались периодические группы Шункова с условием почти слойной конечности нормализаторов конечных неединичных подгрупп [4] и группы Шункова с условием минимальности для не почти слойно конечных подгрупп [5; 6]. Группы Шункова с нормализаторами нетривиальных конечных подгрупп обладающих почти слойно конечной периодической частью, исследовались в классе групп без инволюций [7], при наличии в них сильно вложенной подгруппы с черниковской периодической частью [8], сильно вложенной почти слойно конечной подгруппы [9] и сильно вложенной подгруппы с почти слойно конечной периодической частью [10].

Необходимые определения и известные результаты, используемые в доказательстве. В этом пункте для удобства чтения статьи мы приведем необходимые определения и известные результаты, на которые в дальнейшем будем ссылаться как на предложения с соответствующим номером.

Определение. Элемент второго порядка называется *инволюцией*.

Определение. Элемент с конечным централизатором в группе G называется *почти регулярным элементом* группы G.

Определение. Элемент, который сопряжением при помощи некоторой инволюции переводится в обратный, называется *строго вещественным* относительно этой инволюции.

Определение. Если множество элементов конечного порядка в группе составляет подгруппу, то ее называют *периодической частью* этой группы.

Определение. Группа называется *черниковской*, если она либо конечна, либо является расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп с помощью конечной группы.

Определение. Группа обладает *полной частью A*, если A – абелева группа, порожденная всеми полными абелевыми подгруппами группы G, и G/A не обладает полными абелевыми подгруппами [11].

Определение. Подгруппа H группы G называется *сильно вложенной* в G, если H — собственная подгруппа группы G, содержащая инволюции, и $H \cap x^{-1}Hx$ не содержит инволюций для $x \in G \setminus H$.

Определение. Если произведение всех нормальных слойно конечных подгрупп группы слойно конечно, то будем его называть *слойно конечным радикалом* группы. Если группа F обладает слойно конечным радикалом, то мы будем обозначать его $R(F)$.

Определение. Группа G с инволюцией i называется *T_0-группой*, если выполняются условия:

(1) все подгруппы вида $< i, i^g >$, $g \in G$, конечны;

(2) силовские 2-подгруппы из G – циклические группы или обобщенные группы кватернионов;

(3) централизатор $C_G(i)$ бесконечен и обладает конечной периодической частью;

(4) нормализатор любой нетривиальной $< i >$-инвариантной локально конечной подгруппы из G либо содержится в $C_G(i)$, либо обладает периодической частью, являющейся группой Фробениуса с абелевым ядром и конечным неинвариантным множителем четного порядка;

(5) $C_G(i) \neq G$ и для всякого элемента $c \in G \setminus C_G(i)$, строго вещественного относительно i, т. е. $c^i = c^{-1}$, в $C_G(i)$ существует такой элемент s_c, что подгруппа $< c, s_c^{-1}cs_c>$ бесконечна.

1. Всякая черниковская примарная группа обладает нетривиальным центром [12, теорема 1.6].

2. Пусть G – группа с инволюциями, i – некоторая ее инволюция, удовлетворяющие следующим условиям: 1) все подгруппы вида $< i , i^g >$, $g \in G$, конечны; 2) в централизаторе $C_G(i)$ множество элементов конечных порядков конечно; 3) в группе G нормализатор любой нетривиальной $< i >$-инвариантной конечной подгруппы обладает периодической частью. Тогда либо G обладает почти нильпотентной периодической частью, либо G – T_0-группа [13, теорема 1].

3. Локально конечная группа G тогда и только тогда почти слойно конечна, когда в G выполняется условие: нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы из G – почти слойно конечная группа [7, теорема 1].

4. Любая почти слойно конечная группа G обладает слойно конечным радикалом, который имеет конечный индекс в группе G [14, свойство 1].

5. Пусть группа Шункова содержит сильно вложенную подгруппу, обладающую почти слойно конечной периодической частью. Если в группе нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы обладает почти слойно конечной периодической частью, то сама группа обладает почти слойно конечной периодической частью [10, основная теорема].

6. В локально конечной группе с черниковскими примарными подгруппами силовские примарные подгруппы сопряжены [15, теорема 7].

7. Централизатор любого элемента из слойно конечного радикала почти слойно конечной группы

имеет конечный индекс в группе; индексы в группе централизаторов остальных элементов бесконечны [14, свойство 4].

8. В бесконечной локально конечной группе четверная подгруппа Клейна обладает инволюцией с бесконечным централизатором [16, теорема 2].

9. Каждая полная подгруппа почти слойно конечной группы G содержится в центре слойно конечного радикала группы G [14, свойство 7].

Доказательство основного результата. Пусть группа Шункова G не обладает почти слойно конечной периодической частью и нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы обладает почти слойно конечной периодической частью.

Рассуждения, аналогичные доказательству леммы 8 из [13] для групп без инволюций, показывают, что все примарные подгруппы из G являются черниковскими. Предположим, что в группе G имеется бесконечная силовская 2-подгруппа S. Обозначим через i некоторую инволюцию из центра подгруппы S группы G (такая найдется ввиду предложения 1). По условиям теоремы централизатор инволюции i в группе G обладает почти слойно конечной периодической частью C.

Предположим, что в централизаторе некоторой инволюции группы G множество элементов конечных порядков конечно. Тогда по условиям теоремы и предложению 2 либо G обладает почти нильпотентной периодической частью, либо G — T_0-группа. Если периодическая часть группы G почти нильпотентна, то G обладает периодической нильпотентной нормальной подгруппой K конечного индекса в периодической части группы G. Так как K обладает нетривиальным центром $Z(K)$, то централизатор любого неединичного элемента из $Z(K)$ по условиям теоремы обладает почти слойно конечной периодической частью, очевидно, содержащей K. Тогда K почти слойно конечна, а вместе с ней почти слойно конечна и периодическая часть группы G как расширение почти слойно конечной группы при помощи конечной группы. Таким образом, в случае, когда периодическая часть группы G почти нильпотентна, теорема доказана. T_0-группой группа G быть не может, так как в группе Шункова не выполняется условие (5) из определения T_0-группы.

Итак, в дальнейшем будем предполагать, что в централизаторе произвольной инволюции из G множество элементов конечных порядков бесконечно. Включим C в максимальную почти слойно конечную подгруппу H. Такая максимальная подгруппа найдется по лемме Цорна и ввиду почти слойной конечности локально конечных подгрупп, удовлетворяющих условиям теоремы (предложение 3).

Обозначим через M нормализатор подгруппы H в группе G. По предложению 4 почти слойно конечная группа H обладает слойно конечным радикалом $R(H)$. Любой слой неединичных элементов из $R(H)$ представляет собой конечное инвариантное множество элементов. По лемме Дицмана из [17] он порождает конечную нетривиальную нормальную в $R(H)$ подгруппу, очевидно, являющуюся характеристической в $R(H)$ и, следовательно, нормальной в M. Тогда по условиям теоремы группа M обладает почти слойно конечной периодической частью, которая ввиду максимальности подгруппы H совпадает с H.

Лемма 1. *Пусть F, W – две различные бесконечные максимальные почти слойно конечные подгруппы группы G, $R(F)$ и $R(M)$ – их слойно конечные радикалы. Тогда $R(F) \cap R(W) = 1$.*

Доказательство повторяет доказательство леммы 10 из [13] для групп без инволюций.

Лемма 2. *Если для некоторого элемента a конечного порядка из M пересечение $C_G(a) \cap H$ бесконечно, то периодическая часть централизатора $C_G(a)$ содержится в M.*

Доказательство повторяет доказательство леммы 11 из [13] для групп без инволюций.

Лемма 3. *Если для некоторого элемента b конечного порядка из $H \cap H^g$ пересечения $C_G(b) \cap H$, $C_G(b) \cap H^g$ бесконечны, то $H = H^g$.*

Доказательство повторяет доказательство леммы 3 из [8] для групп без инволюций.

Предположим, что централизаторы всех инволюций из M имеют бесконечные пересечения с H. В группе G нет сильно вложенных подгрупп с почти слойно конечной периодической частью по предложению 5. Значит, группа M не является сильно вложенной в группу G. Тогда для некоторого элемента g из множества $G \setminus M$ пересечение $M \cap M^g$ содержит инволюцию. По только что сделанному предположению, по условиям теоремы и лемме 2 группа H содержит бесконечную периодическую часть централизатора этой инволюции в группе G, аналогично получаем, что H^g также содержит бесконечную периодическую часть централизатора этой инволюции. Но тогда по лемме 3 $H = H^g$, что противоречит выбору элемента g.

Таким образом, в группе M найдется инволюция, централизатор которой в M обладает конечной периодической частью. Зафиксируем за этой инволюцией обозначение j.

Так как в локально конечной группе H с черниковскими примарными подгруппами силовские примарные подгруппы сопряжены по предложению 6, то можем выбрать инволюцию j из S.

Лемма 4. *В максимальной почти слойно конечной подгруппе H из G все инволюции с бесконечными централизаторами в H порождают конечную подгруппу, которая содержится в $R(H)$.*

Доказательство. Предположим, что это не так, и группа, порожденная инволюциями из H с бесконечными централизаторами в H, бесконечна. Так как H почти слойно конечна, то ввиду предложения 7 и леммы Дицмана в этом случае в H найдется инволюция k с бесконечным $C_H(k)$, для которой индекс $|H : C_H(k)|$ бесконечен. Обозначим через $\mathfrak{I}$ класс инволюций из H, сопряженных с k в H. Для произвольного элемента $g \in G \setminus H$ рассмотрим подгруппу $H^g = g^{-1}Hg$ и ее подмножество $\mathfrak{R} = g^{-1}\mathfrak{I}g$. Ввиду того что G является группой Шункова, любые две инволюции из множеств $\mathfrak{I}$ и $\mathfrak{R}$ порождают конечные подгруппы. Тогда для произвольной фиксированной инволюции x из $\Im$ элементы $b_t = xt$ ($t \in \Re$) имеют конечные порядки.

Если для бесконечного подмножества $\wp$ из $\Re$ порядки элементов b_t, $t\in \wp$ нечетны, то по свойствам групп диэдра в (b_t) найдется элемент c_t со свойством $c_t^{-1}tc_t = x$. Так как t принадлежит $\wp \le \Re$, то $t = g^{-1}rg$ для некоторой инволюции r из $\Im$. Отсюда получим $c_t^{-1}g^{-1}rgc_t = x$. Обозначая $h_t = gc_t$, видим: $x \in h_t^{-1}Hh_t = H_t$. Инволюции x, r сопряжены с k в H и имеют бесконечные централизаторы в H. Отсюда централизатор инволюции x в H_t также бесконечен и по лемме 2 периодическая часть централизатора $C_G(x)$ содержится в $H \cap H_t$. Тогда по лемме 3 $H = H_t$ и $h_t \in H = N_G(H)$. Элемент g можно представить в виде $g = h_t\, c_t^{-1}$ ($t\in \wp$), тогда $Hg = H\, c_t^{-1}$ ($t\in \wp$).

Для двух различных инволюций t, w из $\wp$ соответствующие строго вещественные элементы c_t, c_w также различны. Иначе из их совпадения вытекало бы равенство $x = c_t^{-1}t\ c_t = c_w^{-1}wc_w$, что невозможно для различных инволюций t, w. По свойствам групп диэдра элемент $j_t = xc_t^{-1}$ из Hg есть инволюция. Множество таких инволюций по мощности совпадает с мощностью множества $\wp$ и, значит, бесконечно. В качестве представителя смежного класса Hg берем инволюцию $u = xc_t^{-1}$ для некоторого t из $\wp$. Тогда инволюцию j_t можно представить в виде $j_t = s_tk$ ($t \in \wp$), где s_t принадлежит H и является строго вещественным относительно инволюции k ввиду $(s_t\, k)^2 = (j_t)^2 = 1$ (отсюда $k^{-1}s_tk = s_t^{-1}$).

Очевидно, группа $Z = < s_t \mid t\in \Re >$ бесконечна и ввиду вложения $Z \le H$ группа Z почти слойно конечна. Инволюция u нормализует Z и не содержится в H. Включим почти слойно конечную периодическую часть нормализатора $N_G(Z)$ в максимальную почти слойно конечную подгруппу W группы G (это можно сделать по лемме Цорна ввиду почти слойной конечности локально конечных подгрупп, удовлетворяющих условиям теоремы (см. предложение 3)). Пересечение $H \cap W$ бесконечно (в нем содержится подгруппа Z). Отсюда по лемме 1 получаем совпадение $H = W$ и включение $u \in H$ вопреки выбору u.

Противоречие означает, что для любого элемента $x \in \Im$ найдется бесконечное подмножество $\wp_x$ множества $\Re$ такое, что порядки элементов $b_t = xt$ ($t\in \wp_x$) четны. Обозначим через Ψ множество инволюций вида j_t из $< b_t >$ ($t\in \mathbf{U}_x$). По свойствам групп диэдра и лемме 2 $\Psi \le H \cap H^g$. Ввиду максимальности H из бесконечности множества Ψ следовало бы по лемме 1 совпадение $H = H^g$, что противоречило бы выбору пары H, g. Следовательно, Ψ — конечное множество и, не нарушая общности рассуждений, будем считать, что оно состоит из одной инволюции j_x. По свойствам групп диэдра $\{x, \wp_x\} \le C_G(j_x)$ и $\wp_x$ – бесконечное множество инволюций из H^g. По лемме 2 x принадлежит $C_G(j_x) \le H^g$. Отсюда ввиду произвольности выбора инволюции x из бесконечного множества $\Im$ получаем $\Im \le H \cap H^g$. Как и выше, в такой ситуации приходим к противоречию с выбором пары H, g. Т. е. все инволюции с бесконечными централизаторами в H порождают конечную подгруппу, которая содержится в слойно конечном радикале $R(H)$ группы H по определению слойно конечного радикала и по предложению 2. Лемма доказана.

Лемма 5. *В максимальной почти слойно конечной подгруппе H из G нет элементарной абелевой подгруппы 8-го порядка с почти регулярной инволюцией в H.*

Доказательство. Пусть лемма неверна и F – элементарная абелева подгруппа восьмого порядка из H, k – ее почти регулярная в H инволюция.

Так как по предложению 8 в бесконечной локально конечной группе четверная подгруппа Клейна обладает инволюцией с бесконечным централизатором, то в F найдется инволюция с бесконечным централизатором в H. Обозначим ее через m. Так как $F = <m > \times K$, где K – группа диэдра, то снова по тем же соображениям некоторая инволюция l из K также не является почти регулярной в H. Так как по лемме 4 инволюция m находится в конечном нормальном в H делителе H_m, а l, соответственно, в конечном нормальном в H делителе H_l, то их произведение ml также попадет в конечный нормальный делитель H_mH_l и ml также имеет бесконечный централизатор в H. Таким образом, подгруппа $L = < m > \times < l >$ имеет бесконечный централизатор в H конечного индекса в H. Теперь рассмотрим максимальную почти слойно конечную в G подгруппу W, содержащую периодическую часть C_k централизатора $C_G(k)$. Очевидно $F < C_k \le W$. Как и выше, найдем в $F = < k > \times L$ подгруппу L_1 четвертого порядка с бесконечным централизатором в W конечного индекса в W, нетривиально пересекающуюся с L. Таким образом, пересечение $L \cap L_1$ содержит некоторую инволюцию, периодическая часть централизатора которой содержится в $H \cap W$. Так как периодическая часть централизатора любой инволюции в G бесконечна, то H, W пересекаются по бесконечной подгруппе и, значит, пересекаются нетривиально по своим слойно конечным радикалам. По лемме 1 $H = W$ и, учитывая конечность централизатора $C_H(k)$ и бесконечность централизатора $C_W(k)$, получаем противоречие. Лемма доказана.

Предположим, что полная часть $\tilde{S}$ группы S обладает больше чем одной инволюцией, и кроме i в $\tilde{S}$ нашлась инволюция l.

Напомним, что в S имеется почти регулярная в H инволюция j. Если $jlj = 1$, то $< i > \times < l > \times <j >$ – элементарная абелева группа, существование которой противоречит лемме 5. Тогда $jlj = k \neq l$.

Если $ik = l$, то поскольку $i, l \in \tilde{S}$ полной части группы S, мы можем выбрать элементы $l_1^2 = l$, $k_1^2 = k$ и одновременно $jl_1j = k_1$.

Тогда $jl_1k_1j = jl_1jjk_1j = k_1jjl_1jj = k_1l_1$. Так как l_1, $k_1 \in \tilde{S}$, то $k_1l_1 = l_1k_1$ и $jl_1k_1j = l_1k_1$, т. е. $l_1k_1 \in C_H(j)$ и порядок элемента l_1k_1 равен четырем. Продолжая рассуждения таким же способом, получаем элемент $l_2k_2 \in C_H(j)$ порядка 8, элемент $l_3k_3 \in C_H(j)$ порядка 16 и т. д. Противоречие с почти регулярностью инволюции j в группе H означает невозможность случая $ik = l$.

Остался случай, когда $ik \neq l$. Чтобы его исключить, заметим, что для инволюции $kl \neq i$ выполняется $jklj = jkjjlj = jjljjk = lk$. Так как $l, k \in \tilde{S}$, то $kl = lk$ и тогда в S найдется элементарная абелева группа $< i > \times < kl > \times < j >$, которая, как мы показали выше не может содержаться в S.

Таким образом, в полной части $\tilde{S}$ инволюция i единственна. Отсюда следует, что $\tilde{S}$ является квазициклической 2-группой.

Инволюция i является единственной центральной инволюцией в группе S, так как если бы в ней нашлась другая центральная инволюция z, то в H нашлась бы и элементарная абелева группа $< i > \times < z > \times < j >$, существование которой противоречит лемме 5.

Завершение доказательства теоремы. Пусть k – некоторая инволюция из H, не сопряженная в M с инволюцией i и имеющая в H бесконечный централизатор. Класс инволюций, сопряженных с инволюцией k в группе G не может содержаться в подгруппе H, так как в этом случае подгруппа, порожденная этим классом, была бы почти слойно конечной подгруппой, инвариантной в группе G. Но в такой подгруппе всегда найдется конечная характеристическая подгруппа, нормализатор которой по условиям теоремы обладает почти слойно конечной периодической частью и совпадает с группой G, что невозможно. Тогда найдется инволюция $t = k^g \notin H$ (очевидно, в этом случае $g \notin M$). Аналогично найдется инволюция $u = i^f \notin H^g$. Рассмотрим группу $D = < u, t >$.

В случае нечетности порядка элемента ut группа D была бы группой Фробениуса. По свойствам групп Фробениуса в D найдется элемент d такой, что $u^d = t$. Тогда $(i^f)^d = u^d = t = k^g$, что влечет $i = fdg^{-1}kgd^{-1}f^{-1}$. Согласно предположению, $gd^{-1}f^{-1} \notin M$.

Тогда пересечение $H \cap fdg^{-1}Hgd^{-1}f^{-1}$ содержит инволюцию i. По лемме 4 инволюции i, k содержатся в $R(H)$, тогда инволюция $i = fdg^{-1}kgd^{-1}f^{-1}$ содержится в $R(fdg^{-1}Hgd^{-1}f^{-1})$. Отсюда по лемме 1 получаем совпадение $H = fdg^{-1}Hgd^{-1}f^{-1}$, что противоречит выбору элемента $gd^{-1}f^{-1} \notin M = N_G(H)$.

Значит, ut – элемент четного порядка. Обозначим через w инволюцию из $< ut >$. По свойствам групп диэдра w является центральной инволюцией в D и, следовательно, принадлежит H^g ввиду леммы 2 и бесконечности пересечения $C_G(t)$ с H^g (лемма 2 справедлива для групп H^g и M^g как для соответственно сопряженных с H и M).

Обозначим через S_1 силовскую 2-подгруппу из H^g, содержащую t и w. Так как в H^g все силовские 2-подгруппы сопряжены, то можно считать, не нарушая общности рассуждений, что i^g также принадлежит S_1, причем $i^g \neq t = k^g$, иначе получили бы противоречие с предположением.

Инволюция w имеет конечный централизатор в H^g, так как иначе ввиду леммы 2 инволюция u попала бы в H^g вместе с бесконечной периодической частью централизатора $C_G(w)$, а это противоречит выбору инволюции u.

Рассмотрим максимальную элементарную абелеву подгруппу $R = < t > \times < w >$ из S_1 (ввиду леммы 5 в группе H^g нет элементарных абелевых подгрупп 8-го порядка, содержащих инволюцию w).

Инволюция i является единственной центральной инволюцией в группе S и, так как силовская 2-подгруппа S из H сопряжена с силовской 2-подгруппой S_1 из H^g (см. предложение 6) при помощи некоторого элемента x, то группа S_1 обладает единственной центральной инволюцией. Если эта центральная инволюция не t, то ввиду максимальности элементарной абелевой подгруппы R центральная инволюция из S_1 совпадает либо с w, либо с tw. В первом случае w централизует бесконечную подгруппу $S_1 < H^g$, что невозможно ввиду ее почти регулярности в H^g, а во втором случае снова tw имеет бесконечный централизатор в H^g по лемме 4 имеющий конечный индекс в H^g, аналогично $| H^g : C_G(t) \cap H^g | < \infty$, тогда подгруппа $R = < tw > \times < t >$ также имеет бесконечный централизатор в H^g. Отсюда и централизатор элемента w в группе H^g бесконечен, что противоречит почти регулярности w в H^g. Таким образом, инволюция t является единственной центральной инволюцией в группе S_1. Тогда $i^x = t = k^g$, или $i = xg^{-1}kgx^{-1}$, причем $gx^{-1} \notin M$ по предположению. Тогда пересечение $H \cap xg^{-1}Hgx^{-1}$ содержит инволюцию $i = xg^{-1}kgx^{-1}$, снова, как и выше в такой ситуации для $i \in H \cap fdg^{-1}Hgd^{-1}f^{-1}$ получаем $H = xg^{-1}Hgx^{-1}$, что противоречит выбору элемента $gx^{-1} \notin M = N_G(H)$. Таким образом, все инволюции из H с бесконечными централизаторами в H сопряжены в M.

По предложению 4 группа H обладает слойно конечным радикалом $R(H)$, причем $\tilde{S}$ содержится в центре $Z(R(H))$ по предложению 9. Для произвольного элемента h из $M = N_G(H)$ подгруппа $\tilde{S}^h$ так же, как и $\tilde{S}$, является полной 2-подгруппой и также содержится в центре $Z(R(H))$ по предложению 9. Очевидно группа $< \tilde{S}, \tilde{S}^h >$ является полной абелевой 2-группой и по теореме 9.1.6 из [18] разлагается в прямое произведение квазициклических 2-подгрупп. Как мы показали выше, $\tilde{S}$ является квазициклической 2-группой, тогда ввиду сопряженности (см. предложение 6) силовских 2-подгрупп в H группа $< \tilde{S}, \tilde{S}^h >$ также является квазициклической 2-группой и $\tilde{S} = \tilde{S}^h$. Таким образом, подгруппа $\tilde{S}$ нормальна в M. Если бы $C_S(\tilde{S}) \neq \tilde{S}$, то $\tilde{S}$ как полная абелева группа выделялась бы прямым множителем в некоторой большей абелевой подгруппе из $C_S(\tilde{S})$. Но тогда в $C_S(\tilde{S}) \setminus \tilde{S}$ нашлась бы инволюция t с бесконечным централизатором в S. По доказанному выше, все инволюции из S с бесконечными централизаторами в H сопряжены в M, т. е. инволюция t из $C_S(\tilde{S}) \setminus \tilde{S}$ сопряжена с инволюцией $i \in \tilde{S}$. Противоречие с нормальностью $\tilde{S}$ в M. Следовательно, $C_S(\tilde{S}) = \tilde{S}$.

Так как подгруппа $\tilde{S}$ нормальна в S, то $j \in N_G(\tilde{S})$. Тогда j индуцирует в $\tilde{S}$ нетривиальный автоморфизм, переводящий каждый элемент из S в обратный. Ввиду строения группы автоморфизмов квазициклической группы других автоморфизмов у $\tilde{S}$ нет. Таким образом, $S = \tilde{S}\ \lambda\ (j)$ и инволюция j сопряжением переводит каждый элемент из S в обратный. Теорема доказана.

Мы полностью изучили строение бесконечной силовской 2-подгруппы в группах Шункова, не обладающих почти слойно конечной периодической частью, при условии почти слойной конечности периодических частей нормализаторов конечных нетривиальных подгрупп. Доказано, что если некоторая силовская 2-подгруппа такой группы бесконечна, то она является расширением квазициклической 2-группы при помощи обращающего автоморфизма. Этот результат найдет применение при изучении бесконечных групп с условиями конечности.

Библиографические ссылки

1. *Черников С. Н.* К теории бесконечных специальных *p*-групп // Докл. АН СССР. 1945. С. 71–74.
2. *Адян С. И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах. М. : Наука, 1975.
3. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах. М. : Наука, 1989.
4. *Сенашов В. И.* Почти слойная конечность периодической группы без инволюций // Укр. мат. журн. Т. 51(11). 1999. С. 1529–1533.
5. *Сенашов В. И.* Группы с условием минимальности для не почти слойно конечных подгрупп // Укр. мат. журн. Т. 43(7–8). 1991. С. 1002–1008.
6. *Сенашов В. И.* Достаточные условия почти слойной конечности группы // Укр. мат. журн. Т. 51(4). 1999. С. 472–485.
7. *Сенашов В. И., Шунков В. П.* Почти слойная конечность периодической части группы без инволюций // Дискретная математика. Т. 15(3). 2003. С. 91–104.
8. *Сенашов В. И.* О группах Шункова с сильно вложенной подгруппой // Труды ИММ УрО РАН. Т. 15(2). 2009. С. 203–210.
9. *Сенашов В. И.* О группах Шункова с сильно вложенной почти слойно конечной подгруппой // Труды ИММ УрО РАН. Т. 16(3). 2010. С. 234–239.
10. *Сенашов В. И.* О группах с сильно вложенной подгруппой, обладающей почти слойно конечной периодической частью // Укр. мат. журнал. Т. 64(3). 2012. С. 384–391.
11. *Шунков В. П.* О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. Т. 11(4). 1972. С. 470–493.
12. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М. : Наука, 1980.
13. *Шунков В. П.* T_0-группы. Новосибирск : Наука, 2000.
14. *Сенашов В. И.* О некоторых подгруппах в группах Шункова и о почти слойно конечных группах // Алгебра и ее приложения : тр. Междунар. алгебраич. конф. Нальчик. 2010. С. 149–153.
15. *Шунков В. П.* О локально конечных группах конечного ранга // Алгебра и логика, Т. 10(2). 1971. С. 199–225.
16. *Шунков В. П.* О проблеме минимальности для локально конечных групп // Алгебра и логика. Т. 9(2). 1970. С. 220–248.
17. *Курош А. Г.* Теория групп. 3-е изд. М. : Наука, 1967.
18. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. 3-е изд. М. : Наука, 1982.

УДК 539.374

ЛИНИИ ТОКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРАНДТЛЯ

С. И. Сенашов, Е. В. Филюшина

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева
Россия, 660014, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31. E-mail: sen@sibsau.ru, filyushina@sibsau.ru

Рассмотрены уравнения пластичности в стационарном двумерном случае. Для решения Прандтля описывающее сжатие пластического слоя жесткими плитами рассмотрено два поля скоростей. Одно из них решение Надаи, второе новое решение. Показано что линии тока у этих решений совпадают. Исходя из принципа максимума диссипации, указаны области использования этих полей скоростей.

Ключевые слова: пластичность, линии тока, поле скоростей, новые решения.

CURRENT LINES FOR PRANDTL SOLUTION

S. I. Senashov, E. V. Filyushina

Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev
31 “Krasnoyarsky Rabochy” prospect, Krasnoyarsk, 660014, Russia. E-mail: sen@sibsau.ru, filyushina@sibsau.ru

The authors consider plasticity equations in a stationary two-dimensional case. For Prandtl solution, which describes the compression of plastic layer by rigid plates, the authors consider two velocity fields. The first one is Nadai