

Ключевым этапом, отраженным на схеме, является генерация данных и анализ покрытия кода, который необходим для оценки эффективности проведенного тестирования. Не будем подробно останавливаться на каждом этапе работы системы, лишь отметим, что цель анализатора – сгенерировать данные, которые приведут к ошибке в тестируемом приложении. Для оценки эффективности такого тестирования необходимо оценить степень покрытия бинарного кода тестами. В ходе работы над программным средством были протестированы различные решения оценки покрытия кода: от отладки до динамической бинарной инструментации [4]. Последняя технология показала наиболее значительный прирост к скорости анализа (на 3–4 порядка в сравнении с отладкой). DBI-технология использует виртуальную машину уровня процесса ОС, в которую внедряется специальная dll, описывающая то, как необходимо проводить анализ тестируемой программы. Такая схема позволяет в значительной степени оптимизировать анализ, так как операционной системе нет необходимости в переключении контекста процессора между анализатором и тестируемой программой.

Разработанная система была реализована с использованием следующих фреймворков:

- 1) Sulleу-фреймворк – для генерации тестовых данных [5].
- 2) Intel PIN – DBI фреймворк для виртуализации тестируемого приложения [6].
- 3) библиотека PyDBG – для отладки тестируемого приложения и перехвата исключений.

Таким образом, авторами была разработана методика и программное средство, обладающее возможностью тестирования различных приложений, обрабатывающих сетевой трафик и различные пользовательские файлы. На данный момент проект находится в стадии альфа-тестирования. Дальнейшая работа пред-

полагает расширение числа доступных протоколов для тестирования, использование более эффективных методик анализа покрытия кода, а также применение интеллектуальных алгоритмов для генерации тестовых данных с учетом результатов покрытия кода тестами.

В заключение хотелось бы отметить, что поиск уязвимостей является на сегодняшний день очень важным и необходимым этапом жизненного цикла разработки и поддержки ПО.

## References

1. Giuseppe Desoli, Nikolay Mateev, Evelyn Duesterwald, Paolo Faraboschi, and Joseph A. Fisher. Deli: A new run-time control point. *In Proceedings of the 35th Annual Symposium on Microarchitecture (MICRO35)*, p. 257–270, Istanbul, Turkey, November 2002.
2. Henry S., Kafura D. Software structure metrics based on information flow. *IEEE Transactions on Software Engineering*, vol. SE-7, Issue 5, Sept. 1981, p. 510–518.
3. Marco Cova, Viktoria Felmetsger, Greg Banks, Giovanni Vigna. Static Detection of Vulnerabilities in x86 Executables, *Computer Security Applications Conference, 2006. ACSAC '06. 22nd Annual*, vol. 2, no. 7, p. 269–278.
4. DBI (2007). Available at: <http://uninformed.org/index.cgi?v=7&a=1&p=3> (accessed 14.10.2013).
5. Pedram Amini. Fuzzing Framework. *Black Hat USA*, vol. 14, Aug. 2007, p. 211–217.
6. PIN description. Available at: <http://software.intel.com/en-us/articles/pin-a-dynamic-binary-instrumentation-tool> (accessed 14.10.2013).

© Шудрак М. О., Золотарев В. В.,  
Лубкин И. А., 2013

УДК 517.55

## ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ КРАТНОГО СТЕПЕННОГО РЯДА С ПОМОЩЬЮ $m$ -ОДНОРОДНЫХ ПОЛИНОМОВ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ В ОБОБЩЕННУЮ ЗВЕЗДУ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

Е. И. Яковлев

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева  
Российская Федерация, Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31  
E-mail: yei@nm.ru

Рассмотрено аналитическое продолжение кратного степенного ряда в класс областей, обобщающих звездные. С помощью переразложения кратного степенного ряда по  $m$ -однородным полиномам строится продолжение этого ряда в  $(m_1, \dots, m_n)$ -круговые области, которые являются естественным обобщением круговых областей в  $C^n$ . Опираясь на это разложение, данный кратный степенной ряд аналитически продолжается в максимальную  $m$ -звездную область, называемую  $m$ -звездой Миттаг-Леффлера функции  $f$ , определяемой этим рядом. Это аналитическое продолжение представляет собой суперпозицию  $m$ -однородных полиномов, по которым разлагается степенной ряд, с бесконечной треугольной матрицей, элементы которой не зависят от функции  $f$ . Приводится пример, когда  $m$ -звезда Миттаг-Леффлера отличается от обычной звезды Миттаг-Леффлера.

*Ключевые слова:* кратный степенной ряд, звезда Миттаг-Леффлера, главная звезда, аналитическое продолжение, суммирование кратного степенного ряда.

# ABOUT ANALYTICAL CONTINUATION OF THE MULTIPLE POWER SERIES WITH THE $m$ -HOMOGENEOUS POLYNOMIAL MATRIX METHOD TO THE GENERALIZED STAR MITTAG-LEFFLER

E. I. Yakovlev

Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev  
31, Krasnoyarsky Rabochy Av., Krasnoyarsk, 660014, Russian Federation. E-mail: yei@nm.ru

*The work is devoted to the analytical continuation of the multiple power series in the class of areas generalizing stars. With the help of multiple power series reanalysis by  $m$ -homogeneous polynomials constructed continuation of this series of in  $(m_1, \dots, m_n)$ -circular area, which are a natural generalization of circular areas in  $C^n$ . Based on this decomposition, the multiple of a power series analytically continues maximum  $m$ -star region called  $m$ -star Mittag-Leffler function  $f$  defined by this row. This analytic continuation is a superposition of  $m$ -homogeneous polynomials, which decomposes a power series with an infinite triangular matrix, which elements do not depend on the function  $f$ . The paper contains an example, when  $m$ -star Mittag-Leffler differs from a normal star Mittag-Leffler.*

*Keywords:* multiple power series, star of Mittag-Leffler, the main star, analytic continuation, summation of multiple power series.

В одномерном случае продолжение степенного ряда в максимальную звездную область впервые было построено Миттаг-Леффлером, поэтому такая область называется звездой Миттаг-Леффлера или главной звездой данного степенного ряда. Известны обобщения этого факта на случай нескольких переменных для класса звездных областей. В связи с новой волной интереса к суммированию расходящихся рядов, являющихся формальными решениями дифференциальных уравнений (например, [1–3]), в настоящей работе предлагается матричный метод, суммирующий ряд из полиномов в параболической звезде Миттаг-Леффлера или  $x$ -звезде Миттаг-Леффлера. Параболическая звезда Миттаг-Леффлера является естественным обобщением обычной звезды, но не всегда с ней совпадает. В работе приводится пример функции, у которой (1, 2)-звезда не совпадает с главной звездой.

Пусть  $x \in R^n$ ;  $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$ . Множество  $G$  в  $C^n$  назовем  $x$ -параболическим, если вместе с каждой точкой  $z^0 = (z_1^0, \dots, z_n^0)$  в множестве  $G$  содержит  $x$ -отрезок

$$\{z \in C^n : z_1 = z_1^0 t^{x_1}, \dots, z_n = z_n^0 t^{x_n} : \forall t \in [0, 1]\} \subset G.$$

Область  $D$  из  $C^n$  с центром в точке  $a$  назовем обобщенно  $m$ -круговой  $m = (m_1, \dots, m_n)$   $m_j \in N$  и  $m_1, \dots, m_n$  взаимно просты), если вместе с каждой точкой  $z_0 \in D$  область  $D$  содержит точки

$$\{z \in C^n : z_1 = a_1 + (z_1^0 - a_1)e^{im_1\theta}, \dots, \\ z_n = a_n + (z_n^0 - a_n)e^{im_n\theta}; \forall \theta \in [0, 2\pi]\},$$

т. е. образ окружности, проходящей через точку  $z_0$ . Если область  $D$  содержит образ всего круга, то об-

ласть называется полной, т. е. вместе с точкой  $z_0$  содержит множество

$$\{z \in C^n : z_1 = a_1 + (z_1^0 - a_1)\lambda^{m_1}, \dots, \\ z_n = a_n + (z_n^0 - a_n)\lambda^{m_n}; \forall \lambda : |\lambda| \leq 1\}.$$

Если функция  $f(z)$  голоморфна в некоторой окрестности начала координат в  $C^n$ , то максимальную  $x$ -параболическую область  $G_f^x$ , в которую голоморфно можно продолжить функцию  $f$ , назовем  $x$ -параболической звездой Миттаг-Леффлера функции  $f$  или просто  $x$ -звездой.

В случае одного переменного всякая  $x$ -звезда Миттаг-Леффлера совпадает с обычной звездой Миттаг-Леффлера или главной звездой данного степенного ряда. В случае многих переменных это не так.

**Пример.** Функция  $f(z_1, z_2) = (1 - z_2 + z_1^2)^{-1}$  имеет главную звезду, отличную от (1,2)-звезды Миттаг-Леффлера. Это вытекает из того, звезда функции  $f$  в вещественном подпространстве  $C^2$  не совпадает с (1,2)-звездой в силу особенностей функции  $f$ .

Таким образом, можно указать функцию, у которой (1, 2)-звезда несет больше информации, чем главная звезда или (1,1)-звезда.

Известно, что область сходимости  $n$ -кратного степенного ряда

$$f(z_1 \dots z_n) = \sum_{\|k\| \geq 0} a_{k_1 \dots k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} \quad (1)$$

является полной логарифмически выпуклой  $n$ -круговой областью, содержащей нуль. Если члены ряда (1) переставить, то его область сходимости может измениться.

Классическая теорема о перераспределении ряда (1) по однородным полиномам приводит к круговым областям и имеется, например, в [4; 5].

Фиксируем  $m = (m_1, \dots, m_n)$ ,  $m_j \in \mathbb{N}^n$  и  $m_1, \dots, m_n$  взаимно просты. Все члены ряда (1), у которых мультииндексы удовлетворяют уравнению

$$\langle k, m \rangle = k_1 m_1 + \dots + k_n m_n = v,$$

сгруппируем в полиномы

$$P_v(z) = \sum_{\langle k, m \rangle = v} a_{k_1 \dots k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$$

Полиномы  $P_v(z)$  удовлетворяют равенству  $P_v(t^m z) = P_v(t^{m_1} z_1, \dots, t^{m_n} z_n) = t^v P_v(z)$  для произвольных  $\forall t \in \mathbb{C}; \forall z \in \mathbb{C}^n$ . Такие полиномы  $P_v(z)$  обычно называют  $(m, v)$ -однородными или  $(m, v)$ -взвешенными. Они являются естественным обобщением однородных полиномов.

Тогда функцию  $f$ , заданную рядом (1), можно представить в виде

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} P_v(z). \quad (2)$$

Область сходимости ряда (2) – это максимальная  $m$ -круговая область, которую можно поместить в область голоморфности функции  $f$ .

Область сходимости ряда (2) – полная обобщенно  $m$ -круговая область  $D$  в  $\mathbb{C}^n$ . Верно и обратное утверждение, т. е. по аналогии с теоремой 3 из [4, с. 53], справедлива Теорема 1.

**Теорема 1.** Любую функцию  $f$ , голоморфную в полной обобщенно  $m$ -круговой области  $D$  в  $\mathbb{C}^n$  с центром в нуле, можно разложить в ряд (2) по  $m$ -однородным полиномам, который будет сходиться равномерно на любом компакте из  $D$ .

**Доказательство.** Ряд (1) абсолютно сходится с достаточно малой окрестности  $U$  начала координат в  $D$ , следовательно, в этой окрестности будет сходиться и ряд (2). Возьмем произвольную точку  $z_0$  из области  $D$ , так как область  $D$ , является полной обобщенно  $m$ -круговой, существует  $\lambda_0 \in \mathbb{C} : w_0 = \lambda_0^m z_0 \in U$ . Ряд (2) сходится в точке  $w_0$  и задает при достаточно малых  $\lambda$  голоморфную функцию  $\varphi$ :

$$f(w) = f(\lambda^m z) = \sum_{v=0}^{\infty} P_v(\lambda^m z) = \varphi(\lambda)$$

Разложение функции  $\varphi$  в ряд Тейлора в начале координат имеет вид

$$\varphi(\lambda) = \sum_{v=0}^{\infty} P_v(\lambda^m z) = \sum_{v=0}^{\infty} P_v(z) \lambda^v \quad (3)$$

Функция  $f$  голоморфна в некоторой окрестности точки  $z$ , поэтому функция  $\varphi$ , как суперпозиция голоморфных функций, голоморфна при  $|\lambda| < 1 + \varepsilon$  для некоторого  $\varepsilon > 0$ , следовательно ряд (3) будет сходиться при  $\lambda = 1$ , что, в свою очередь, означает сходимость ряда (2) в точке  $z$ .

Точка  $z$  принадлежит  $D$  с некоторой окрестностью  $U(z)$ , для всех точек  $U(z)$  можно повторить рассуждения, приведенные выше, поэтому ряд (2)

сходится в некоторой окрестности точки  $z$ , лежащей в  $D$ .

Пусть  $K$  компактно лежит в  $D$ . Каждому  $z \in K$  соответствует некоторая достаточно малая окрестность  $\overline{U(z)} \subset D$ , в которой ряд (2) будет сходиться абсолютно и равномерно для точек  $U(z)$ . Совокупность  $U(z)$  является открытым покрытием  $\overline{K}$ ; выбирая из этого покрытия конечное подпокрытие, получим равномерную сходимость ряда (2) во всех точках  $K$ . Теорема 1 доказана.

Зная разложение функции  $f$  по  $m$ -однородным полиномам с помощью матричного метода можно восстановить значения функции  $f$  всюду в  $m$ -звезде  $G_f^m$

Миттаг-Леффлера функции  $f$ .

**Теорема 2.** Пусть функция  $f$  задана рядом (2) в некоторой непустой окрестности начала координат,  $m \in \mathbb{N}^n$  и  $G = G_f^m$  – ее  $m$ -звезда Миттаг-Леффлера. Тогда существует такая бесконечная матрица комплексных чисел  $B := \{b_{0,l}, \dots, b_{k_l,l}\}_{l=0}^{\infty}$ , что справедлива формула:

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_{0,l} P_0(z) + \dots + b_{k_l,l} P_l(z). \quad (4)$$

Причем сходимость – равномерная на любом компакте в  $G$ , и матрица  $B$  не зависит от функции  $f$ , а зависит лишь от области  $G$ .

В случае одного переменного формула (4) имеется в двухтомнике Маркушевича [6, с. 495] и называется разложением Миттаг-Леффлера. В случае многих переменных для класса звездных областей теорема 2 доказана М. Довнарлович по схеме, предложенной Сичаком [7].

**Доказательство.** Для произвольной точки  $z_0$  из области  $G$  найдется окрестность этой точки  $V(z_0)$ , компактно лежащая в  $G$ , и жорданов путь  $S_{z_0}$  в  $\mathbb{C}$ , охватывающий точки 0 и 1, такие, что

$$K := \left\{ \begin{array}{l} \zeta \in \mathbb{C}^n : \zeta = (\lambda^m z) = (\lambda^{m_1} z_1, \dots, \lambda^{m_n} z_n), \\ \lambda \in S_{z_0}; z \in V(z_0) \end{array} \right\}$$

и  $K$  компактно лежит в  $G$ .

Тогда по формуле Коши имеем:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{z_0}} f(\lambda^m z) \frac{d\lambda}{\lambda - 1} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{z_0}} f(\lambda^m z) \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^{-1} \frac{d\lambda}{\lambda}. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как множество  $\tilde{S}_{z_0} := \{\lambda^{-1} : \lambda \in S_{z_0}\}$  компактно лежит в  $\{\mathbb{C} \setminus [1, \infty)\}$ , то в силу известной теоремы Рунге функцию  $\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^{-1}$  можно равномерно аппроксими-

ровать полиномами  $M_l$  от  $\frac{1}{\lambda}$  на  $\tilde{S}_{z_0}$

$$\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} M_l \left(\frac{1}{\lambda}\right). \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5) заметим, что из равномерной сходимости ряда (6) на любом компакте из области  $\{C \setminus [1, \infty]\}$ , допустимо почленное интегрирование.

Полиномы из ряда (2) можно найти по формуле

$$P_l(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{z_0}} f(\lambda^m z) \frac{d\lambda}{\lambda^{l+1}}$$

Возьмем в качестве матрицы  $B$  коэффициенты полинома  $M_l$ . Полиномы  $M_l$  построены конструктивно в [6, с. 497] по методу П. Пенлеве и могут быть использованы вне зависимости от функции  $f$ . Теорема 2 доказана.

### Библиографические ссылки

1. Balser W. Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations. W. Springer-Verlag New York, 2000.
2. Рамис Ж.-П. Расходящиеся ряды и асимптотические теории. М. ; Ижевск : Ин-т. компл. исследований, 2002. 80 с.
3. Лейнартас Е. К., Яковлев Е. И. О разрешимости одной краевой задачи для полиномиального дифференциального оператора в классе функций экспоненциального типа // Вестник СибГАУ. 2013. Вып. 2(48). С. 43–46.
4. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М. : Наука, 1985. 464 с.
5. Айзенберг Л. А., Зиновьев Б. С. Элементарные свойства и интегральные представления голоморфных

функций многих комплексных переменных. Красноярск : Изд-во КГУ, 1975, 156 с.

6. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 2. М. : Наука, 1967. С. 628.

7. Downarovich M. Analytic continuation of series of homogeneous polynomials of  $n$  complex variables. Prace Mat., z. 17, 1975.

### References

1. Balser W. Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations. W. Springer-Verlag New York, 2000.
2. Ramis J.-P. *Raskhodyashchiyesya ryady i asimpoticheskiye teorii* (Divergent series and asymptotic theory). M.-Ijevsk, Inst. comp. issl, 2002, 80 p.
3. Leinartas E. K., Yakovlev E. I. *Vestnik SibGAU*, 2013, № 2 (48), p. 43–46.
4. Shabat B. V. *Vvedeniye v kompleksnyy analiz* (Introduction to complex analysis). Moscow, Nauka, 1985, 464 p.
5. Aisenberg L. A., Zinoviev B. S. *Elementarnyye svoystva i integral'nyye predstavleniya golomorfnykh funktsiy mnogikh kompleksnykh peremennykh* (Elementary properties and integral representations of holomorphic functions of several complex variables). Krasnoyarsk, Krasn.un-t, 1975, 156 p.
6. Marcushevich A. I. *Teoriya analiticheskikh funktsiy* (Theory of analytic functions). Vol. 2, Moscow, Nauka, 1967, p. 628.
7. Downarovich M. Analytic continuation of series of homogeneous polynomials of  $n$  complex variables. Prace Mat., z. 17, 1975.