УДК 519. 95

ОБ ОБОБЩЕННОЙ РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ ВЫСОКОЙ СТЕПЕНИ

Т. К. Юлдашев

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева
Россия, 660014, Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31. E-mail: tursunbay@rambler.ru

Доказываются теоремы об обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейного дифференциального уравнения с псевдопараболическим оператором произвольной натуральной степени.

Ключевые слова: обобщенная разрешимость, интегральное тождество, система нелинейных интегральных уравнений, метод последовательных приближений.

ON GENERALIZED SOLVABILITY OF MIXED VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR EQUATION WITH PSEUDOPARABOLIC OPERATOR OF HIGHER POWER

T. K. Yuldashev

Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev
31 “Krasnoyarskiy Rabochiy” prosp., Krasnoyarsk, 660014, Russia. E-mail: tursunbay@rambler.ru

In this article the author proves the theorems about the generalized solvability of mixed value problem for nonlinear partial differential equations with pseudoparabolic operator of arbitrary natural power.

Keywords: generalized solvability, integral identity, system of nonlinear equations, method of successive approximations.

В области D рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+(-1)^m\nu\frac{\partial^{2m+1}}{\partial t\,\partial x^{2m}}+\nu\mu\,\frac{\partial^{4m+1}}{\partial t\,\partial x^{4m}}+\frac{\partial^{4m}}{\partial x^{4m}}\right)^n\times \times u(t,x)=f\left(t,x,u(t,x)\right) \tag{1}$$

с начальными

$$u(t,x)_{|t=0}=\varphi_1(x),\quad \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}}u(t,x)_{|t=0}=\varphi_j(x),\ \ j=\overline{2,n} \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u(t,x)_{|x=0}=u_{xx}(t,x)_{|x=0}=\ldots=\frac{\partial^{2(2nm-1)}}{\partial x^{2(2nm-1)}}u(t,x)_{|x=0}=\int_0^l u(t,y)\,dy= \tag{3}$$

$$=\int_0^l u_{yy}(t,y)\,dy=\ldots=\int_0^l \frac{\partial^{2(2nm-1)}}{\partial y^{2(2nm-1)}}u(t,y)\,dy=0,$$

где

$$f(t,x,u)\in C(D\times R),\ \ \varphi_j(x)\in C^{2nm+1}(D_l),$$

$$\varphi_j(x)_{|x=0}=\varphi_j''(x)_{|x=0}=\ldots=\varphi_j^{(4nm-2)}(x)_{|x=0}=$$

$$\int_0^l\varphi_j(y)\,dy=\int_0^l\varphi_j''(y)\,dy=\ldots=\int_0^l\varphi_j^{(4nm-2)}(y)\,dy=0\,,$$

$$=\int_0^l\varphi_j^{(4nm-2)}(y)\,dy=0\,,\qquad j=\overline{1,n}\,,$$

$$D\equiv D_T\times D_l,\ D_T\equiv[\,0,T\,],\qquad D_l\equiv[\,0,l\,],$$

$$0<l<\infty,\ 0<T<\infty,\ \ 0<\nu,\ \mu\ -$$

малые параметры, n,m – натуральные числа.

Следует отметить, что изучению разного типа линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и их систем посвящено много работ и при этом применены разные методы (см., например [1–4]). В данной работе, как и в работах [5; 6], используется метод разделения переменных, основанный на поиске решения смешанной задачи (1)–(3) в виде

$$u(t,x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i(t)\cdot b_i(x)\,, \tag{4}$$

где $b_i(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_i x,\ \ \lambda_i=\frac{2i\pi}{l}$.

Множество $\left\{a(t)=(a_i(t))\,\middle|\,a_i(t)\in C(D_T)\,,\,i=1,\,2,\,...\right\}$ введением нормы

$$\|\,a(t)\,\|_{B_2(T)}=\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(\max_{t\in D_T}\left|a_i(t)\right|\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

становится банаховым пространством и обозначается через $B_2(T)$.

Наряду с пространством $B_2(T)$ рассмотрим и пространство $B_2^N(T)$ с нормой

$$\| a(t) \|_{B_2^N(T)} = \left[\sum_{i=1}^{N} \left(\max_{t \in D_T} \left| a_i^N(t) \right| \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} .$$

Для каждого элемента $a(t) \in B_2(T)$ определяется оператор: $Q\,a(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) \cdot b_i(x)$.

Обозначено через $E_2(D)$ множество значений оператора Q. Здесь очевидно, что $Q : B_2(T) \to E_2(D)$ и $E_2(D) \subset L_2(D)$.

Обозначается через $W_2^{(k)}(D)$ множество функций $\Phi(t, x)$ таких, что $\Phi(t, x)$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(t,x), ..., \frac{\partial^{2(2nm-1)}}{\partial x^{2(2nm-1)}}\Phi(t,x)$ при фиксированном $t \in D_T$ принадлежат области определения оператора $\frac{\partial^{4nm-2}}{\partial x^{4nm-2}}$, имеют производные порядка k по t, принадлежащие $L_2(D)$, и обращаются в нуль при $t \geq T - \delta$ ($0 < \delta -$ зависит от $\Phi(t, x)$).

Определение. Если функция $u(t, x) \in E_2(D)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^T\int_0^l \left\{ u(t,y) \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}\Phi + n\,\frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{4m}}\Phi + \right.\right.$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+4m}}{\partial t^{n-2}\partial y^{4m+2}}\Phi + \ \ldots\ +$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm-2}}{\partial t^2\partial y^{4nm-4}}\Phi + n\,\frac{\partial^{4nm-1}}{\partial t\,\partial y^{4nm-2}}\Phi + \frac{\partial^{4nm}}{\partial y^{4nm}}\Phi +$$
$$+\nu\left(\frac{\partial^{n+2m}}{\partial t^n\partial y^{2m}}\Phi + n\,\frac{\partial^{n+6m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{6m}}\Phi + \right.$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+6m}}{\partial t^{n-2}\partial y^{6m+2}}\Phi + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}\times$$
$$\left.\times\frac{\partial^{4nm+2m-2}}{\partial t^2\partial y^{4nm+2m-4}}\Phi + n\,\frac{\partial^{4nm+2m-1}}{\partial t\,\partial y^{4nm+2m-2}}\Phi\right) +$$
$$+\nu\mu\left(\frac{\partial^{n+4m}}{\partial t^n\partial y^{4m}}\Phi + n\,\frac{\partial^{n+8m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{8m}}\Phi + \right.$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+8m}}{\partial t^{n-2}\partial y^{8m+2}}\Phi + \ \ldots\ + \frac{n(n-1)}{2}\times$$
$$\left.\left.\left.\times\frac{\partial^{4nm+4m-2}}{\partial t^2\partial y^{4nm+4m-4}}\Phi + n\,\frac{\partial^{4nm+4m-1}}{\partial t\,\partial y^{4nm+4m-2}}\Phi\right]\right) - f\,\Phi\right\} dy\,dt =$$

$$= \int_0^l \varphi_1(y) \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Phi + n\,\frac{\partial^{n+4m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{4m}}\Phi + \right.$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial t^{n-3}\partial y^{4m+2}}\Phi +$$
$$+\ \ldots\ + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm-3}}{\partial t\,\partial y^{4nm-4}}\Phi + n\,\frac{\partial^{4nm-2}}{\partial y^{4nm-2}}\Phi +$$
$$+\nu\left(\frac{\partial^{n+2m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{2m}}\Phi + n\,\frac{\partial^{n+6m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{6m}}\Phi + \right.$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+6m-1}}{\partial t^{n-3}\partial y^{6m+2}}\Phi + \ \ldots\ + \frac{n(n-1)}{2}\times$$
$$\left.\times\frac{\partial^{4nm+2m-3}}{\partial t\,\partial y^{4nm+2m-4}}\Phi + n\,\frac{\partial^{4nm+2m-2}}{\partial y^{4nm+2m-2}}\Phi\right) +$$
$$+\nu\mu\left(\frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{4m}}\Phi + n\,\frac{\partial^{n+8m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{8m}}\Phi + \right.$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+8m-1}}{\partial t^{n-3}\partial y^{8m+2}}\Phi + \ \ldots\ + \frac{n(n-1)}{2}\times$$
$$\left.\left.\times\frac{\partial^{4nm+4m-3}}{\partial t\,\partial y^{4nm+4m-4}}\Phi + n\,\frac{\partial^{4nm+4m-2}}{\partial y^{4nm+4m-2}}\Phi\right]\right)\Bigg|_{t=0} dy -$$
$$-\ \ldots\ + \int_0^l \phi_{n-1}(y) \left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi + n\frac{\partial^{4m}}{\partial y^{4m}}\Phi + \right.$$
$$\nu\left(\frac{\partial^{2m+1}}{\partial t\,\partial y^{2m}}\Phi + n\frac{\partial^{6m}}{\partial y^{6m}}\Phi \right) +$$
$$\left. +\,\nu\mu\left(\frac{\partial^{4m+1}}{\partial t\,\partial y^{4m}}\Phi + n\frac{\partial^{8m}}{\partial y^{8m}}\Phi \right)\right]_{t=0} \times$$
$$\times\,dy - \int_0^l \varphi_n(y) \left[\Phi + \nu\,\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\Phi + \nu\mu\,\frac{\partial^{4m}}{\partial y^{4m}}\Phi \right]_{t=0} dy$$

для любого $\Phi(t, x) \in W_2^{(n)}(D)$, то она называется обобщенным решением смешанной задачи (1)–(3).

Покажем, что коэффициенты разложения $a_i(t)$ решения смешанной задачи (1)–(3) удовлетворяют следующей счетной системе нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ):

$$a_i(t) = w_i(t) + \\ + \int_0^t\int_0^l f\left(s, y, Q\,a(s) \right) b_i(y) P_i(t,s)\,dy\,ds, \tag{5}$$

где

$$w_i(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{ki}\,\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{j=k}^{n}\theta_{1i}^{\,j-k}(\nu,\mu) \times$$
$$\times\frac{t^{j-k}}{(j-k)!}\cdot\exp\left\{-\theta_{1i}(\nu,\mu)\,t\right\},$$

$$P_i(t,s) = \frac{(n-1)!(t-s)^{n-1}}{\theta_{0i}^{n}(\nu,\mu)}\cdot\exp\left\{-\theta_{1i}(\nu,\mu)(t-s)\right\},$$

$$\theta^n_{1i}(\nu,\mu)=\frac{\lambda_i^{4nm}}{\theta^n_{0i}(\nu,\mu)},$$

$$\theta^n_{0i}(\nu,\mu)=\left(1+\nu\lambda_i^{2m}+\nu\mu\,\lambda_i^{4m}\right)^n,$$

$$\varphi_{ki}=\int_0^l \varphi_k(y)b_i(y)\,dy.$$

Нас интересует укороченная система нелинейных интегральных уравнений (УСНИУ):

$$a_i^N(t)=w_i^N(t)+$$
$$+\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,Q^N a(s)\right)b_i(y)P_i(t,s)\,dy\,ds, \tag{6}$$

где

$$w_i^N(t)=\sum_{k=1}^n \varphi_{ki}^N\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{j=k}^n \theta_{1i}^{j-k}(\nu,\mu)\times$$
$$\times\frac{t^{j-k}}{(j-k)!}\cdot\exp\left\{-\theta_{1i}(\nu,\mu)t\right\},$$

$$P_i(t,s)=\frac{(n-1)!(t-s)^{n-1}}{\theta^n_{0i}(\nu,\mu)}\cdot\exp\left\{-\theta_{1i}(\nu,\mu)(t-s)\right\},$$

$$\theta^n_{1i}(\nu,\mu)=\frac{\lambda_i^{4nm}}{\theta^n_{0i}(\nu,\mu)},$$

$$\theta^n_{0i}(\nu,\mu)=\left(1+\nu\lambda_i^{2m}+\nu\mu\,\lambda_i^{4m}\right)^n.$$

$$Q^N a(t)=u^N(t,x)=\sum_{i=1}^N a_i^N(t)\cdot b_i(x).$$

С учетом (4), в силу того что $\Phi=\Phi_j(t,x)=$ $=h(t)b_j(x)\in W_2^{(n)}(D)$ в определении и $b_j(x)$ полны и ортонормированы в $L_2(D_l)$, где $h(t)\in C^n(D_T)$, $j=1,\ 2,\ \ldots,$ следует

$$\int_0^T h(t)\Big[\,a_i^{(n)}(t)+n\lambda_i^{4m}a_i^{(n-1)}(t)+$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{4m+2}a_i^{(n-2)}(t)+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\times$$
$$\times\lambda_i^{4m+4}a_i^{(n-3)}(t)+\ \ldots\ +\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_i^{4nm-6}\,a_i'''(t)+$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{4nm-4}\,a_i''(t)+n\lambda_i^{4nm-2}\,a_i'(t)+\lambda_i^{4nm}\,a_i(t)+$$
$$\nu\left(\lambda_i^{2m}a_i^{(n)}(t)+n\lambda_i^{6m}a_i^{(n-1)}(t)+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{6m+2}a_i^{(n-2)}(t)+\right.$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_i^{6m+4}a_i^{(n-3)}(t)+\ \ldots\ +$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_i^{4nm+2m-6}\,a_i'''(t)+$$
$$\left.+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{4nm+2m-4}\,a_i''(t)+n\lambda_i^{4nm+2m-2}\,a_i'(t)\right)+$$
$$+\nu\mu\left(\lambda_i^{4m}a_i^{(n)}(t)+n\lambda_i^{8m}a_i^{(n-1)}(t)+\right.$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{8m+2}a_i^{(n-2)}(t)+\ \ldots\ +$$
$$\left.+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{4nm+4m-4}\,a_i''(t)+n\lambda_i^{4nm+4m-2}\,a_i'(t)\right)-$$
$$\left.-\int_0^l f\left(t,y,Q\,a(t)\right)\cdot b_i(y)\,dy\right]dt=0. \tag{7}$$

Так как $h(t)$ – любая функция, удовлетворяющая указанным выше условиям, то $a_i(t)$ имеет обобщенные производные порядка n по t в смысле Соболева на отрезке D_T.

Из (7) следует, что

$$a_i^{(n)}(t)+n\lambda_i^{4m}a_i^{(n-1)}(t)+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{4m+2}a_i^{(n-2)}(t)+\ \ldots\ +$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{4nm-4}\,a_i''(t)+n\lambda_i^{4nm-2}\,a_i'(t)+\lambda_i^{4nm}\,a_i(t)+$$
$$\nu\left(\lambda_i^{2m}a_i^{(n)}(t)+n\lambda_i^{6m}a_i^{(n-1)}(t)+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{6m+2}a_i^{(n-2)}(t)+\right.$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_i^{6m+4}a_i^{(n-3)}(t)+\ \ldots\ +$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_i^{4nm+2m-6}\,a_i'''(t)+$$
$$\left.+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{4nm+2m-4}\,a_i''(t)+n\lambda_i^{4nm+2m-2}\,a_i'(t)\right)+$$
$$+\nu\mu\left(\lambda_i^{4m}a_i^{(n)}(t)+n\lambda_i^{8m}a_i^{(n-1)}(t)+\right.$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{8m+2}a_i^{(n-2)}(t)+\ \ldots\ +$$
$$\left.+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{4nm+4m-4}\,a_i''(t)+n\lambda_i^{4nm+4m-2}\,a_i'(t)\right)=$$
$$=\int_0^l f\left(t,y,Q\,a(t)\right)\cdot b_i(y)\,dy. \tag{8}$$

Решая систему (8) методом вариации произвольных постоянных, получаем

$$a_i(t,\nu,\mu)=\left(C_{1i}+C_{2i}t+C_{3i}t^2+C_{4i}t^3+\ldots+C_{ni}\,t^{n-1}\right)\times$$
$$\times\exp\left\{-\theta_{1i}(\nu,\mu)t\right\}+\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,Q\,a(s)\right)\times \tag{9}$$
$$\times b_i(y)P_i(t,s)\,dy\,ds,\ \ t\in D_T.$$

Используя условия

$$a_i(0)=\varphi_{1i},\ a_i'(0)=\varphi_{2i},$$
$$a_i''(0)=\varphi_{3i},\ \ldots,\ a_i^{(n-1)}(0)=\varphi_{ni}$$

для определения коэффициентов $C_{ji}\,(j=\overline{1,n})$, из (9) получаем (6).

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

1. $\int_0^T \left\| f\left(t,x,Q^N w(t)\right)\right\|_{L_2(D_l)} dt \le \Delta < \infty$;

2. $f(t,x,u) \in Lip\left\{ L(t,x)_{|u} \right\}$,

где $0 < \int_0^t \| L(s,x)\|_{L_2(D_l)} ds < \infty$;

3. $\| w(t)\|_{B_2^N(T)} < \infty$,

где $\| w(t)\|_{B_2^N(T)} = \left[\sum_{i=1}^N \left(\max_{t\in D_T} \left| a_i(t)\right|\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

Тогда УСНИУ (6) имеет единственное решение в пространстве $B_2^N(T)$.

Доказательство. Используется метод последовательных приближений:

$$a_i^0(t) = w_i(t),\ t\in D_T,\ a_i^{k+1}(t) = w_i(t) +$$
$$+\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,Q^N a^k(s)\right) b_i(y) P_i(t,s)\, dy\, ds, k = \tag{10}$$
$$= 0,1,2,3,...,\ t\in D_T.$$

Учет условий теоремы в (10) дает оценки

$$\left\| a^1(t) - a^0(t)\right\|_{B_2^N(T)} \le M_1 M_2\, l^{\frac{1}{q}}\, \Delta, \tag{11}$$

$$\left\| a^2(t) - a^1(t)\right\|_{B_2^N(T)} \le$$
$$\le \Delta\, M_{1,N}^2 M_{2,N}^3\, l^{\frac{2}{q}} \int_0^t \| L(s,x)\|_{L_2(D_l)} ds, \tag{12}$$

где

$$M_{1,N} = \| P(t,s)\|_{B_2^N(T)}, \qquad M_{2,N} = \| b(x)\|_{B_2^N(l)}.$$

Продолжая этот процесс для произвольного натурального числа k, подобно (12) получаем

$$\left\| a^{k+1}(t) - a^k(t)\right\|_{B_2^N(T)} \le$$
$$\le \left(M_{1,N}\, l^{\frac{1}{2}}\right)^{k+1} M_{2,N}^{2k+1}\, \Delta\, \frac{\left[\int_0^t \| L(s,x)\|_{L_2(D_l)} ds\right]^k}{k!}. \tag{13}$$

Существование решения УСНИУ (6) следует из оценки (13), так как при $k\to\infty$ последовательность функций $\left\{ a^k(t)\right\}_{k=1}^\infty$ сходится равномерно по t к функции $a(t)\in B_2^N(T)$. Для проведения доказательства единственности этого решения в пространстве $B_2^N(T)$ предполагается, что УСНИУ (6) имеет два решения: $a(t)\in B_2^N(T)$ и $\vartheta(t)\in B_2^N(T)$. Тогда для их разности справедлива оценка

$$\| a(t) - \vartheta(t)\|_{B_2^N(T)} \le M_{1,N} M_{2,N}^2\, l^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \int_0^t \| L(s,x)\|_{L_2(D_l)} \| a(s) - \vartheta(s)\|_{B_2^N(T)} ds. \tag{14}$$

Применение к (14) неравенства Гронуолла–Беллмана дает, что $\| a(t) - \vartheta(t)\|_{B_2^N(T)} \equiv 0$ для всех $t\in D_T$. Отсюда следует единственность решения УСНИУ (6) в пространстве $B_2^N(T)$.

Рассмотрим формулу (4) как следующее предельное соотношение:

$$u(t,x) = \lim_{N\to\infty} u^N(t,x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^N a_i(t)\cdot b_i(x). \tag{4'}$$

Подставляя ССНИУ (5) в предел (4’), получим формальное решение смешанной задачи (1)–(3):

$$u(t,x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^N \left[w_i(t) + \int_0^t\int_0^l f\left(s,y,Q^N a(s)\right) \times\right.$$
$$\left.\times b_i(y) P_i(t,s)\, dy\, ds\right]\cdot b_i(x). \tag{15}$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1 и $\| w(t)\|_{B_2(T)} < \infty$. Если $a(t)\in B_2^N(T)$ является решением УСНИУ (6), то (15) будет обобщенным решением смешанной задачи (1)-(3).

Доказательство. Так как $a(t)\in B_2^N(T)$, то из равенства $\lim_{N\to\infty} u^N(t,x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^N a_i(t)\cdot b_i(x) = u(t,x)$ в силу условий теоремы следует, что

$$\lim_{N\to\infty} f\left(t,x,u^N(t,x)\right) = f\left(t,x,u(t,x)\right) \tag{16}$$

в смысле метрики $L_2(D)$.

Рассмотрим последовательность функционалов:

$$V_N = \int_0^T\int_0^l \left\{ u^N(t,y)\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}\Phi + n\frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{4m}}\Phi + \right.\right.$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+4m}}{\partial t^{n-2}\partial y^{4m+2}}\Phi + \ ... \ +$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm-2}}{\partial t^2\partial y^{4nm-4}}\Phi + n\frac{\partial^{4nm-1}}{\partial t\,\partial y^{4nm-2}}\Phi + \frac{\partial^{4nm}}{\partial y^{4nm}}\Phi +$$
$$+\nu\left(\frac{\partial^{n+2m}}{\partial t^n\partial y^{2m}}\Phi + n\frac{\partial^{n+6m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{6m}}\Phi + \right.$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+6m}}{\partial t^{n-2}\partial y^{6m+2}}\Phi + ... + \frac{n(n-1)}{2}\times$$
$$\left.\times\frac{\partial^{4nm+2m-2}}{\partial t^2\partial y^{4nm+2m-4}}\Phi + n\frac{\partial^{4nm+2m-1}}{\partial t\,\partial y^{4nm+2m-2}}\Phi\right) +$$

$$+\nu\mu\left(\frac{\partial^{n+4m}}{\partial t^{n}\,\partial y^{4m}}\Phi+n\,\frac{\partial^{n+8m-1}}{\partial t^{n-1}\,\partial y^{8m}}\Phi+\right.$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+8m}}{\partial t^{n-2}\,\partial y^{86m+2}}\Phi+\ \ldots\ +\frac{n(n-1)}{2}\times$$

$$\left.\left.\times\frac{\partial^{4nm+4m-2}}{\partial t^{2}\,\partial y^{4nm+4m-4}}\Phi+n\,\frac{\partial^{4nm+4m-1}}{\partial t\,\partial y^{4nm+4m-2}}\Phi\right)\right]+$$

$$\left.+f\left(t,y,u^{N}(t,y)\right)\Phi\right\}\,dy\,dt-\int_{0}^{l}\varphi_{1}^{N}(y)$$

$$\times\left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Phi+n\,\frac{\partial^{n+4m-2}}{\partial t^{n-2}\,\partial y^{4m}}\Phi+\frac{n\,(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial t^{n-3}\,\partial y^{4m+2}}\Phi+\right.$$

$$+\ \ldots\ +\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm-3}}{\partial t\,\partial y^{4nm-4}}\Phi+n\,\frac{\partial^{4nm-2}}{\partial y^{4nm-2}}\Phi+$$

$$+\nu\left(\frac{\partial^{n+2m-1}}{\partial t^{n-1}\,\partial y^{2m}}\Phi+n\,\frac{\partial^{n+6m-2}}{\partial t^{n-2}\,\partial y^{6m}}\Phi+\right.$$

$$\left.+\ \ldots\ +\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+2m-3}}{\partial t\,\partial y^{4nm+2m-4}}\Phi+n\,\frac{\partial^{4nm+2m-2}}{\partial y^{4nm+2m-2}}\Phi\right)+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+6m-1}}{\partial t^{n-3}\,\partial y^{6m+2}}\Phi+\nu\mu\left(\frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial t^{n-1}\,\partial y^{4m}}\Phi+\right.$$

$$n\,\frac{\partial^{n+8m-2}}{\partial t^{n-2}\,\partial y^{8m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+8m-1}}{\partial t^{n-3}\,\partial y^{8m+2}}\Phi+$$

$$+\ \ldots\ +\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+4m-3}}{\partial t\,\partial y^{4nm+4m-4}}\Phi+$$

$$\left.\left.n\,\frac{\partial^{4nm+4m-2}}{\partial y^{4nm+4m-2}}\Phi\right)\right]_{t=0}dy+\ \ldots\ -$$

$$-\int_{0}^{l}\phi_{n-1}^{N}(y)\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi+n\frac{\partial^{4m}}{\partial y^{4m}}\Phi+\right.$$

$$+\nu\left(\frac{\partial^{2m+1}}{\partial t\,\partial y^{2m}}\Phi+n\frac{\partial^{6m}}{\partial y^{6m}}\Phi\right)+\nu\mu\left(\frac{\partial^{4m+1}}{\partial t\,\partial y^{4m}}\Phi+\right.$$

$$\left.\left.+n\frac{\partial^{8m}}{\partial y^{8m}}\Phi\right)\right]_{t=0}dy+\int_{0}^{l}\varphi_{n}^{N}(y)\times$$

$$\times\left[\Phi+\nu\,\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\Phi+\nu\mu\,\frac{\partial^{4m}}{\partial y^{4m}}\Phi\right]_{t=0}dy\,. \qquad (17)$$

Интегрируя по частям отдельные слагаемые в (17) и учитывая условия теоремы и начальные условия

$$a_i\,(0)=\varphi_{1i}\,,\quad a_i\,'(0)=\varphi_{2i}\,,$$

$$a_i\,''(0)=\varphi_{3i}\,,\ \ldots,\ a_i^{(n-1)}(0)=\varphi_{ni}\,,$$

получаем

$$V_N=\int_{0}^{l}\left(\varphi_{1}(y)-\sum_{i=1}^{N}\varphi_{1i}\,b_i(y)\right)\times$$

$$\times\left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Phi+n\,\frac{\partial^{n+4m-2}}{\partial t^{n-2}\,\partial y^{4m}}\Phi+\right.$$

$$+\frac{n\,(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial t^{n-3}\,\partial y^{4m+2}}\Phi+\ \ldots\ +$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm-3}}{\partial t\,\partial y^{4nm-4}}\Phi+n\,\frac{\partial^{4nm-2}}{\partial y^{4nm-2}}\Phi+$$

$$+\nu\left(\frac{\partial^{n+2m-1}}{\partial t^{n-1}\,\partial y^{2m}}\Phi+n\,\frac{\partial^{n+6m-2}}{\partial t^{n-2}\,\partial y^{6m}}\Phi+\right.$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+6m-1}}{\partial t^{n-3}\,\partial y^{6m+2}}\Phi+$$

$$\left.+\ \ldots\ +\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+2m-3}}{\partial t\,\partial y^{4nm+2m-4}}\Phi+n\,\frac{\partial^{4nm+2m-2}}{\partial y^{4nm+2m-2}}\Phi\right)+$$

$$+\nu\mu\left(\frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial t^{n-1}\,\partial y^{4m}}\Phi+n\,\frac{\partial^{n+8m-2}}{\partial t^{n-2}\,\partial y^{8m}}\Phi+\right.$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+8m-1}}{\partial t^{n-3}\,\partial y^{8m+2}}\Phi+$$

$$+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+4m-3}}{\partial t\,\partial y^{4nm+4m-4}}\Phi+$$

$$\left.\left.+\ n\,\frac{\partial^{4nm+4m-2}}{\partial y^{4nm+4m-2}}\Phi\right)\right]_{t=0}dy-$$

$$-\ \ldots\ +\int_{0}^{l}\left(\phi_{n-1}(y)-\sum_{i=1}^{N}\phi_{(n-1)\,i}\,b_i(y)\right)\times$$

$$\times\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi+n\frac{\partial^{4m}}{\partial y^{4m}}\Phi+\nu\left(\frac{\partial^{2m+1}}{\partial t\,\partial y^{2m}}\Phi+n\frac{\partial^{6m}}{\partial y^{6m}}\Phi\right)+\right.$$

$$\left.+\ \nu\mu\left(\frac{\partial^{4m+1}}{\partial t\,\partial y^{4m}}\Phi+n\frac{\partial^{8m}}{\partial y^{8m}}\Phi\right)\right]_{t=0}dy-$$

$$-\int_{0}^{l}\left(\varphi_{n}(y)-\sum_{i=1}^{N}\varphi_{ni}\,b_i(y)\right)\times$$

$$\times\left[\Phi+\nu\,\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\Phi+\nu\mu\,\frac{\partial^{4m}}{\partial y^{4m}}\Phi\right]_{t=0}dy+$$

$$+\int_{0}^{T}\int_{0}^{l}\Phi(t,y)\Big[f\left(t,y,Qa(t)\right)\ -$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{0}^{l}f\left(t,z,Q^{N}a(t)\right)\cdot b_i(z)\,dz\Big]b_i(y)\,dy\,dt. \qquad (18)$$

Очевидно, что первые n интегралы в (18) стремятся к нулю при $N\to\infty$, так как $\varphi_j\,(x)\in L_2(D_l)$, $j=\overline{1,n}$. Сходимость последней разности в (18) при $N\to\infty$ следует из (16). Отсюда ясно, что $\lim\limits_{N\to\infty}V_N=0$. Это и доказывает теорему.

Библиографические ссылки

1. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М. : Наука, 1967.

2. Нахушев А. М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 72–81.

3. Похожаев С. И. Об априорных оценках и градиентных катастрофах гладких решений гиперболических систем законов сохранения // Тр. МИ РАН. 2003. Т. 243. С. 257–288.

4. Пулькина Л. С. Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 3. С. 435–445.

5. Юлдашев Т. К. Смешанная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения, содержащего куб параболического оператора // Вестник СибГАУ. 2011. Вып. 2 (35). С. 96–100.

6. Юлдашев Т. К. Смешанная задача для нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром при параболическом операторе // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 9. С. 1703–1711.

Referens

1. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Uraltseva N. N. *Lineynyye i kvazilineynyye uravneniya parabolicheskogo tipa* (Linear and quasilinear equations of parabolic type). Moscow, Nauka, 1967, 736 p.

2. Nakhushev A. M. *Differents. uravn.* 1982, vol. 18, № 1, pp. 72–81.

3. Pokhozhayev S. I. *Trudy MI RAN.* 2003, vol. 243, pp. 257–288.

4. Pulkina L. S. *Mat. zametki.* 2003, vol. 74, № 3, pp. 435–445.

5. Yuldashev T. K. *Vestnik SibGAU.* 2011, № 2 (35), pp. 96–100.

6. Yuldashev T. K. *Zhurn. vychisl. matematiki i mat. fiziki.* 2011, vol. 51, № 9, pp. 1703–1711.