

УДК 519.872 621.312

## ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ИНДУКЦИОННЫХ НАГРЕВАТЕЛЕЙ С МНОГОСЛОЙНЫМИ ОБМОТКАМИ\*

В. А. Горемыкин<sup>1</sup>, Е. С. Кинев<sup>2</sup>, Е. А. Головенко<sup>3</sup>, И. С. Гудков<sup>3</sup>, С. С. Бежитский<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева  
Россия, 660014, Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31. E-mail: virt38@mail.ru

<sup>2</sup>ООО «Резонанс»

Россия, 660042, Красноярск, просп. Свободный, 75. E-mail: evg0770@mail.ru

<sup>3</sup>Сибирский федеральный университет

Россия, 660074, Красноярск, ул. Академика Киренского, 26. E-mail: golovenko\_ea@mail.ru

*Изложен один из подходов к селекции параметров конструкции и электропитанию индукционных нагревателей цветных металлов для выбора траектории многокритериальной оптимизации при конструировании. Проведены многовариантные поисковые расчеты оптимальных характеристик тепловых и электромагнитных полей в среде Ansys с учетом системы электропитания. Реализован алгоритм решения взаимосвязанной электротепловой задачи с учетом температурного состояния нагреваемой заготовки. Введено понятие пространства режимов индукционного нагревателя и определены закономерности влияния его конструктивных параметров на эффективность нагрева и режим работы источника питания.*

*Ключевые слова:* индукционный нагреватель, многослойная обмотка, электромагнитный режим, тепловой режим, параметрический синтез, численное моделирование, пространство режимов нагревателя.

## PARAMETRICAL SYNTHESIS OF OPTIMUM DESIGNS OF INDUCTION HEATERS WITH MULTILAYERED COILS

V. A. Goremykin<sup>1</sup>, E. S. Kinev<sup>2</sup>, E. A. Golovenko<sup>3</sup>, I. S. Gudkov<sup>3</sup>, S. S. Bezhitskiy<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev  
31 "Krasnoyarskiy Rabochiy" prosp., Krasnoyarsk, 660014, Russia. E-mail: virt38@mail.ru

<sup>2</sup>Company "Rezonans" Ltd.

75 Svobodnyi prosp., Krasnoyarsk, 660042, Russia. E-mail: evg0770@mail.ru

<sup>3</sup>Siberian Federal University

26 Kirenskiy st., Krasnoyarsk, 660074, Russia. E-mail: golovenko\_ea@mail.ru

*One of the approaches to selection of design parameters and of non-ferrous metals induction heaters power supply parameters for a multicriteria optimization choice of a trajectory is considered while designing. Multiple search calculations of optimum characteristics of thermal and electromagnetic fields in the environment of Ansys Multiphysics taking into account a power supply system are carried out. The algorithm of the solution of the interconnected electrothermal task taking into account a temperature condition of heated preparation is realized. The concept of the induction heater modes space is entered and regularities of influence of its design data on efficiency of heating and an operating mode of the power supply are defined.*

*Keywords:* induction heater, multilayered winding, electromagnetic mode, thermal mode, parametrical synthesis, numerical modeling, space of modes of the heater.

Индукционные нагреватели (ИН) сегодня являются неотъемлемой частью большинства технологических цепочек по термической обработке металлов. Возможности ИН позволяют осуществлять нагрев, закалку и отпуск металлических изделий с различными физико-химическими свойствами и абсолютно любыми геометрическими параметрами. Наиболее часто на производствах встречаются ИН для нагрева мерных цилиндрических заготовок или столбов (рис. 1). Такие устройства имеют один существенный недоста-

ток – низкую энергетическую эффективность. Главным образом эта проблема касается нагрева цветных металлов в силу высокой проводимости. Коэффициент полезного действия таких ИН зачастую не превышает 35–40 %.

При создании индукционных нагревателей для сквозного нагрева цветных металлов широко применяют многослойные обмотки, имеющие существенные достоинства перед однослойными [1].

\* Работа выполнена при финансовой поддержке КГАУ «Красноярский краевой фонд поддержки научной и научно-технической деятельности».



Рис. 1. Индукционный нагреватель цилиндрических слитков

Но несмотря на простоту конструкции, при проектировании нагревателей возникает проблемы с определением основных геометрических размеров ИН и параметров индуктора. Поэтому задача создания качественной расчетной модели, является очень актуальной. При этом модель должна отвечать целому ряду требований, например, учет особенностей конструкции ИН и изменение электро и теплофизических свойств нагреваемых слитков. Существуют аналитические [2], полуаналитические [3] и численные [4] методы расчета, которые позволяют решить такую задачу с разной степенью точности. Численные методы наиболее предпочтительны, поскольку легко автоматизируемы, позволяют учесть много факторов и отследить нелинейности влияния конструктивных параметров и свойств на процесс нагрева.

Видимо поэтому практика конструирования ИН опирается, главным образом, на результаты численного моделирования и параметрический синтез конструкции. Применение современных технологических систем в расчетно-конструкторской практике позволяет совместить многочисленные, порой противоречивые и взаимоисключающие критерии, получая весьма сбалансированные решения. Вместе с тем в процессе разработки подобного высокотехнологичного оборудования есть ряд задач, для которых нет удобно совмещаемых программно-аппаратных средств и, соответственно, нет готовых решений [2]. Необходимо построение гибридных систем численного моделирования на основе мощных программных пакетов, таких, например, как ANSYS [2]. В первую очередь подобная гибридная структура должна описывать особенности работы многофазных систем электропитания сравнительно мощных индукционных нагревателей [3], которые работают в существенно несимметричном режиме.

Другой немаловажной проблемой является обеспечение возможности учета особенностей теплового режима, обмоток и заготовок при переборе параметров катушек и магнитопроводов индукционных нагревателей, в том числе для применения в линиях градиентного нагрева. Это делают в локальной расчетном модуле, который состоит из подсистем анализа электромагнитного и теплового поля (рис. 2).

Подсистема анализа электромагнитного поля позволяет решать квазистационарные задачи с возможностью параметрического изменения характеристик и свойств элементов модели. Так как в процессе нагрева электрофизические свойства загрузки меняются, в подсистеме есть можно учитывать влияние на значения удельного электрического сопротивления ( $P(T)$ ) и относительную магнитную проницаемости ( $m(T)$ ) температуры загрузки ( $T$ ).

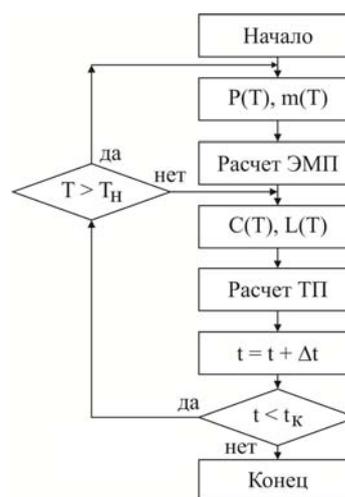


Рис. 2. Алгоритм

Подсистема анализа теплового поля решает нестационарную задачу теплопроводности на основании результатов расчета удельной тепловой мощности в первой подсистеме. Аналогично, как в первой подсистеме, заложена возможность учета влияния температуры на теплофизические свойства нагреваемого тела (теплоемкость  $C(T)$  и теплопроводность  $L(T)$ ).

В целом подсистемы взаимодействуют по следующему алгоритму. В первой подсистеме задают параметры элементов модели, их свойства. Решению подлежит квазистационарная электромагнитная задача (при  $T_n = 20$  °C), поскольку слишком велика разница электромагнитной и тепловой инерции. Формируется массив удельной тепловой мощности для каждого из элементов нагреваемого объекта. Запускается вторая

подсистема. Нагреваемому объекту присваиваются теплофизические свойства (при  $T_n = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ). Затем в элементах задаются внутренние источники тепловой энергии из сформированного в первой подсистеме массива. Решается одна итерация нестационарной тепловой задачи. Формируется массив значений температур для каждого из элементов и передается в первую и вторую подсистемы для уточнения электро- и теплофизических свойств. Алгоритм выполняется циклически с фиксированным приращением времени на каждой итерации ( $\Delta t$ ).

Реализация такого алгоритма позволяет в глобальной процедуре оптимизации электромагнитных режимов обеспечить возможность учета несимметрии по питанию в ходе нагрева и ввести процедуры ее коррекции с учетом динамики физических свойств [5]. В эту статью не включены результаты исследования совокупности температурных режимов индуктора, слишком велик объем материала. Полученным результатам будет посвящена отдельная публикация.

Изучение практики эксплуатации индукционного оборудования показало ряд характерных проблем и вопросов, которые следует изучить, и сформулировать еще на этапе математического моделирования [6], предваряя конструирование и производство. Как оказалось, весьма существенное влияние на технико-экономические характеристики ИН оказывает не только оптимальный выбор режимных параметров (плотность тока, частота), но и соотношение диаметров катушек и заготовок, но и соотношение аксиальных геометрических размеров индуктора и нагреваемых заготовок. Причем выбор оптимальной геометрии катушек целесообразно проводить при многовариантных расчетах, по возможности учитывая многоцелевое назначение индукционного оборудования. Например, один и тот же индуктор (секцию) могут использовать при построении гибких технологических систем нагрева как отдельных коротких слитков, так и столбов длиной 5–6 и более метров.

Сложность задач анализа и моделирования требует овладения вычислительными системами, детального изучения их организации и разработки алгоритмов взаимодействия с ними на этапе внедрения специфических расчетных модулей. В результате расчета, как правило, получают колоссальное количество численных данных, которые визуализируют и анализируют их соответствие результатам аналитических научных и инженерных расчетов. Затем приступают к проектированию устройства. Опыт показывает, что встроенные средства визуализации даже таких мощных систем, как ANSYS, не всегда в полной мере позволяют оценить свойства исследуемого объекта в многомерном пространстве его режимов. Поэтому задачу многокритериальной оптимизации индукционных нагревателей и итоговый анализ результатов следует рассматривать как можно более детально, применяя разнообразный сторонний инструментарий, создавая собственные подсистемы.

Задачу численного моделирования целесообразно рассматривать двухмерной осесимметричной, поскольку заготовка и индуктор ИН, симметричны относительно оси вращения. Кроме того, расчетную область в цилиндрической системе координат удобно свести 1/2 плоской модели с последующим интегрированием результатов по  $2\pi$ . Это существенно сокращает ресурсы. Эскиз расчетной модели электромагнитного поля ИН в осесимметричной постановке показан на рис. 3.

Область 1 – индуктор нагревателя, состоящий из двухходовых катушек  $K$ , намотанных из  $N$  слоев медного провода прямоугольного сечения ( $a \times b$ ). На проводниках располагают электроизоляцию (область 5). Внутри индуктора размещен цилиндрический слиток (область 2), поверх которого установлен непроводящий муфель (область 4). Далее расположен магнитопровод (область 3) и наружное воздушное пространство (область 6).

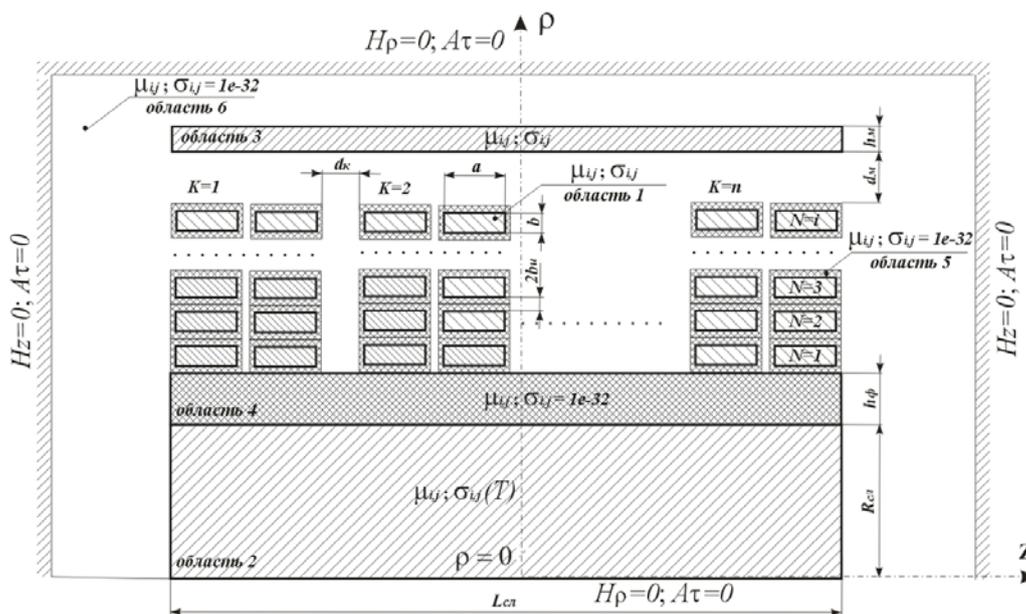


Рис. 3. Расчетная модель ЭМП

Физические свойства расчетных областей:

- область 1:  $\mu_{ij} = 1 \text{ Гн/м}$ ,  $\sigma_{ij} = 5,56e + 7 \text{ См/м}$ ;
- область 2:  $\mu_{ij} = 1 \text{ Гн/м}$ ,  $\sigma_{ij} = f(T)$ ;
- область 3:  $\mu_{ij} = 300 \text{ Гн/м}$ ,  $\sigma_{ij} = 1e + 6 \text{ См/м}$ ;
- область 4, 5, 6:  $\mu_{ij} = 1 \text{ Гн/м}$ ,  $\sigma_{ij} = 1e - 32 \text{ См/м}$ .

Основные допущения модели следующие:

1. Влияние каркаса и крепежных деталей конструкции не учитывают;
2. Влияние электрических выводов на внешнюю картину поля не учитывают;
3. Муфель изготовлен из нержавеющей стали не оказывает влияние на ЭМП;
4. Электрические проводимости и магнитные проницаемости областей 1, 3, 4, 5 и 6 анизотропны по всем координатам;
5. Насыщением магнитопровода (область 3) пренебрегают;
6. Полагают, что на расстоянии  $2R_{\text{сл}}$  от всех крайних элементов модели, ЭМП полностью затухает.

Расчетную модель (рис. 1) описывают с помощью уравнений Максвелла и уравнений неразрывности:

$$\begin{aligned} \text{rot} \bar{H} &= j + \frac{\partial \bar{D}}{\partial \tau}; & \text{rot} \bar{E} &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial \tau}; & \text{div} \bar{B} &= 0; \\ \text{div} \bar{E} &= 0; & \bar{j} &= \sigma \bar{E}; & \bar{H} &= \mu \bar{B}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\bar{E}$  – вектор напряженности электрического поля;  $\bar{D}$  – вектор электрической индукции;  $\bar{B}$  – вектор магнитной индукции;  $\bar{H}$  – вектор напряженности магнитного поля;  $\bar{j}$  – плотность электрического тока проводимости;  $\tau$  – время;  $\mu$  – относительная магнитная проницаемость.

Для решения системы уравнений (1) вводят векторную величину, характеризующую распределение потенциалов магнитного поля. Это векторный магнитный потенциал ( $\bar{A}$ ). Вычисляя распределение  $\bar{A}$ , в расчетной области находят значения любой характеристики ЭМП. Связь с системой уравнений (1) следующая:

$$\bar{B} = \text{rot}(\bar{A}). \quad (2)$$

Применяя математический оператор *rot*, переходят к уравнению для квастационарного случая, описывающего расчетную модель в цилиндрической системе координат (рис. 3):

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r \cdot \mu_z} \frac{\partial(rA)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu_r} \frac{\partial A}{\partial z} \right) - j\omega \frac{1}{\rho} A = -\bar{j}, \quad (3)$$

Уравнение (3) решают совместно с граничными условиями. На границах расчетной области нормальную составляющую вектора напряженности магнитного поля приравнивают к нулю:

$$\bar{H}_n = 0. \quad (4)$$

Касательные составляющие векторного магнитного потенциала считают нулевыми:

$$\bar{A}_\tau = 0. \quad (5)$$

Численную модель для анализа теплового поля и результаты расчетов формируют на базе уравнения Фурье аналогично, применяя средства программной среды.

Решения системы уравнений (3)–(5) выполняют методом конечных элементов в программном пакете ANSYS. Модель описана с помощью внутреннего языка программирования APDL. Для конечно-элементной аппроксимации использован восьмиузловой элемент PLANE53 с осесимметричной степенью свободы. Сеточное разбиение выполнено с использованием триангулированной сетки. Предусмотрена возможность автоматического варьирования геометрических и энергетических параметров расчетной модели, построен соответствующий алгоритм. Исследования проведены многовариантно в разных диапазонах, что дает возможность осуществлять параметрический синтез конструкции с учетом режима питания ИН.

Для оценки влияния совокупности параметров в процессе параметрического синтеза дополнительно разработаны специализированные подпрограммы для определения параметров схемы замещения ИН на основании результатов расчета характеристик электромагнитного поля. Реализован подход к вычислениям через определение активных и реактивных мощностей в соответствующих областях модели:

$$P = \sum_{i=1}^n P_{\text{дж}}^i \cdot V^i, \quad (6)$$

где  $P_{\text{дж}}^i$  – тепловая мощность в  $i$ -м элементе, Вт/м<sup>3</sup>;  $V^i$  – объем  $i$ -го элемента, м<sup>3</sup>.

$$Q = \sum_{i=1}^n 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \sqrt{B_{re}^i{}^2 + B_{im}^i{}^2} \cdot \sqrt{H_{re}^i{}^2 + H_{im}^i{}^2} \cdot V^i. \quad (7)$$

На основании определения интегральных показателей, согласно выражениям (6) и (7), для соответствующих областей определено значение входного напряжения ИН ( $U_u$ ), которое выражают из системы уравнений (8):

$$\left\{ \begin{aligned} I_1 - I_2 - I_0 &= 0 \\ \dot{U}_1 + \frac{\dot{Q}_0}{I_0} &= \dot{U}_u \\ \frac{\dot{P}_2}{I_2} + \frac{\dot{Q}_s}{I_2} + \frac{\dot{Q}_2}{I_2} + \dot{U}_1 &= \dot{U}_u \end{aligned} \right., \quad (8)$$

где  $I_1$  – приведенный ток индуктора, А;  $I_2$  – приведенный ток заготовки, А;  $U_1$  – напряжение на обмотке индуктора.

Таким образом, разработанная численная модель позволяет не только получать дифференциальные картины ЭМП и проводить их анализ, но и выполнять расчет интегральных характеристик и параметров схемы замещения. Учитывая значительный объем полученной в ходе расчета информации, для ее анализа потребовалось применить обобщение и представление

в виде взаимосвязанных групп режимных параметров. Для этого было введено понятие «пространство режимов» (ПР) индукционного нагревателя, в котором зависимости отражены в виде криволинейных поверхностей. Под ПР понимают многомерное пространство, взаимосвязанных и взаимнообуславливающих физически реализуемых режимных интегральных характеристик разрабатываемого изделия в установившемся состоянии.

Следует заметить, что режим индукционного нагрева массивных заготовок оценивают во времени от 30 до 180 с. Его описание получают в виде совокупности картин установившихся тепловых и электромагнитных режимов при сравнительно медленном изменении электрофизических параметров. В силу этого обстоятельства понятие ПР трактуют как «пространство установившихся режимов», и фактора времени в нем фактически нет. Это принципиально отличает понятие ПР от понятия «пространство состояний». Причем нужно заметить, что именно понятие ПР имеет больше практической ценности для разработчиков и проектировщиков оборудования, поскольку показывает состояние устройства при совокупном влиянии нескольких режимных характеристик.

При анализе результатов вначале следует обратиться к полученным поверхностям коэффициента полезного действия и коэффициента мощности индукционного нагревателя, связанными друг с другом в пространстве регулирования частоты источника и аксиального зазора между индуктирующими катушками. Характерные зависимости при изменении частоты питающего источника показаны на рис. 4–9. Закономерности поведения энергетических характеристик в целом подтверждаются.

В качестве опорной выбрана координата КПД индуктора и построены рабочие поверхности в зависимости от частоты источника питания и зазора между индуктирующими катушками (рис. 4). КПД во всех режимах не превышает 60 % и имеет низкочастотный максимум 59,8 % при частоте  $f = 50$  Гц и расстоянии  $d_k$  между катушками около 15 мм.

Закономерность монотонного ухудшения коэффициента мощности при увеличении частоты питающего источника (рис. 5) при всех значениях геометрических расстояний между индуктирующими катушками также вполне оправдана практически.

Пространственный характер соотношения мощностей показан на рис. 6, 7.

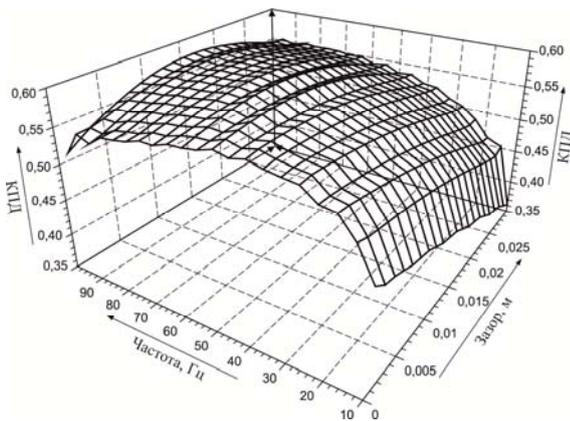


Рис. 4. Зависимость КПД индуктора от зазора между катушками и частоты

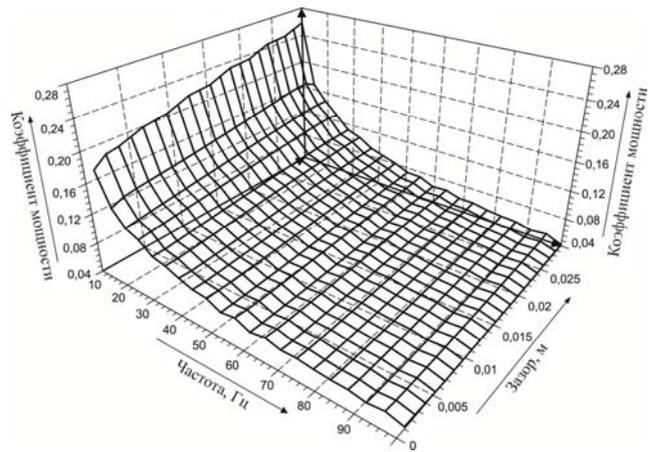


Рис. 5. Зависимость коэффициента мощности от зазора между катушками и частоты

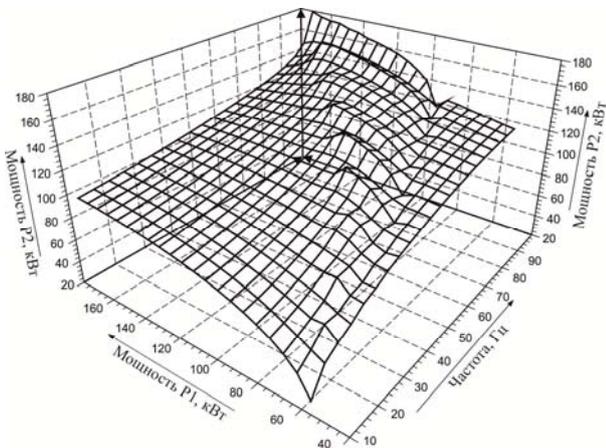


Рис. 6. Зависимость активной мощности в нагрузке от мощности индуктора и частоты

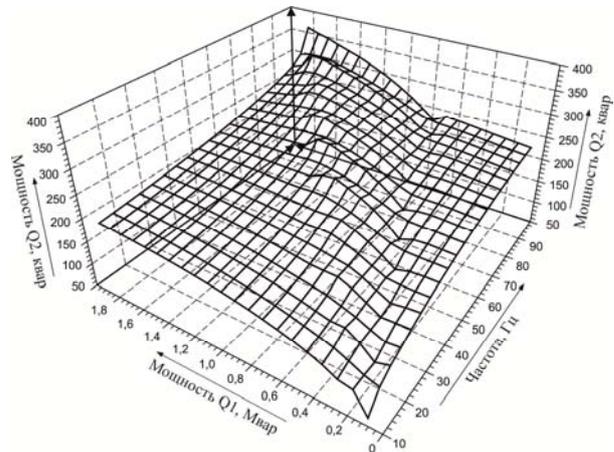


Рис. 7. Зависимость реактивной мощности в нагрузке от мощности индуктора и частоты

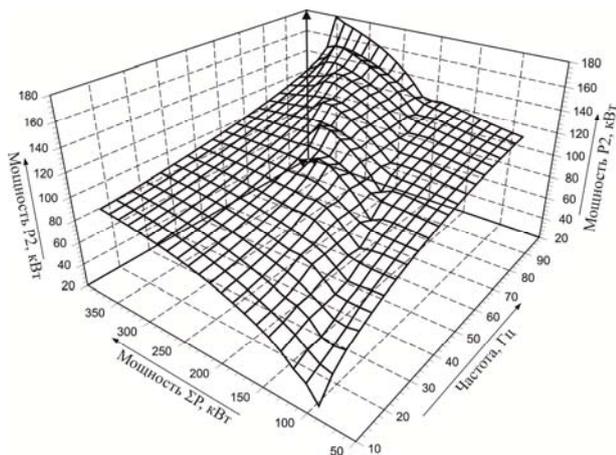


Рис. 8. Зависимость активной мощности в нагрузке от суммарной активной мощности и частоты

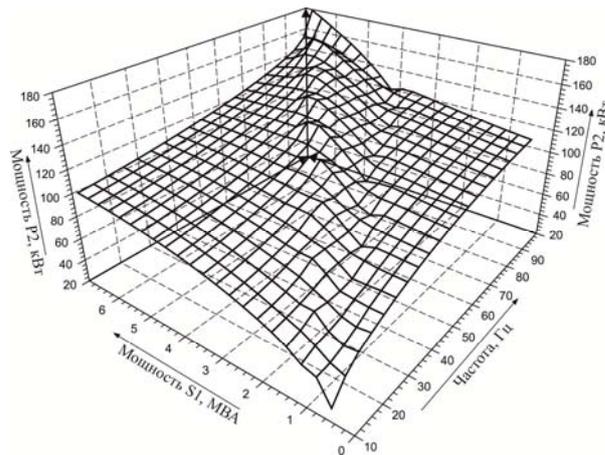


Рис. 9. Зависимость активной мощности в нагрузке от полной мощности индуктора и частоты

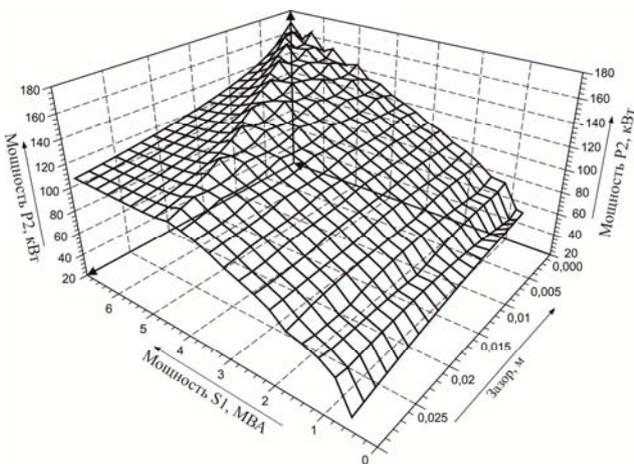


Рис. 10. Зависимость активной мощности в нагрузке от полной мощности индуктора и зазора

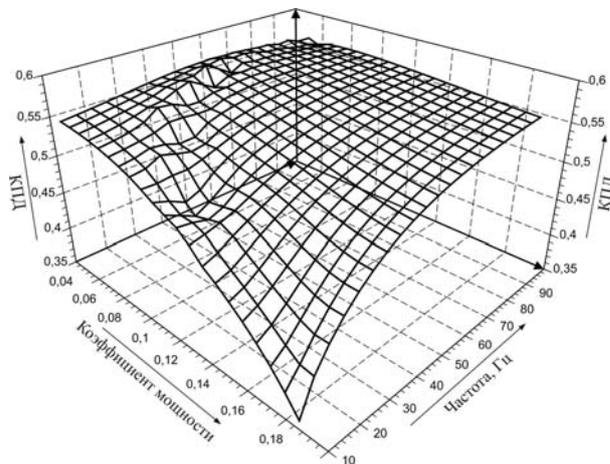


Рис. 11. Зависимость КПД нагрева от коэффициента активной мощности и частоты

Зависимость между выделенной в заготовке мощностью  $P_2$  и активной мощностью в обмотке индуктора  $P_1$  отражена поверхностью режимных параметров (рис. 6). Монотонный характер соотношения мощностей сохраняется при частотах 50–70 Гц. Причем циклический перебор значений зазора между двухрядными индуктирующими катушками при значениях  $d_k$  меньше 10 мм приводит к определению координат характеристик с повышенными значениями полезной мощности  $P_2$ . Однако резко нарушает характер поведения КПД. При понижении частоты менее 30 Герц и увеличении зазора более 20 мм наблюдается явное снижение полезной мощности в нагрузке.

Похожим образом ведет себя реактивная мощность (рис. 7). Причем существенное увеличение реактивной мощности требует применения эффективных компенсирующих устройств, в качестве которых традиционно используют батареи конденсаторов и настройку в режим, близкий резонансу токов.

Изменение доли активной мощности в нагрузке в суммарной активной мощности потребления  $P_2 = F(\Sigma P, f)$  при регулировании частоты источника показано на рис. 8. Соотношение между активной мощностью в нагрузке и полной потребляемой мощностью уст-

ройства  $P_2 = F(S_1, f)$  при изменении частоты источника питания показывает поверхность, приведенную на рис. 9. Характер поверхностей в целом одинаков.

Полученные соотношения для полезной мощности  $P_2$  в нагрузке, отраженные поверхностями  $P_2 = F(\Sigma P, f)$  и  $P_2 = F(S_1, f)$  режимных параметров, показывают, что как при повышении рабочей частоты, так и увеличении габаритов устройств пропорциональность нарушается. Причем существенный рост реактивной мощности (рис. 9) не вызывает пропорционального увеличения полезной мощности, и большей эффективности добиться не удастся. Аналогичное соотношение полезной мощности в нагрузке и изменению активной мощности с учетом потерь показано на рис. 8.

Второй блок информационных массивов можно условно сгруппировать по признакам оценки режимных параметров в зависимости от аксиального зазора. Характерные криволинейные поверхности показаны на рис. 10, 11. Поверхность моделирования активной мощности в нагрузке  $P_2 = F(S_1, d_k)$ , в зависимости от значений полной мощности при изменении частоты источника показана на рис. 10. При всех значениях зазора между катушками наблюдается явный максимум в соотношении полезной и полной мощности

устройства. Видимо, в этой области и следует искать практически реализуемые параметры установки. Причем добротность этого максимума имеет тенденцию к снижению с увеличением зазора.

Портрет поверхности КПД в пространстве режимов  $\eta = F(\cos \varphi, d_k)$  при варьировании расстояния между катушками и регулировании частоты показан на рис. 11, по которому легко оценить режимное соотношение КПД и коэффициента мощности.

Приемлемо-близкие к максимуму значения КПД исследуемой системы обеспечиваются при значениях коэффициента мощности в диапазоне 0,08–0,14 на частотах питающего напряжения от 50 до 70 Гц. Причем провалы на поверхности режимных параметров зафиксированы при крайних (малых) значениях зазоров  $d_k$  между катушками в циклическом итерационном переборе их значений внутри оптимизационного алгоритма.

При крайних значениях интервалов регулирования расстояния между катушками в совокупности с особенностями генетического алгоритма оптимизации дают некоторые паразитные решения, определяющие провалы на поверхности оптимальных параметров режима устройства. Однако общий монотонный характер полученной поверхности и наличие устойчивого решения вблизи практически достигнутых величин КПД и  $\cos \varphi$  позволяет с некоторой уверенностью предположить, что результаты моделирования в целом адекватно отражают действительность. Удовлетворительно совпадающие результаты получены в физическом эксперименте на сериях индукционных нагревателей, исследованных в цеховых условиях.

Кроме представленных здесь материалов, получены семейства поверхностей для других изменяемых параметров. Исследованы зависимости интегральных и дифференциальных характеристик от соотношения диаметров индуктирующих катушек и слитков. Полезными для выбора конструкции нагревателя оказались исследования пространства режимов при приближении и удалении магнитопроводов. Оценка влияния всех факторов позволяет сформулировать некоторые рекомендации для выигрыша дополнительных 3–5 % КПД, при оптимальном сочетании конструктивных параметров.

В целом полученные при математическом моделировании характеристики дают исчерпывающее представление об особенностях поведения эксплуатационных параметров индукционного нагревателя в пространстве установившихся режимов.

Таким образом, можно сделать следующие выводы:

1. Применение гибридных систем на базе современных средств математического моделирования позволяет исследовать совокупность характеристик разрабатываемого оборудования в многомерном пространстве его режимов, детально изучая влияние разных факторов на эксплуатационные характеристики.

2. Предпочтительно выбирать совокупность таких параметров и режимов, которые соответствуют окрестностям низкодобротных экстремумов. Это обусловлено возможностью хорошего повторения рассчитанных режимов на практике. Наличие технологических

погрешностей, возникающих при производстве оборудования, меняет его характеристики.

3. Использование полученных результатов математического моделирования для конструирования индукционных нагревателей целесообразно оценивать, глядя на них сквозь призму технологических особенностей производственной базы.

### Библиографические ссылки

1. Энергоэффективный индукционный нагрев алюминиевых заготовок перед прессованием / В. С. Немков, В. Б. Демидович, И. И. Растворова и др. // Индукционный нагрев. 2012. № 21. С. 10–15.
2. Nemkov V., Goldstein R. Design Principles for Induction Heating and Hardening in Handbook of Metallurgical Process Design // Marcel Dekker. 2004. P. 591–641.
3. Луци С., Немков В. С. Аналитический расчет цилиндрических индукционных систем // Электричество. 1978. № 6. С. 43–47.
4. Курбатов П. А., Аринчин С. А. Численный расчет электромагнитных полей. М.: Энергоатомиздат, 1984.
5. Параметрическая оптимизация многофазных индукционных систем / Е. С. Кинев, Е. А. Головенко, В. В. Ковальский и др. // Вестник Воронежского гос. техн. ун-та. 2009. Т. 5, № 12. С. 35–40.
6. Кинев Е. С., Головенко Е. А., Кузнецов Е. В. Математическое моделирование нагрева алюминиевых цилиндрических слитков в индукционном нагревателе методического действия // Вопросы теории и проектирования электрических машин. Математическое моделирование электромеханических процессов: межвуз. сб. науч. тр. Ульяновск: УлГТУ, 2006. С. 29–38.

### References

1. Nekmov V. S., Demidovich V. B., Rastvorova I. I., Chimilenko F. V., Sitko P. A. *Indukcionnyy nagrev*. 2012, № 21, pp. 10–15.
2. Nemkov V., Goldstein R. Design Principles for Induction Heating and Hardening in Handbook of Metallurgical Process Design. Marcel Dekker. 2004. P. 591–641.
3. S. Lupi V. S. Nemkov. *Elektrichestvo*. 1978, № 6, pp. 43–47.
4. Kurbatov P. A., Arinchin S. A. *Chislenniy raschet elektromagnitnih polei*. (The numerical calculation of electromagnetic fields). Moscow, Energoatomizdat, 1984, 168 p.
5. Kinev E. S., Golovenko E. A., Kovalsky V. V. et al. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tehnikeskogo universiteta*. 2009, vol. 5, № 12, pp. 35–40.
6. Kinev E. S., Golovenko E. A., Kuznetsov E. V. Mathematical modeling of heating aluminum billets in induction heater methodical action [Matematicheskoe modelirovanie nagreva aluminevikh slitkov v indukcionnom nagrevatele metodicheskogo deistviya]. *Voprosi teorii i proektirovaniya elektricheskikh mashin. Matematicheskoe modelirovanie elektromekhanicheskikh processov*. *Sbornik nauchnih trudov* (Theory and design of electrical machines. Mathematical modeling of electromechanical processes. Interuniversity. Sat Scientific. tr.). Ulyanovsk, UIGTU, 2006, pp. 29–38.

© Горемыкин В. А., Кинев Е. С., Головенко Е. А., Гудков И. С., Бежитский С. С., 2013