

УДК 539.374

ОБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЯ*С. И. Сенашов¹, О. Н. Черепанова², А. В. Кондрин¹¹Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева Россия, 660014, Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31. E-mail: sen@sibsau.ru²Сибирский федеральный университет Россия, 660041, Красноярск, просп. Свободный, 79

Решена классическая задача о кручении прямого стержня поперечное сечение которого ограничено выпуклым контуром. Предполагается, что пластическая область охватывает всю внешнюю границу. Для решения задачи используются законы сохранения. Для кусочно-гладких границ решение найдено квадратурой. Написаны программы, позволяющие с любой точностью строить пластические и упругие области в скручиваемом стержне. Тестирование на известных решениях дало совпадение результатов.

Ключевые слова: законы сохранения, точные решения, неизвестная граница, задача кручения прямого стержня.

ABOUT ELASTOPLASTIC TORSION OF RODS. I. Senashov¹, O. N. Cherepanova², A. V. Kondrin¹¹Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev 31 "Krasnoyarskiy Rabochiy" prosp., Krasnoyarsk, 660014, Russia. E-mail: sen@inbox.ru²Siberian Federal University 79 Svobodny prosp., Krasnoyarsk, 660041, Russia

The classic problem of torsion of a straight rod with the cross-section being limited to a convex contour, has been solved. It is assumed that the domain of plasticity covers the entire external boundary. The laws of conservation are used to solve the problem. The solution for a piecewise smooth boundary is found with quadrature. The programs developed allow to construct plastic and elastic ranges with any precision in the torsion rod. Testing based on the known solutions gave the coincidence of the results.

Keywords: conservation law, exact solution, unknown boundary, the problem of torsion of a straight rod.

Рассмотрим упруго-пластическое кручение прямого стержня, поперечное сечение которого ограничено выпуклым контуром Γ .

При достаточно большом значении крутящего момента в стержне образуется пластическая область P . Она начинает образовываться на внешней границе Γ . Предположим, что пластическая область полностью охватила контур. Тогда в поперечном сечении возникают две области – пластическая P и упругая F , L – граница раздела областей.

Решению задачи о напряженном состоянии упруго-пластического стержня посвящено много работ, но большинство из них основываются на некоторых предположениях о форме границы L , которая, вообще говоря, заранее не известна. Оригинальный метод по определению неизвестной границы предложен Б. Д. Анниным [1].

Этот метод основан на контактных преобразованиях и позволяет определить границу раздела между упругой и пластической областью в стержнях овального поперечного сечения. Постановку задачи и под-

робный обзор результатов можно найти в [1] и цитируемой там литературе.

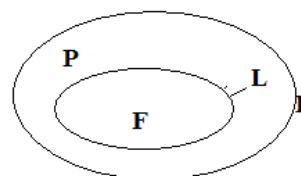


Рис. 1

В предлагаемой работе с помощью законов сохранения определяется напряженное состояние во всех внутренних точках стержня, и предлагаются формулы для аналитических вычислений этих напряжений для случая кусочно-гладкой ориентированной границы поперечного сечения. Законы сохранения уже давно и плодотворно используются для решения многих задач математики и механики. Краткий обзор результатов и решенных задач из разных областей механики можно найти в [2–4].

*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, шифр проекта 1.3720.2011.

Постановка задачи. Пусть τ_{xz}, τ_{yz} – единственные ненулевые компоненты тензора напряжений. В упругой зоне они удовлетворяют уравнению равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

и уравнениям

$$\tau_{xz} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \quad \tau_{yz} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right). \quad (2)$$

Здесь функция $\theta\psi(x, y)$ определяет деформацию поперечного сечения, θ – постоянная, G – модуль упругости при сдвиге.

Введем функцию напряжения φ по формуле

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (3)$$

тогда для определения φ в упругой области получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = a \quad (4)$$

где $a = -2G\theta$ – постоянная, не равная нулю.

В пластической области компоненты τ_{xz}, τ_{yz} помимо уравнения равновесия удовлетворяют условию пластичности

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = 1. \quad (5)$$

Здесь, для простоты дальнейших вычислений, постоянную пластичности считаем равной единице.

Вводя в это уравнение функцию напряжения, получаем

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 = 1. \quad (6)$$

Граничные условия. Предположим, что боковая поверхность свободна от напряжений. Это означает, что $\frac{\partial \varphi}{\partial l} = 0$ – на контуре Γ . Здесь $\vec{l} = (l_1, l_2)$ – касательная к контуру Γ . Отсюда получаем, что $\varphi = \text{const}$ вдоль контура Γ . Поскольку Γ односвязный контур, то полагаем, что $\varphi = 0$ на Γ .

Окончательно получаем следующую задачу:

В области ограниченной кривой L необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = a. \quad (7)$$

В области ограниченной кривыми L и Γ (т. е. в области пластичности P) функция φ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 = 1. \quad (8)$$

На Γ для функции φ выполняются условия

$$\varphi = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} l_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} l_2 = 0 \quad (10)$$

на границе раздела L функция φ непрерывна.

Требуется найти φ в упругой и пластической областях, а так же найти границу раздела L .

Введем обозначения $\varphi'_x = u$, $\varphi'_y = v$. Тогда уравнения (7)–(8) примут вид

$$F_1 = u'_x + v'_y - a = 0, \quad (11)$$

$$u^2 + v^2 = 1. \quad (12)$$

В силу введенных обозначений будет выполняться равенство

$$F_2 = u'_y - v'_x = 0 \quad (13)$$

Определение. Назовем вектор (A, B) сохраняющимся током, для системы уравнений (11), (13), если выполнено соотношение

$$\partial_x A + \partial_y B = \Delta_1 F_1 + \Delta_2 F_2 = 0. \quad (14)$$

Здесь Δ_1, Δ_2 некоторые линейные дифференциальные операторы.

Это означает, что для функций A и B справедлив закон сохранения на всех решениях системы (11), (13)

$$\partial_x A + \partial_y B = 0 \quad (15)$$

Закон сохранения (15) в силу уравнений (11), (9) имеет вид

$$A_x + A_u u_x + A_v v_x + B_y + B_u u_y + B_v v_y = 0$$

или, учитывая, что $u_x = a - v_y$ и $u_y = v_x$,

$$A_x + A_u a - A_u v_y + A_v v_x + B_y + B_u v_x + B_v v_y = 0.$$

Из последнего равенства следует, что функции A и B удовлетворяют уравнениям

$$A_x + A_u \cdot a + B_y = 0, \quad (16)$$

$$B_v - A_u = 0, \quad A_v + B_u = 0 \quad (17)$$

(16)–(17) – уравнения Коши-Римана.

Рассмотрим область D с границей Γ , при условии, что область пластичности P полностью охватывает упругую зону F . Пусть Γ – гладкая ориентированная кривая, т. е. непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек.

Из закона сохранения (15) следует, что

$$\iint_D (\partial_x A + \partial_y B) dx dy = 0. \quad (18)$$

Из (18), используя формулу Грина, получаем

$$\oint_{\Gamma} A dy - B dx = 0. \quad (19)$$

Наша задача найти такую область F принадлежащую, вместе с ее границей L области D , в которой выполняется неравенство $u^2 + v^2 < 1$.

Пусть $A = \alpha u + \beta v$, $B = \alpha v - \beta u + \gamma$, тогда

$$A_x = \alpha_x u + \alpha u_x + \beta_x v + \beta v_x \quad (20)$$

$$B_y = \alpha_y v + \alpha v_y - \beta_y u - \beta u_y + \gamma_y. \quad (21)$$

Согласно закону сохранения (15) получаем равенство

$$\begin{aligned} A_x + B_y &= \alpha_x u + \alpha u_x + \beta_x v + \beta v_x + \\ &+ \alpha_y v + \alpha v_y - \beta_y u - \beta u_y + \gamma_y = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

из которого следуют условия на функции α, β и γ

$$\begin{cases} \alpha_x - \beta_y = 0, \\ \beta_x + \alpha_y = 0, \\ a\alpha + \gamma_y = 0. \end{cases} \quad (22):$$

Рассмотрим два решения системы уравнений (22). Первое имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \beta_1 &= \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \gamma_{1y} &= -a \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \end{aligned} \quad (23),$$

тогда

$$\gamma_1 = -a \cdot \arctg \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad (24)$$

Соответственно второе возьмем в виде

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta_2 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \gamma_{2y} &= -a \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \end{aligned} \quad (25)$$

тогда $\gamma_2 = -\frac{a}{2} \cdot \ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)$

Перепишем уравнение (19) для функций A и B :

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} A dy - B dx &= \oint_{\Gamma} (\alpha u + \beta v) dy - (\alpha v - \beta u + \gamma) dx = \\ &= \oint_{\Gamma} \left(-\alpha \frac{l_2}{l_1} + \beta \right) v dy - \left(\alpha \frac{l_1}{l_2} - \beta \right) u dx - \oint_{\Gamma} \gamma dx = \\ &= \oint_{\Gamma} \left(-\alpha \frac{l_2}{l_1} + \beta \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy - \left(\alpha \frac{l_1}{l_2} - \beta \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx - \oint_{\Gamma} \gamma dx = \\ &= \oint_{\Gamma} \left(-\alpha \frac{l_2}{l_1} \right) v dy - \left(\alpha \frac{l_1}{l_2} \right) dx - \oint_{\Gamma} \gamma dx + \oint_{\Gamma} \beta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \right) = \\ &= \oint_{\Gamma} \alpha u dy - (\alpha v + \gamma) dx = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

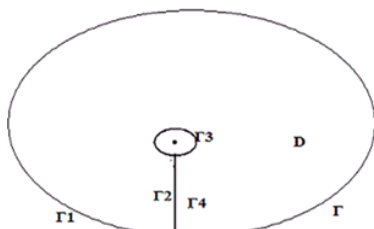


Рис. 2

Разобьем границу Γ на части, т. е. $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$, где Γ_3 – окружность $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Тогда

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} A dy - B dx &= \oint_{\Gamma} \alpha u dy - (\alpha v + \gamma) dx = \\ &= \oint_{\Gamma_1} \alpha u dy - (\alpha v + \gamma) dx + \oint_{\Gamma_2} \alpha u dy - \\ &+ (\alpha v + \gamma) dx + \oint_{\Gamma_3} \alpha u dy - (\alpha v + \gamma) dx + \\ &+ \oint_{\Gamma_4} \alpha u dy - (\alpha v + \gamma) dx = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Очевидно, что $\oint_{\Gamma_2} \alpha u dy - (\alpha v + \gamma) dx + \oint_{\Gamma_4} \alpha u dy + (\alpha v + \gamma) dx = 0$. С учетом этого условия уравнение (25) примет вид

$$\oint_{\Gamma_3} \alpha u dy - (\alpha v + \gamma) dx = -\oint_{\Gamma_1} \alpha u dy - (\alpha v + \gamma) dx. \quad (28)$$

Вычислим интеграл \oint_{Γ_1} , где Γ_1 – окружность радиуса R .

Пусть

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \beta &= \beta_1 = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \gamma &= \gamma_1 = -a \cdot \arctg \frac{y - y_0}{x - x_0}. \end{aligned} \quad (29)$$

Введем полярную систему координат

$$\begin{cases} x - x_0 = R \cos \varphi \\ y - y_0 = R \sin \varphi \end{cases} \quad (30),$$

тогда

$$\begin{cases} dx = -R \sin \varphi d\varphi \\ dy = R \cos \varphi d\varphi \end{cases}, \quad \alpha = \frac{\cos \varphi}{R}, \beta = \frac{\sin \varphi}{R}, \gamma = -a\varphi. \quad (31)$$

В результате вычислений при $R \rightarrow 0$ получим

$$\oint_{\Gamma_1} \alpha u dy - (\alpha v + \gamma) dx = \pi u(x_0, y_0). \quad (32)$$

Аналогично при $\alpha = \alpha_2, \beta = \beta_2, \gamma = \gamma_2$

$$\oint_{\Gamma_1} \alpha u dy - (\alpha v + \gamma) dx = \pi v(x_0, y_0). \quad (33)$$

В результате из (14) имеем

$$\oint_{\Gamma_3} \alpha_1 u dy - (\alpha_1 v + \gamma_1) dx = \pi u(x_0, y_0), \quad (34)$$

$$\oint_{\Gamma_3} \alpha_2 u dy - (\alpha_2 v + \gamma_2) dx = \pi v(x_0, y_0). \quad (35)$$

Зададим кривую Γ_3 в параметрическом виде:

$$x = f(t), y = \varphi(t), 0 \leq t \leq T \quad (36),$$

$f'(t), \varphi'(t)$ соответственно производные функций $f(t)$ и $\varphi(t)$.

Тогда функции $u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)$ из (28), (34) будут вычисляться по следующим формулам

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^T \left(\frac{(f(t) - x_0) \sqrt{(f'(t))^2 + (\varphi'(t))^2}}{\sqrt{(f(t) - x_0)^2 + (\varphi(t) - y_0)^2}} + af'(t) \operatorname{arctg} \frac{\varphi(t) - y_0}{f(t) - x_0} \right) dt, \quad (37)$$

$$v(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^T \left(\frac{(\varphi(t) - y_0) \sqrt{(f'(t))^2 + (\varphi'(t))^2}}{\sqrt{(f(t) - x_0)^2 + (\varphi(t) - y_0)^2}} + \frac{a}{2} f'(t) \ln((f(t) - x_0)^2 + (\varphi(t) - y_0)^2) \right) dt.$$

Для получения этих соотношений использованы решения (34) и (35) соответственно.

Теперь вычисляем значение выражения

$$u^2 + v^2 \quad (38)$$

в точке (x_0, y_0) . Те точки, в которых (38) больше или равно единице, принадлежат пластической области, а те в которых выражение (38) меньше нуля – упругой.

На основе формул (34), (35) созданы программы, которые позволяют с любой точностью строить пластические и упругие области в скручиваемом стержне.

Решение тестовых задач показало хорошее совпадение с известными решениями.

Библиографические ссылки

1. Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упруго-пластическая задача. Новосибирск : Наука.
2. Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск : Изд-во СО РАН.
3. Senashov S. I., Yachno A. N. Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity. SIGMA 8 (2012), 071, 16 p.
4. Сенашов С. И. Законы сохранения в задаче о продольной плоской волне нагрузки в упругопластическом стержне // Вестник СибГАУ. 2011. № 3 (36). С. 82–85.

References

1. Annin B. D., Cherepanov G. P. *Uprugo-plasticheskaya zadacha* (Elastic-plastic problem). Novosibirsk, Nauka.
2. Kiryakov P. P., Senashov S. I., Yachno A. N. *Prilozhenie simmetriy i zakonov sohraneniya k resheniyu differentsialnykh uravneniy* (The application of symmetries and conservation laws for the solution of differential equations). Novosibirsk, Izd-vo SO RAN.
3. Senashov S. I., Yachno A. N. Conservation Laws, Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity. SIGMA 8 (2012), 071, 16 p.
4. Senashov S. I. *Vestnik SibGAU*, 2011, № 3 (36), p. 82–85.

© Сенашов С. И., Черепанова О. Н., Кондрин А. В., 2013

УДК 538.9

ВЛИЯНИЕ ФОТОННОЙ ОБРАБОТКИ И ТЕМПЕРАТУРЫ НА ПРОВОДИМОСТЬ In_2O_3 ПЛЕНОК, ПОЛУЧЕННЫХ АВТОВОЛНОВЫМ ОКИСЛЕНИЕМ*

И. А. Тамбасов¹, И. В. Немцев^{2,4}, Д. С. Савранский³, А. А. Мацынин¹, Е. В. Ежикова⁴

¹Институт физики им. Л. В. Киренского, Сибирское отделение Российской академии наук
Россия, 660036, Красноярск, Академгородок 50, строение 38. E-mail: tambasov_igor@mail.ru

²Красноярский научный центр, Сибирское отделение Российской академии наук
Россия, 660036, Красноярск, Академгородок 50

³Сибирский федеральный университет
Россия, 660041, Красноярск, просп. Свободный, 79

⁴Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева
Россия, 660014, Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31

Пленки оксида индия были синтезированы автоволновой реакцией окисления на покровном стекле, кварце и монокристалле MgO . Толщина пленки измерялась с помощью режима «cross-section» сканирующего электронного микроскопа и составляла ~300 нм. Оптическая ширина запрещенной зоны оксида индия была ~3.5 эВ. Исследования сопротивления In_2O_3 пленки от температуры в теневых условиях показали, что при нагревании до 100 °С сопротивление увеличивается на ~10 %. Показано, что при фотооблучении происходит резкое уменьшение электрического сопротивления пленок, максимальное изменение которого соста-