

УДК 534.121.1

УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПАНЕЛИ СО СВОБОДНЫМ КРАЕМ В СОСТАВЕ КОНСТРУКЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА*

А. В. Лопатин, П. О. Деев, М. А. Рутковская

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева
Россия, Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31
E-mail: prokhor777@gmail.com

Рассматривается задача определения критического усилия сжатия прямоугольной трехслойной пластины со свободным краем, у которой два противоположных края шарнирно-закреплены, а один край жестко закреплен. В такой постановке задача не имеет до настоящего времени аналитического решения. В данной работе вариационные уравнения устойчивости пластины решены методом Канторовича и обобщенным методом Галеркина. В качестве базисных функций при решении использованы балочные функции специального вида. Получена аналитическая формула для критического усилия трехслойной пластины, по которой вычислены критические усилия для нескольких пластин с различными сочетаниями размеров. Верификация расчета в конечно-элементном пакете показала высокую точность полученной формулы и возможность ее использования в проекторочных расчетах при минимальных вычислительных затратах.

Ключевые слова: трехслойная пластина, критическое усилие, обобщенный метод Галеркина.

STIFFNESS OF THE SANDWICH PANEL WITH FREE EDGE AS A CONSTRUCTIONAL PART OF A SPACECRAFT

A. V. Lopatin, P. O. Deev, M. A. Rutkovskaya

Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev
31 "Krasnoyarskiy Rabochiy" prosp., Krasnoyarsk, 660014, Russia
E-mail: prokhor777@gmail.com

The article considers the problem of critical pressure load determination for rectangular sandwich plate with one free edge, two opposite gimbal-mounted edges and one cantilever edge. Gimbal-mounted edges of the plate are under linearly varying load. This problem is not analytically solved yet. In this work the variation equations of plate stability were solved via Kantorovich method and via generalized Galerkin method, with special beam functions as basic functions. The analytical formula for critical pressure load is obtained. Calculations of critical loads for several variants of plates were done using this formula and the results were verified via finite-element package. The verification shows that the analytical formula could be successfully used in engineering and design calculations with minimal computational cost and high accuracy.

Keywords: sandwich plate, critical load, generalized Galerkin method.

При проектировании трехслойных пластин, применяемых в конструкциях космических аппаратов, часто возникает задача расчета устойчивости пластины, когда один из ее краев свободен.

Задача устойчивости такой пластины наиболее подробно изучена для случая, когда к шарнирно закрепленным краям приложена равномерная сжимающая нагрузка.

Вместе с тем большой практический интерес представляет случай, когда к шарнирно закрепленным краям пластины приложены линейно изменяющиеся усилия.

Уравнения устойчивости такой пластины содержат переменный коэффициент, и поэтому их интегрирование оказывается затруднительным. В данной статье решена задача определения критических усилий для трехслойной пластины со свободным краем под действием линейно-изменяющейся нагрузки.

Рассмотрим трехслойную пластину с одинаковыми композитными несущими слоями и ортотропным заполнителем. Два противоположных края пластины шарнирно-оперты, а один край жестко закреплен.

Пластина нагружена в своей плоскости линейно-изменяющимся усилием.

*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение № 14B37.21.0405.

Запишем выражения для потенциальной энергии деформации трехслойной пластины [1]:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[D_{11} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + D_{22} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right)^2 + D_{33} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 + K_x \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + K_y \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (1)$$

и для работы внешних сил:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[N_x^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2N_{xy}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + N_y^0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (2)$$

При рассматриваемом нагружении

$$N_x^0 = -N \left(1 - 2 \frac{y}{b} \right), \quad N_{xy}^0 = 0, \quad N_y^0 = 0. \quad (3)$$

Вариация энергии деформированной пластины

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_0^b \int_0^a \left[D_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right] \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + \\ & + \left(D_{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + D_{33} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) + \\ & + D_{33} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) + K_x \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta \theta_x + \\ & + K_x \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + K_y \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta \theta_y + \\ & + K_y \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy. \end{aligned} \quad (4)$$

и вариация работы внешних сил

$$\delta A = -\frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a N \left(1 - 2 \frac{y}{b} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dy \quad (5)$$

Таким образом, получим основное вариационное уравнение деформированной трехслойной пластины

$$\begin{aligned} & \int_0^b \int_0^a \left[D_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right] \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + \left(D_{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \times \\ & \times \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + D_{33} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) + D_{33} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \times \\ & \times \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) + K_x \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta \theta_x + K_x \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ & + K_y \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta \theta_y + K_y \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) - \\ & - N \left(1 - 2 \frac{y}{b} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] dx dy = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Получим решение уравнения (6) с помощью метода Канторовича и обобщенного метода Галеркина [2; 3].

Согласно методу Канторовича, представим прогиб и углы поворота в следующем виде

$$\begin{aligned} w &= w_m(y) \sin \lambda_m x \quad \theta_x = \theta_{xm}(y) \cos \lambda_m x \\ \theta_y &= \theta_{ym}(y) \sin \lambda_m x \quad \lambda_m = \frac{\pi m}{a} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (7)$$

Подставим (7) в (6) и выполним необходимые преобразования. Тогда получим

$$\begin{aligned} & \int_0^b \left[\left(D_{11} \lambda_m^2 \theta_{xm} - D_{12} \lambda_m \frac{d\theta_{ym}}{dy} \right) \delta \theta_{xm} + \right. \\ & + \left(D_{22} \frac{d\theta_{ym}}{dy} - D_{12} \lambda_m \theta_{xm} \right) \delta \left(\frac{d\theta_{ym}}{dy} \right) + \\ & + D_{33} \left(\frac{d\theta_{xm}}{dy} + \lambda_m \theta_{ym} \right) \delta \left(\frac{d\theta_{xm}}{dy} \right) + \\ & + D_{33} \left(\lambda_m \frac{d\theta_{xm}}{dy} + \lambda_m^2 \theta_{ym} \right) \delta \theta_{ym} + \\ & + K_x (\theta_{xm} + \lambda_m w_m) \delta \theta_{xm} + K_x (\lambda_m \theta_{xm} + \lambda_m^2 w_m) \delta w_m + \\ & + K_y \left(\theta_{ym} + \frac{dw_m}{dy} \right) \delta \theta_{ym} + K_y \left(\theta_{ym} + \frac{dw_m}{dy} \right) \delta \left(\frac{dw_m}{dy} \right) - \\ & \left. - \lambda_m^2 N \left(1 - 2 \frac{y}{b} \right) w_m \delta w_m \right] dy = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее выполним операцию варьирования функционала в уравнении (8), и получим три вариационных уравнения с естественными граничными условиями

$$\begin{aligned} & \int_0^b \left[K_x (\lambda_m \theta_{xm} + \lambda_m^2 w_m) - K_y \left(\frac{d\theta_{ym}}{dy} + \frac{d^2 w_m}{dy^2} \right) - \right. \\ & \left. - \lambda_m^2 N \left(1 - 2 \frac{y}{b} \right) w_m \right] \delta w_m dy + \left[K_y \left(\theta_{ym} + \frac{dw_m}{dy} \right) \delta w_m \right]_0^b = 0, \\ & \int_0^b \left[K_x (\theta_{xm} + \lambda_m w_m) + \left(D_{11} \lambda_m^2 \theta_{xm} - D_{12} \lambda_m \frac{d\theta_{ym}}{dy} \right) - \right. \\ & - D_{33} \left(\frac{d^2 \theta_{xm}}{dy^2} + \lambda_m \frac{d\theta_{ym}}{dy} \right) \right] \delta \theta_{xm} dy + \\ & + \left[D_{33} \left(\frac{d\theta_{xm}}{dy} + \lambda_m \theta_{ym} \right) \delta \theta_{xm} \right]_0^b = 0, \\ & \int_0^b \left[K_y \left(\theta_{ym} + \lambda_m \frac{dw_m}{dy} \right) - \left(D_{22} \frac{d^2 \theta_{ym}}{dy^2} - D_{12} \lambda_m \frac{d\theta_{xm}}{dy} \right) + \right. \\ & + D_{33} \left(\lambda_m \frac{d\theta_{xm}}{dy} + \lambda_m^2 \theta_{ym} \right) \right] \delta \theta_{ym} dy + \\ & + \left[\left(D_{22} \frac{d\theta_{ym}}{dy} - D_{12} \lambda_m \theta_{xm} \right) \delta \theta_{ym} \right]_0^b = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Решим систему вариационных уравнений (9) обобщенным методом Галеркина. В соответствии с этим, представим прогиб и углы поворота в следующем виде

$$\begin{aligned} w_m &= A_m U_y(y), \quad \theta_{xm} = B_m U_y(y), \\ \theta_{ym} &= C_m V_y(y), \end{aligned} \quad (10)$$

здесь A_m , B_m , C_m – неизвестные числа, подлежащие определению; $U_y(y)$, $V_y(y)$ – известные функции, аппроксимирующие прогиб и углы поворотов. Эти функции имеют вид

$$\begin{aligned} U_y(y) &= \frac{y}{b} \left[\frac{y^3}{b^3} - 4 \frac{y^2}{b^2} + 6 \frac{y}{b} - 12 \gamma_y \left(\frac{y}{b} - 2 \right) \right], \\ V_y(y) &= \frac{y}{b} \left(\frac{y^2}{3b^2} - \frac{y}{b} + 1 \right) \end{aligned} \quad (11)$$

где $\gamma_y = \frac{K_y b^2}{D_{22}}$.

Вариации функций (11) будут

$$w_m = U_y \delta A_m, \quad \theta_{xm} = U_y \delta B_m, \quad \theta_{ym} = V_y \delta C_m. \quad (12)$$

Подставив (10) в (9), с учетом (12), получим

$$\begin{aligned} & \int_0^b \left[K_x (\lambda_m B_m U_y + \lambda_m^2 A_m U_y) - K_y \left(C_m \frac{dV_y}{dy} + A_m \frac{d^2 U_y}{dy^2} \right) - \right. \\ & \quad \left. - \lambda_m^2 N \left(1 - 2 \frac{y}{b} \right) A_m U_y \right] U_y \delta A_m dy + \\ & \quad + \left[K_y \left(C_m V_y + A_m \frac{dU_y}{dy} \right) U_y \delta A_m \right]_0^b = 0, \\ & \int_0^b \left[K_x (B_m U_y + \lambda_m A_m U_y) + \left(D_{11} \lambda_m^2 B_m U_y - D_{12} \lambda_m C_m \frac{dV_y}{dy} \right) - \right. \\ & \quad \left. - D_{33} \left(B_m \frac{d^2 U_y}{dy^2} + \lambda_m C_m \frac{dV_y}{dy} \right) \right] U_y \delta B_m dy + \\ & \quad + \left[D_{33} \left(B_m \frac{dU_y}{dy} + \lambda_m C_m V_y \right) U_y \delta B_m \right]_0^b = 0, \\ & \int_0^b \left[K_y \left(C_m V_y + A_m \frac{dU_y}{dy} \right) - \left(D_{22} C_m \frac{d^2 V_y}{dy^2} - D_{12} \lambda_m B_m \frac{dU_y}{dy} \right) + \right. \\ & \quad \left. + D_{33} \left(\lambda_m B_m \frac{dU_y}{dy} + \lambda_m^2 C_m V_y \right) \right] V_y \delta C_m dy + \\ & \quad + \left[\left(D_{22} C_m \frac{dV_y}{dy} - D_{12} \lambda_m B_m U_y \right) V_y \delta C_m \right]_0^b = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

Учитывая произвольность вариаций δA_m , δB_m и δC_m получим систему разрешающих уравнений обобщенного метода Галеркина в следующем виде

$$\begin{aligned} & A_m \left(K_x \lambda_m^2 \int_0^b U_y^2 dy - K_y \int_0^b U_y \frac{d^2 U_y}{dy^2} dy + K_y \left[U_y \frac{dU_y}{dy} \right]_0^b \right) + \\ & \quad + B_m K_x \lambda_m \int_0^b U_y^2 dy - C_m \left(K_y \int_0^b U_y \frac{dV_y}{dy} dy - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. - K_y \left[V_y U_y \right]_0^b \right) - A_m \lambda_m^2 N \int_0^b \left(1 - 2 \frac{y}{b} \right) U_y^2 dy = 0 \\ & A_m K_x \lambda_m \int_0^b U_y^2 dy + B_m \left(K_x \int_0^b U_y^2 dy + D_{11} \lambda_m^2 \int_0^b U_y^2 dy - \right. \\ & \quad \left. - D_{33} \int_0^b U_y \frac{d^2 U_y}{dy^2} dy + D_{33} \left[U_y \frac{dU_y}{dy} \right]_0^b \right) - \\ & \quad - C_m \left(D_{12} \lambda_m \int_0^b U_y \frac{dV_y}{dy} dy + D_{33} \lambda_m \int_0^b U_y \frac{dV_y}{dy} dy - \right. \\ & \quad \left. - D_{33} \lambda_m \left[U_y V_y \right]_0^b \right) = 0, \\ & A_m K_y \int_0^b V_y \frac{dU_y}{dy} dy + B_m \left(D_{12} \lambda_m \int_0^b V_y \frac{dU_y}{dy} dy + \right. \\ & \quad \left. + D_{33} \lambda_m \int_0^b V_y \frac{dU_y}{dy} dy - D_{12} \lambda_m \left[U_y V_y \right]_0^b \right) + \\ & \quad + C_m \left(D_{33} \lambda_m^2 \int_0^b V_y^2 dy - D_{22} \int_0^b V_y \frac{d^2 V_y}{dy^2} dy + \right. \\ & \quad \left. + K_y \int_0^b V_y^2 dy + D_{22} \left[V_y \frac{dV_y}{dy} \right]_0^b \right) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Введем обозначения входящих в уравнения (14) интегралов и безынтегральных членов

$$\begin{aligned} I_{1y} &= \int_0^b U_y^2 dy; \quad J_{1y} = \int_0^b V_y^2 dy; \\ I_{2y} &= \int_0^b U_y \frac{d^2 U_y}{dy^2} dy; \quad J_{2y} = \int_0^b V_y \frac{d^2 V_y}{dy^2} dy; \\ I_{3y} &= \int_0^b U_y \frac{dV_y}{dy} dy; \quad J_{3y} = \int_0^b V_y \frac{dU_y}{dy} dy; \\ \bar{I}_{1y} &= \int_0^b \left(1 - 2 \frac{y}{b} \right) U_y^2 dy; \end{aligned} \quad (15)$$

$$R_{1y} = \left[U_y V_y \right]_0^b; \quad R_{2y} = \left[U_y \frac{dU_y}{dy} \right]_0^b; \quad R_{3y} = \left[V_y \frac{dV_y}{dy} \right]_0^b.$$

Численные значения интегралов и безынтегральных членов (15) будут

$$\begin{aligned} I_{1y} &= \frac{8b}{315} \gamma_{1y}; \quad J_{1y} = \frac{b}{14}; \quad I_{2y} = -\frac{12}{35b} \gamma_{2y}; \\ J_{2y} &= -\frac{1}{5b}; \quad I_{3y} = \frac{\gamma_{3y}}{35}; \quad J_{3y} = \frac{\gamma_{3y}}{35}; \\ J_{3y} &= \frac{6}{35} \gamma_{3y}; \quad \bar{I}_{1y} = -\frac{2b}{315} \gamma_{1y}; \quad R_{1y} = \gamma_{1y}; \\ R_{2y} &= \frac{12}{b} \gamma_{1y}; \quad R_{3y} = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{1y} &= 91 + 999 \gamma_y + 3024 \gamma_y^2; \\ \gamma_{2y} &= -5 + 28 \gamma_y + 560 \gamma_y^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{1y} &= 220 + 2043\gamma_y + 4536\gamma_y^2; \\ \bar{\gamma}_{1y} &= 1 + 4\gamma_y; \quad \bar{\gamma}_{3y} = 5 + 14\gamma_y; \quad \gamma_{3y} = 5 + 56\gamma_y. \end{aligned} \quad (17)$$

Принимая во внимание, что $R_{1y} - I_{3y} = J_{3y}$, и подставляя (16) в (14), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных чисел A_m , B_m и C_m

$$\begin{aligned} &\left(K_x \lambda_m^2 \frac{8b}{315} \gamma_{1y} + K_y \frac{12}{35b} \gamma_{2y} + K_y \frac{12}{b} \gamma_{1y} \right) A_m + \\ &+ K_x \lambda_m \frac{8b}{315} \gamma_{1y} B_m + K_y \frac{6}{35} \gamma_{3y} C_m - \lambda_m^2 N \frac{2b}{315} \gamma_{1y} A_m = 0, \\ &K_x \lambda_m \frac{8b}{315} \gamma_{1y} A_m + \left(K_x \frac{8b}{315} \gamma_{1y} + D_{11} \lambda_m^2 \frac{8b}{315} \gamma_{1y} + \right. \\ &\quad \left. + D_{33} \frac{12}{35b} \gamma_{2y} + D_{33} \frac{12}{b} \gamma_{1y} \right) B_m + \\ &\quad + \left(D_{33} \lambda_m \frac{6}{35} \gamma_{3y} - D_{12} \lambda_m \frac{\gamma_{3y}}{35} \right) C_m = 0, \\ &K_y \frac{6}{35} \gamma_{3y} A_m + \left(D_{33} \lambda_m \frac{6}{35} \gamma_{3y} - D_{12} \lambda_m \frac{\gamma_{3y}}{35} \right) B_m + \\ &\quad + \left(K_y \frac{b}{14} + D_{22} \frac{1}{5b} + D_{33} \frac{b}{14} \lambda_m^2 \right) C_m = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Приведем систему (18) к удобному для вычислений безразмерному виду. Для этого умножим обе части каждого уравнения на величину $\frac{315b}{2\lambda_m^2 \sqrt{D_{11}D_{22}}}$, и, обозначив $F_{xm} = aB_m$ и $F_{ym} = bC_m$, получим следующее матричное уравнение

$$\mathbf{A}\mathbf{F} = \mathbf{O} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{Bmatrix} a_{11} - \eta b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix}; \\ \mathbf{F} &= \begin{Bmatrix} A_m \\ F_{xm} \\ F_{ym} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{O} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

Элементы матрицы $\mathbf{A}$ имеют вид

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left(4\gamma_{1y}\gamma_x r + \frac{54\gamma_{2y}\gamma_y}{\pi^2 m^2 r} + \frac{1890\bar{\gamma}_{1y}\gamma_y}{\pi^2 m^2 r} \right); \\ b_{11} &= \gamma_{1y}; \quad a_{12} = \frac{4\gamma_{1y}\gamma_x r}{\pi m}; \quad a_{13} = \frac{27\bar{\gamma}_{3y}\gamma_y}{\pi^2 m^2 r}; \\ a_{21} &= a_{12}; \\ a_{22} &= \left(\frac{4\gamma_{1y}\gamma_x r}{\pi^2 m^2} + 4\gamma_{1y} r + \frac{54\gamma_{2y}r_{33}}{\pi^2 m^2} + \frac{1890\bar{\gamma}_{1y}r_{33}}{\pi^2 m^2} \right); \\ a_{23} &= \left(\frac{27\bar{\gamma}_{3y}r_{33}}{\pi m} - \frac{9\gamma_{3y}r_{12}}{2\pi m} \right); \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} a_{31} &= a_{13}; \quad a_{32} = a_{23}; \\ a_{33} &= \left(\frac{45\gamma_y}{2\pi^2 m^2 r} + \frac{63}{\pi^2 m^2 r} + \frac{45r_{33}}{2} \right). \end{aligned}$$

Величина η , входящая в уравнение (19) и определяемая равенством

$$\eta = \frac{Nb^2}{\sqrt{D_{11}D_{22}}} \quad (22)$$

называется безразмерным коэффициентом устойчивости трехслойной пластины.

Однородная система (19) будет иметь нетривиальное решение только тогда, когда будет выполнено условие

$$\det(\mathbf{A}) = 0. \quad (23)$$

Решив уравнение (23), получим аналитическое выражение параметра η , которое после упрощения с учетом равенств (28) примет следующий вид

$$\eta = \frac{a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2}{b_{11}(a_{33}a_{22} - a_{23}^2)}. \quad (24)$$

Величина η зависит от числа полуволн деформации m вдоль оси ординат. Точке бифуркации формы равновесия пластины, очевидно, соответствует такое m , при котором η принимает минимальное значение. Это значение и будет соответствовать критическому коэффициенту устойчивости пластины $\eta_{кр}$.

При известном значении $\eta_{кр}$, из равенства (22) определим критическое усилие для трехслойной пластины

$$N_{кр} = \eta_{кр} \frac{\sqrt{D_{11}D_{22}}}{b^2}. \quad (25)$$

В качестве примера расчета, определим критическое усилие для трехслойной пластины, с рассматриваемым закреплением краев. Суммарная толщина несущих слоев пластины принимает значения $t = 0.001, 0.002$ м; толщина слоя заполнителя $h = 0.01, 0.05, 0.1$ м.

Материал несущих слоев характеризуется модулями Юнга $E_x = E_y = 54.55$ ГПа, модулями сдвига $G_{xy} = 20.67$ ГПа, $G_{xz} = G_{yz} = 3.78$ ГПа, и коэффициентами Пуассона $\nu_{xy} = 0.32, \nu_{yx} = 0.32$. Материал заполнителя характеризуется только модулями сдвига $G_{xz} = 440$ МПа, $G_{yz} = 220$ МПа. Размеры пластины в плане: $a = 0.5; 1; 1.5; 2; 3; 5$ м; $b = 1$ м. Результаты расчетов для пластины представлены в табл. 1.

Верификация результатов расчета критического усилия выполнена в конечно-элементном пакете COSMOS/M с помощью конечного элемента SHELL4L [4] (табл. 2). Сравнение результатов обоих расчетов позволяет сделать вывод о достаточной точности предлагаемого метода, так как расхождение результатов не превышает 5 %.

Таблица 1

Критические усилия для трехслойной пластины

Параметр			$a, \text{м}; (b=1 \text{ м})$					
			0.5	1	1.5	2	3	5
$h, \text{м};$ ($t = 0.001 \text{ м}$)	0.01	$\eta_{\text{кр}}$	75.402	28.766	22.358	22.846	22.358	22.086
		$N_{\text{кр}}, \text{кН/м}$	114.08	43.524	33.828	34.566	33.828	33.416
		m	1	1	1	1	2	3
	0.05	$\eta_{\text{кр}}$	71.962	28.616	22.441	22.963	22.441	22.189
		$N_{\text{кр}}, \text{кН/м}$	2577.8	1025.1	803.88	822.61	803.88	794.86
		m	1	1	1	1	2	3
	0.1	$\eta_{\text{кр}}$	67.838	28.347	22.474	23.045	22.474	22.250
		$N_{\text{кр}}, \text{кН/м}$	9909.6	4140.8	3283.0	3366.4	3283.0	3250.2
		m	1	1	1	1	2	3

Таблица 2

Критические усилия для трехслойной пластины, вычисленные МКЭ

Параметр			$a, \text{м}; (b=1 \text{ м})$					
			0.5	1	1.5	2	3	5
$h, \text{м};$ ($t = 0.001 \text{ м}$)	0.01	$N_{\text{кр}}, \text{кН/м}$	111.13	42.611	33.342	34.169	33.394	33.047
		m	1	1	1	1	2	3
	0.05	$N_{\text{кр}}, \text{кН/м}$	2493.7	996.57	786.76	807.61	787.88	780.53
		m	1	1	1	1	2	3
	0.1	$N_{\text{кр}}, \text{кН/м}$	9621.2	3997.8	3190.6	3281.4	3195.3	3169.2
		m	1	1	1	1	2	3

Таким образом, решена задача определения критических усилий трехслойной пластины со свободным краем, у которой два противоположных края шарнирно-закреплены, а один край жестко закреплен. Для решения уравнений устойчивости был использован метод Канторовича и обобщенный метод Галеркина. Выполнена верификация полученного аналитического решения, показавшая, что определение критических усилий может быть выполнено с достаточной инженерной точностью без значительных вычислительных затрат. Поэтому полученные формулы могут быть полезными при проектировании трехслойных пластин.

Библиографические ссылки

1. Vasiliev V. V. Mechanics of composite structures. Taylor & Francis, 1993.
2. Kantorovich L. V., Krylov V. I. Approximate methods of higher analysis. New York : John Wiley & Sons, 1958.

3. Королев В. И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. М. : Машиностроение, 1965.

4. COSMOS/M: User Guide // Structural Research & Analysis Corporation, 2003.

References

1. Vasiliev V. V. Mechanics of composite structures. Taylor & Francis, 1993.
2. Kantorovich L. V., Krylov V. I. Approximate methods of higher analysis. New York : John Wiley & Sons, 1958.
3. Korolyov V. I. Sloistye anizotropnye plastinki i obolochki iz armirovannykh plastmass (Laminate anisotropic plates and shells made of fiber reinforced plastics). Moscow : Mashinostroenie, 1965.
4. COSMOS/M: User Guide // Structural Research & Analysis Corporation, 2003.

© Лопатин А. В., Деев П. О., Рутковская М. А., 2013