переводящий каждый элемент из $S$ в обратный. Ввиду строения группы автоморфизмов квазициклической группы других автоморфизмов у $\tilde{S}$ нет. Таким образом, $S = \tilde{S}\ \lambda\ (j)$ и инволюция $j$ сопряжением переводит каждый элемент из $S$ в обратный. Теорема доказана.

Мы полностью изучили строение бесконечной силовской 2-подгруппы в группах Шункова, не обладающих почти слойно конечной периодической частью, при условии почти слойной конечности периодических частей нормализаторов конечных нетривиальных подгрупп. Доказано, что если некоторая силовская 2-подгруппа такой группы бесконечна, то она является расширением квазициклической 2-группы при помощи обращающего автоморфизма. Этот результат найдет применение при изучении бесконечных групп с условиями конечности.

**Библиографические ссылки**


1. *Черников С. Н.* К теории бесконечных специальных *p*-групп // Докл. АН СССР. 1945. С. 71–74.
2. *Адян С. И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах. М. : Наука, 1975.
3. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах. М. : Наука, 1989.
4. *Сенашов В. И.* Почти слойная конечность периодической группы без инволюций // Укр. мат. журн. Т. 51(11). 1999. С. 1529–1533.
5. *Сенашов В. И.* Группы с условием минимальности для не почти слойно конечных подгрупп // Укр. мат. журн. Т. 43(7–8). 1991. С. 1002–1008.
6. *Сенашов В. И.* Достаточные условия почти слойной конечности группы // Укр. мат. журн. Т. 51(4). 1999. С. 472–485.
7. *Сенашов В. И., Шунков В. П.* Почти слойная конечность периодической части группы без инволюций // Дискретная математика. Т. 15(3). 2003. С. 91–104.
8. *Сенашов В. И.* О группах Шункова с сильно вложенной подгруппой // Труды ИММ УрО РАН. Т. 15(2). 2009. С. 203–210.
9. *Сенашов В. И.* О группах Шункова с сильно вложенной почти слойно конечной подгруппой // Труды ИММ УрО РАН. Т. 16(3). 2010. С. 234–239.
10. *Сенашов В. И.* О группах с сильно вложенной подгруппой, обладающей почти слойно конечной периодической частью // Укр. мат. журнал. Т. 64(3). 2012. С. 384–391.
11. *Шунков В. П.* О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. Т. 11(4). 1972. С. 470–493.
12. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М. : Наука, 1980.
13. *Шунков В. П.* $T_0$-группы. Новосибирск : Наука, 2000.
14. *Сенашов В. И.* О некоторых подгруппах в группах Шункова и о почти слойно конечных группах // Алгебра и ее приложения : тр. Междунар. алгебраич. конф. Нальчик. 2010. С. 149–153.
15. *Шунков В. П.* О локально конечных группах конечного ранга // Алгебра и логика, Т. 10(2). 1971. С. 199–225.
16. *Шунков В. П.* О проблеме минимальности для локально конечных групп // Алгебра и логика. Т. 9(2). 1970. С. 220–248.
17. *Курош А. Г.* Теория групп. 3-е изд. М. : Наука, 1967.
18. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. 3-е изд. М. : Наука, 1982.


© Сенашов В. И., 2013

УДК 539.374

## ЛИНИИ ТОКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРАНДТЛЯ

С. И. Сенашов, Е. В. Филюшина

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева
Россия, 660014, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31. E-mail: sen@sibsau.ru, filyushina@sibsau.ru

*Рассмотрены уравнения пластичности в стационарном двумерном случае. Для решения Прандтля описывающее сжатие пластического слоя жесткими плитами рассмотрено два поля скоростей. Одно из них решение Надаи, второе новое решение. Показано что линии тока у этих решений совпадают. Исходя из принципа максимума диссипации, указаны области использования этих полей скоростей.*

*Ключевые слова: пластичность, линии тока, поле скоростей, новые решения.*

## CURRENT LINES FOR PRANDTL SOLUTION

S. I. Senashov, E. V. Filyushina

Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev
31 “Krasnoyarsky Rabochy” prospect, Krasnoyarsk, 660014, Russia. E-mail: sen@sibsau.ru, filyushina@sibsau.ru

*The authors consider plasticity equations in a stationary two-dimensional case. For Prandtl solution, which describes the compression of plastic layer by rigid plates, the authors consider two velocity fields. The first one is Nadai*

*solution, the second one is the new solution. The authors prove that the current lines in these solutions coincide. Based on the principle of maximum dissipation, the spheres of usage of these velocity fields are defined.*

*Keywords: plasticity, streamline, velocity field, new solutions.*

Рассмотрим уравнение идеальной пластичности в форме Сен-Венана-Леви. Они имеют вид

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}-2\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\cos 2\theta+\frac{\partial\theta}{\partial y}\sin 2\theta\right)=0,$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial y}-2\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\sin 2\theta-\frac{\partial\theta}{\partial y}\cos 2\theta\right)=0, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)tg\,2\theta+\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{\partial v_y}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0, \quad (2)$$

где $\sigma$ – гидростатическое давление; $\theta$ – угол между первым главным направлением тензора напряжений и осью $OX$; $v_x, v_y$ – компоненты вектора скорости, постоянная пластичности для простоты положена равной единице.

Уравнения (1), (2) описывают напряженно-деформированное состояние пластической среды.

Система уравнений (1)–(2) уже достаточно подробно изучена. Для нее известны группы симметрий, законы сохранения, точные решения. Обзор этих и других результатов можно найти в [1; 2].

Наиболее известное решение уравнений (1) – это решение Прандтля, которое можно использовать для описания напряженного состояния пластического слоя, сжимаемого жесткими плитами:

$$\sigma=-x-\sqrt{1-y^2},\quad y=\cos 2\theta. \quad (3)$$

Подставляя (3) в систему (2) получаем систему линейных уравнений для определения полей скоростей совместных с этим решением.

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}+2\frac{\partial v_x}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0. \quad (4)$$

Наиболее известное решение системы (4) – решение Надаи, которое имеет вид

$$v_x=x+2\sqrt{1-y^2},\quad v_y=-y. \quad (5)$$

В [3; 4] приведены другие решения системы (4).

Там же показано, что решение (5) не дает максимум диссипации энергии во всей области $|y|\le 1$.

Поэтому для описания деформируемого состояния следует использовать и другие поля скоростей. Приведем наиболее простое новое решение системы (4)

$$v_x=\left(\sqrt{\frac{1+y}{2}}-\sqrt{\frac{1-y}{2}}\right)\exp\left(\frac{-x-\sqrt{1-y^2}}{2}\right),$$

$$v_y=\left(\sqrt{\frac{1+y}{2}}+\sqrt{\frac{1-y}{2}}\right)\exp\left(\frac{-x-\sqrt{1-y^2}}{2}\right). \quad (6)$$

Для более полного анализа напряженно-деформированного состояния, кроме формул (4)–(6), необходимо использовать линии скольжения и линии тока. В данном случае нельзя использовать траектории движения точек среды, поскольку время явно не входит в уравнения (1)–(2). Использование временноподобных параметров [5], по нашему мнению, спорно.

Линии скольжения для решения Прандтля известны и являются частями циклоид (рис. 1).

Для построения линий тока следует решить систему уравнений

$$\frac{dx}{v_x}=\frac{dy}{v_y}.$$

Для решения Надаи эта система сводится к квадратуре

$$d(xy)=\sqrt{1-y^2}\,dy,$$

поэтому линии тока имеют вид

$$x=\int(\sqrt{1-y^2})/y\,dy\quad=$$

$$=-\sqrt{1-y^2}-\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y^2}\right)+C. \quad (7)$$

Эти линии тока приведены на рис. 2.

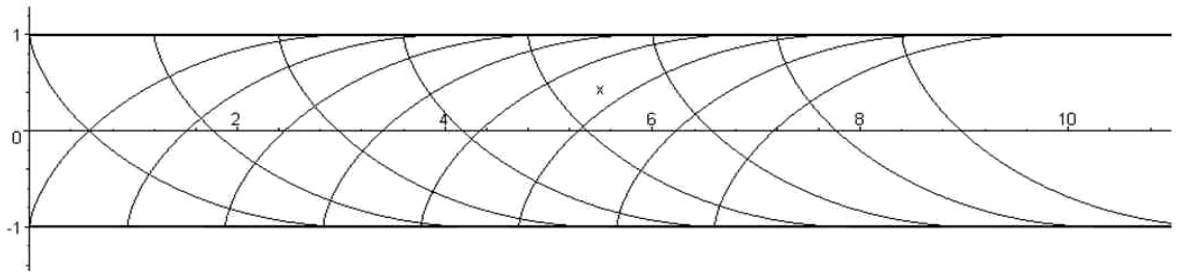


Рис. 1. Линии скольжения для решения Прандтля

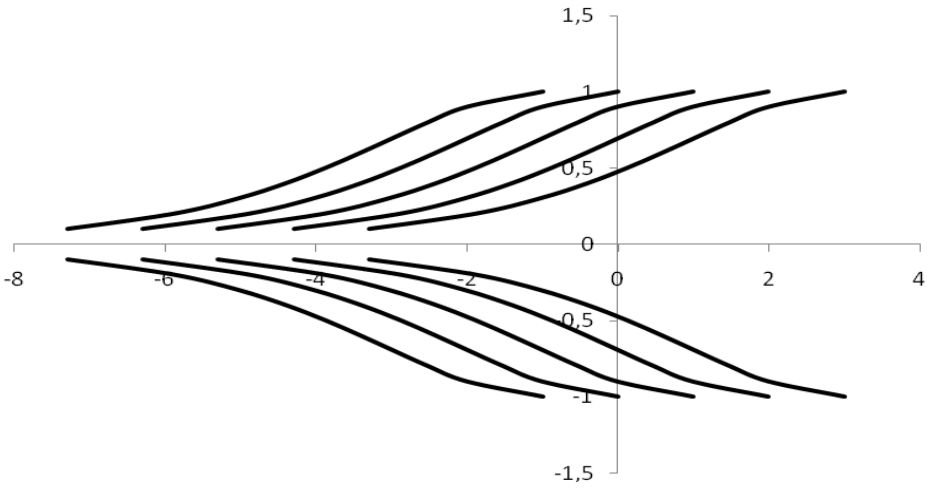


Рис. 2. Линии скольжения для решения Надаи

Найдем линии тока для поля скоростей (6). После несложных преобразований получаем

$$\frac{dx}{\sqrt{1+y}-\sqrt{1-y}}=\frac{dy}{\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}}.$$

Вычисляя квадратуры, получаем поле линий тока, совпадающее с (7).

Для дальнейшего анализа построенных решений вычислим диссипацию энергии для полей скоростей (5) и (6) и сравним полученные результаты. Известно, что согласно модифицированному принципу максимума Мизеса [6], на действительном поле скоростей диссипация должна быть максимальна:

$$\sigma_{ij}e_{ij}\geq\sigma_{ij}e^{*}_{ij},$$

где величины без звездочек – действительные компоненты тензора напряжений и тензора скоростей деформации, а со звездочкой – возможные.

Вычислим диссипацию:

$$D=\sigma_x e_x+\sigma_y e_y+2\tau e_{xy}=$$

$$=\frac{e_x^2+e_y^2+2e_{xy}^2}{\sqrt{e_x^2+e_y^2+2e_{xy}^2}}=\sqrt{e_x^2+e_y^2+2e_{xy}^2}.$$

Поскольку $e_x^2=e_y^2,\ 2e_{xy}=e_x\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}=H(y)e_x,$ то $D=|e_x|\sqrt{2+H^2(y)}.$

Для решения Надаи диссипация равна

$$D_1=\sqrt{2+H^2(y)}.$$

Для решения (6) аналогично получаем

$$D_2=\frac{1}{2}\left|\sqrt{\frac{1+y}{2}}-\sqrt{\frac{1-y}{2}}\right|D_1\exp\left(\frac{-x-\sqrt{1-y^2}}{2}\right).$$

Из сравнения $D_1$ и $D_2$ следует, что при $x>0$ есть области, где предпочтительнее поле скоростей Надаи, а при $x<0$ есть области, где предпочтительнее поле скоростей (6).

Из полученных результатов следует, что известное поле скоростей Надаи не всегда является предпочтительным перед другими полями скоростей. А поскольку система уравнений (4) имеет бесконечно много решений, то задачу по построению полей скоростей, соответствующих решению Прандтля, нельзя считать окончательно решенной.

**Библиографические ссылки**

1. *Сенашов С. И., Гомонова О. В., Яхно А. Н.* Математические вопросы двумерных уравнений пластичности : монография. Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. Красноярск, 2012.

2. *Сенашов С. И., Филюшина Е. В.* Преобразование точных решений уравнений пластичности высшими симметриями // Вестник СибГАУ. 2011. № 4 (37). С. 90–92.

3. *Сенашов С. И., Гомонова О. В.* Новые поля скоростей, описывающие сжатие слоя между плитами // Вестник ЧГПУ. Сер. Механика предельного состояния. 2012. №4. С. 89–95.

4. *Сенашов С. И., Гомонова О. В.* О построении полей скоростей для известных неособых полей напряжений // Вестник СибГАУ. 2011. № 5 (38). С. 88–90.

5. *Соколовский В. В.* Теория пластичности // М. : Высш. школа, 1969.

6. Предельное состояние деформированных тел и горных пород / *Д. Д. Ивлев* [и др.]. М. : Физматлит, 2008.

© Сенашов С. И., Филюшина Е. В., 2013