УДК 62.52

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РЕЖИМАМИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПЕЧЕЙ

Н. Д. Демиденко

СКТБ «Наука» КНЦ СО РАН
Россия, 660049, Красноярск, просп. Мира, 53. E-mail: tpya74@mail.ru

Сформулирована краевая задача для нестационарных режимов трубчатых печей с применением законов сохранения энергии, массы и количества движения. На основе этой модели поставлены задачи оптимального управления для основных управляющих параметров. С помощью вариационных методов получили и проанализировали необходимые условия оптимальности для выбранных управляющих функций. Полученная сопряженная краевая задача по структуре аналогична исходной краевой задаче. При этом множители Лагранжа заданы в конечный момент времени, что обуславливает особенности на численную реализацию задачи оптимального управления. Предложен численный алгоритм решения задачи оптимизации, который включает в себя решения двух краевых задач и антиградиентный спуск по вариационным равенствам к минимуму. Сформулирована и решена задача оптимального управления технологическими режимами трубчатых печей, как объектов с распределенными параметрами.

Ключевые слова: оптимальное управление, система с распределенными параметрами, необходимые условия оптимальности, сопряженная краевая задача.

OPTIMAL CONTROL OF TECHNOLOGICAL FURNACES REGIMES

N. D. Demidenko

SDTB «Nauka» KSC of the SB RAS
53 Mira prosp., Krasnoyarsk, 660049, Russia. E-mail: tpya74@mail.ru

The author formulates the boundary value problem for the stationary modes of the tube furnaces with the use of the laws of energy conservation, mass and momentum. On the basis of this model the optimal control problem for the main control parameters is formulated. With the help of variational methods the author analyzed and obtained the necessary optimal conditions for the selected control functions. The obtained conjugate boundary value problem is similar in structure to the original boundary value problem. In this case, the Lagrange multipliers are given at the finite time, which provide for the particularities on the numerical implementation of the optimal control problem. The author proposes a numerical algorithm for solution of the optimization problem, which involves solution of two problems and antigradiently incline on the variational equations to the minimum. The problem of optimal control of technological regimes of the tube furnaces as objects with distributed parameters.

Keywords: optimal control, a system with distributed parameters, necessary conditions of optimality, conjugate boundary value problem.

Автоматизированная система регулирования (АСР) технологическими печами предназначена для поддержания оптимальной температуры нагреваемого продукта на выходе из печи с одновременным снижением расхода жидкого топлива и уменьшением загрязнения окружающей среды продуктами сгорания, предусматривающая максимальное использование топливного газа.

В качестве объекта управления выбрана секция С-100 установки ЛК-6У по переработке нефти, состоящая из трех трубчатых печей: П-101, П-102, П-103. Печь П-101 состоит из 8 секций, расположенных в виде двух блоков по четыре секции друг против друга и отдельно стоящих девятой и десятой секций. Все секции печи П-101 (первая и пятая) предназначены для нагрева горячей циркулирующей струи колонны К-101, остальные восемь секций предназначены для нагрева сырья колонны К-102. Печь П-102 состоит из одной отдельно стоящей секции. Она предназначена для поддержания температуры низа стабилизационной колонны К-104.Печь П-103 состоит из одной отдельно стоящей секции. Она может быть использована для нагрева горячей циркулирующей струи колонны К-101 или для нагрева сырья колонны К-102.

АСР используется для регулирования разряжения в печах по всему тракту движения дымовых газов с целью поддержания оптимального коэффициента избытка воздуха и обеспечения равномерности работы горелок. Следящая АСР перепада давления «пар-мазут» предназначена для автоматического изменения давления пара, идущего на распыление жидкого топлива в зависимости от изменения давления жидкого топлива.

Нормальный технологический режим работы печей поддерживается путем правильной организации горения топлива в горелках и контролируется по приборам и техническим характеристикам печи.

Температура нагреваемого сырья поддерживается путем автоматического регулирования количества топлива, сжигаемого в печи. Повышение температуры нагрева продукта в печах выше нормы не допустимо, так как это может привести к выходу из строя змеевика печи или к коксованию продукта.

Температура на «перевале» при эксплуатации должна поддерживаться в каждой секции за счет обеспечения равномерной работы всех горелок во всех радиантных камерах каждой печи. Величина температуры определяется показаниями термопар, установленных на перевалах печей.

Ниже приводится математическая модель нестационарного процесса горения в трубчатых печах [1].

1. Уравнения нестационарного горения. Теория горения капли жидкого топлива в [1] развита для случая молекулярных процессов горения. Ее можно распространить на случай конвективного тепломассообмена. Исходя из одномерности движения потоков, математическая модель нестационарного горения в технологической печи может быть представлена следующими уравнениями [2-4]:

1. Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho u)=0 \qquad (1)$$

где ρ – массовая плотность смеси; u – скорость движения.

Для покомпонентной модели процесса горения уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{\partial(\rho x)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho x u)}{\partial l}=-\frac{\rho x}{\tau}, \qquad (2)$$

здесь l – линейный размер; x – концентрация горючего вещества в смеси ($0\le x\le 1$); τ – время сгорания.

2. Уравнение движения в виде

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial l}\right)+\frac{\partial P}{\partial l}=0. \qquad (3)$$

3. Уравнение сохранения энергии

$$\rho T_n\left(\frac{\partial S}{\partial t}+u\frac{\partial S}{\partial l}\right)=\frac{\rho x}{\tau}q-Q(T_n)+K_1(T_c-T_n), \qquad (4)$$

где q – теплота сгорания топлива; $Q(T_n)$ – потери на излучение; S – энтропия, причем $S=C_v\ln\frac{P}{\rho^\gamma}$ ($\gamma=1.0-1.4$, так как для жидкостей различие между C_v и C_ρ незначительно); T_c – температура сырья (нефтепродукта в радиантных трубопроводах печи); K_1 – коэффициент теплопередачи для рабочего потока; T_n – температура продуктов сгорания.

4. Уравнение теплообмена между нагреваемым сырьем и нагревательным газом

$$\frac{\partial T_c}{\partial t}-w\frac{\partial T_c}{\partial l}=K_2(T_n-T_c)-Q(T_n), \qquad (5)$$

где K_2 – коэффициент теплопередачи для стенки печи.

Уравнения (1)–(5) представляют собой математическую модель теплового процесса печи.

Дополним систему (1)–(5) уравнением состояния

$$\frac{P}{\rho}=RT_n, \qquad (6)$$

где R – газовая постоянная.

2. Постановка задачи. Рассмотрим следующую тепломассообменную задачу для процессов в трубчатой печи. Для этого приведем систему (1)–(6) к нормальной форме:

$$\begin{cases}\frac{\partial\rho}{\partial t}=-u\frac{\partial\rho}{\partial l}-\rho\frac{\partial u}{\partial l},\\ \frac{\partial x}{\partial t}=-u\frac{\partial x}{\partial l}-\frac{x}{\tau},\\ \frac{\partial u}{\partial t}=-u\frac{\partial u}{\partial l}-R\frac{\partial T_n}{\partial l}-\frac{RT_n}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial l},\\ \frac{\partial T_n}{\partial t}=(1-\gamma)T_n\frac{\partial u}{\partial l}-u\frac{\partial T_n}{\partial l}+\\ +\frac{xq}{C_v\tau}-\frac{Q(T_n)}{C_v\rho}+K_1(T_c-T_n),\\ \frac{\partial T_c}{\partial t}=-w\frac{\partial T_c}{\partial l}+K_2(T_n-T_c)-Q(T_n).\end{cases} \qquad (7)$$

Дополним систему (7) начальными и граничными условиями

$$\begin{array}{ll}\text{нач. усл.} & \text{гран. усл.}\\ \rho(l,0)=\varphi_1(l), & \rho(0,t)=\psi_1(t),\\ x(l,0)=\varphi_2(l), & x(0,t)=\psi_2(t),\\ u(l,0)=\varphi_3(l), & u(0,t)=\psi_3(t),\\ T_n(l,0)=\varphi_4(l), & T_n(0,t)=\psi_4(t),\\ T_c(l,0)=\varphi_5(l), & T_c(L,t)=\psi_5(t).\end{array} \qquad (8)$$

Здесь температура сырья задается в точке $l=L$, так как сырье подается сверху в печь, и таким образом, имеем противоточный технологический процесс.

В качестве управлений возьмем изменение плотности горючего v_1, концентрации v_2, скорости v_3, температур дымовых газов v_4 и сырья v_5. На управления наложим следующие ограничения:

$$v_{i\min}\le v_i\le v_{i\max},\ \ i=\overline{1,5}. \qquad (9)$$

Введя фиктивные управления z_i, $i=\overline{1,5}$, сведем неравенства (9) к равенствам

$$(v_{i\max}-v_i)(v_i-v_{i\min})-z_i^2=0,\quad i=\overline{1,5}. \qquad (10)$$

Связь граничных условий с управлениями представлена ниже:

$$\frac{\partial\rho(0,t)}{\partial t}=b_1v_1(t),\qquad \frac{\partial x(0,t)}{\partial t}=b_2v_2(t),$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial t}=b_3v_3(t),\ \ \frac{\partial T_n(0,t)}{\partial t}=b_4v_4(t),$$

$$\frac{\partial T_c(0,t)}{\partial t}=b_5v_5(t).$$

Задача оптимального управления формулируется следующим образом. Найти такие $v_i(t)$, $i=\overline{1,5}$ из промежутков (9), которые в силу систем (7)–(8) доставляют минимум критерия качества

$$\int_0^T\int_0^L\left(T_c(l,t)-T_c^*(l,t)\right)^2 dldt, \tag{11}$$

где T_c^* – заданная температура сырья на выходе печи; T – время управления.

3. Необходимые условия оптимальности. Введем параметрические переменные, которые представляют основную особенность уравнений в нормальной форме:

$$\frac{\partial\rho}{\partial l}=\zeta^{(1)},\quad \frac{\partial x}{\partial l}=\zeta^{(2)},\quad \frac{\partial u}{\partial l}=\zeta^{(3)},\quad \frac{\partial T_n}{\partial l}=\zeta^{(4)},\quad \frac{\partial T_c}{\partial l}=\zeta^{(5)}. \tag{12}$$

С учетом (12) система (7) будет иметь вид

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=-u\zeta^{(1)}-\rho\zeta^{(3)}\equiv X_1,\\ \dfrac{\partial x}{\partial t}=-u\zeta^{(2)}-\dfrac{x}{\tau}\equiv X_2,\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}=-u\zeta^{(3)}-R\zeta^{(4)}-\dfrac{RT_n}{\rho}\zeta^{(1)}\equiv X_3,\\ \dfrac{\partial T_n}{\partial t}=(1-\gamma)T_n\zeta^{(3)}-u\zeta^{(4)}+\\ +\dfrac{xq}{C_v\tau}-\dfrac{Q(T_n)}{\rho T_n}+k_1(T_c-T_n)\equiv X_4,\\ \dfrac{\partial T_c}{\partial t}=-w\zeta^{(5)}+k_2(T_n-T_c)-Q(T_n)\equiv X_5.\end{cases} \tag{13}$$

В уравнениях (13) параметрические переменные и управления входят формально одинаковым образом. Однако между ними имеются принципиальное различие, так как эти переменные играют различную роль. Дело в том, что управления задаются произвольно, а $\zeta^{(i)}$ не задаются, а определяются по известным управлениям в результате решения задачи.

Для получения необходимых условий оптимальности рассмотрим вспомогательный функционал [3]

$$I=I_1+I_2=\iint_\Omega \tilde{L}dldt+\int_{\partial\Omega}\tilde{l}dt,$$

где

$$\tilde{L}=\xi_1\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}-X_1\right)+\xi_2\left(\frac{\partial x}{\partial t}-X_2\right)+\xi_3\left(\frac{\partial u}{\partial t}-X_3\right)+$$
$$+\xi_4\left(\frac{\partial T_n}{\partial t}-X_4\right)+\xi_5\left(\frac{\partial T_c}{\partial t}-X_5\right)+\eta_1\left(\frac{\partial\rho}{\partial l}-\zeta^{(1)}\right)+$$
$$+\eta_2\left(\frac{\partial x}{\partial l}-\zeta^{(2)}\right)+\eta_3\left(\frac{\partial u}{\partial l}-\zeta^{(3)}\right)+\eta_4\left(\frac{\partial T_n}{\partial l}-\zeta^{(4)}\right)+$$
$$+\eta_5\left(\frac{\partial T_c}{\partial l}-\zeta^{(5)}\right)+\left(T_c-T_c^*\right)^2,$$

$\xi_i(l,t)$, $\eta_i(l,t)$, $(i=\overline{1,5})$ – функции Лагранжа, $\tilde{l}$ определена ниже.

Вычислим вариацию функционала I_1 при оптимальных ρ, x, u, T_n, T_c. Окончательно вариация функционала I_1 выглядит так:

$$\delta I_1=$$
$$=\int_0^T\int_0^L\Bigg[\left(\xi_1\zeta^{(3)}-\xi_3\zeta^{(1)}\frac{RT_n}{\rho^2}-\xi_4\frac{Q(T_n)}{C_v\rho^2}-\frac{\partial\xi_1(l,t)}{\partial t}-\frac{\partial\eta_1(l,t)}{\partial l}\right)\times$$
$$\times\,\delta\rho(l,t)+\left(\xi_2\frac{1}{\tau}-\xi_4\frac{q}{C_v\tau}-\frac{\partial\xi_2(l,t)}{\partial t}-\frac{\partial\eta_2(l,t)}{\partial l}\right)\partial x(l,t)+$$
$$+\left(\xi_1\zeta^{(1)}+\xi_2\zeta^{(2)}+\xi_3\zeta^{(3)}+\xi_4\zeta^{(4)}-\frac{\partial\xi_3(l,t)}{\partial t}-\frac{\partial\eta_3(l,t)}{\partial l}\right)\delta u(l,t)+$$
$$+\Bigg(\xi_3\frac{R}{\rho}\zeta^{(1)}-\xi_4\left((1-\gamma)\zeta^{(3)}+\left(-\frac{1}{C_v\rho}-1\right)\frac{\partial Q(T_n)}{\partial T_n}-k_1\right)-$$
$$-\xi_5k_2-\frac{\partial\xi_4(l,t)}{\partial t}-\frac{\partial\eta_4(l,t)}{\partial l}\Bigg)\delta T_n(l,t)+$$
$$+\left(\xi_5k_2+2T_c-2T_c^*+\xi_4k_1-\frac{\partial\xi_5(l,t)}{\partial t}-\frac{\partial\eta_5(l,t)}{\partial l}\right)\delta T_c(l,t)+$$
$$+\left(\xi_1u+\xi_3\frac{RT_n}{\rho}-\eta_1\right)\delta\zeta^{(1)}+\left(\xi_2u-\eta_2\right)\delta\zeta^{(2)}+$$
$$+\left(\xi_1\rho+\xi_3u-\xi_4(1-\gamma)T_n-\eta_3\right)\delta\zeta^{(3)}+$$
$$+\left(\xi_3R+\xi_4u-\eta_4\right)\delta\zeta^{(4)}+\left(\xi_5\omega-\eta_5\right)\delta\zeta^{(5)}\Bigg]dldt.$$

Собираем слагаемые при одинаковых вариациях функций и, используя аргументации теории вариационных исчислений, получим сопряженную систему уравнений относительно функций Лагранжа

$$\begin{gathered}\frac{\partial\xi_1}{\partial t}=\xi_1\zeta^{(3)}-\xi_3\zeta^{(1)}\frac{RT_n}{\rho^2}-\xi_4\frac{Q(T_n)}{C_v\rho^2}-\frac{\partial\eta_1}{\partial l},\\ \frac{\partial\xi_2}{\partial t}=\xi_2\frac{1}{\tau}-\xi_4\frac{q}{C_v\tau}-\frac{\partial\eta_2}{\partial l},\\ \frac{\partial\xi_3}{\partial t}=\xi_1\zeta^{(1)}+\xi_2\zeta^{(2)}+\xi_3\zeta^{(3)}+\xi_4\zeta^{(4)}-\frac{\partial\eta_3}{\partial l},\\ \frac{\partial\xi_4}{\partial t}=\xi_3\frac{R}{\rho}\zeta^{(1)}-\xi_4\Bigg((1-\gamma)\zeta^{(3)}+\\ +\left(-\frac{1}{C_v\rho}-1\right)\frac{\partial Q(T_n)}{\partial T_n}-k_1\Bigg)-\xi_5k_2-\frac{\partial\eta_4}{\partial l},\\ \frac{\partial\xi_5}{\partial t}=\xi_5k_2+2T_c-2T_c^*+\xi_4k_1-\frac{\partial\eta_5}{\partial l};\end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered}\eta_1=\xi_1u+\xi_3\frac{RT_n}{\rho},\quad \eta_2=\xi_2u,\\ \eta_3=\xi_1\rho+\xi_3u-\xi_4(1-\gamma)T_n,\\ \eta_4=\xi_3R+\xi_4u,\quad \eta_5=\xi_5\omega.\end{gathered} \tag{15}$$

С помощью (15) исключим в (14) $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5$ и, имея в виду, что

$$\frac{\partial \eta_1(l,t)}{\partial l}=u\frac{\partial \xi_1(l,t)}{\partial l}+\xi_1\frac{\partial u(l,t)}{\partial l}+\frac{RT_n}{\rho}\frac{\partial \xi_3(l,t)}{\partial l}+$$

$$+\frac{\xi_3 R}{\rho}\frac{\partial T_n(l,t)}{\partial l}-\frac{\xi_3 RT_n}{\rho^2}\frac{\partial \rho(l,t)}{\partial l},$$

$$\frac{\partial \eta_2(l,t)}{\partial l}=u\frac{\partial \xi_2(l,t)}{\partial l}+\xi_2\frac{\partial u(l,t)}{\partial l},$$

$$\frac{\partial \eta_3(l,t)}{\partial l}=\rho\frac{\partial \xi_1(l,t)}{\partial l}+\xi_1\frac{\partial \rho(l,t)}{\partial l}+u\frac{\partial \xi_3(l,t)}{\partial l}+$$

$$+\xi_3\frac{\partial u(l,t)}{\partial l}-(1-\gamma)\left(T_n\frac{\partial \xi_4(l,t)}{\partial l}+\xi_4\frac{\partial T_n(l,t)}{\partial l}\right),$$

$$\frac{\partial \eta_4(l,t)}{\partial l}=R\frac{\partial \xi_3(l,t)}{\partial l}+\xi_4\frac{\partial u(l,t)}{\partial l}+u\frac{\partial \xi_4(l,t)}{\partial l},$$

$$\frac{\partial \eta_5(l,t)}{\partial l}=\omega\frac{\partial \xi_5(l,t)}{\partial l}.$$

окончательно получим сопряженную систему относительно $\xi_i, i=\overline{1,5}$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t}=-\xi_4\frac{Q(T_n)}{C_v\rho^2}-u\frac{\partial \xi_1(l,t)}{\partial l}-$$

$$-\frac{RT_n}{\rho}\frac{\partial \xi_3(l,t)}{\partial l}-\frac{\xi_3 R}{\rho}\frac{\partial T_n(l,t)}{\partial l},$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial t}=\xi_2\frac{1}{\tau}-\xi_4\frac{q}{C_v\tau}-u\frac{\partial \xi_2(l,t)}{\partial l}-\xi_2\frac{\partial u(l,t)}{\partial l},$$

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial t}=\xi_2\frac{\partial x(l,t)}{\partial l}-\rho\frac{\partial \xi_1(l,t)}{\partial l}-u\frac{\partial \xi_3(l,t)}{\partial l}+$$

$$+(1-\gamma)T_n\frac{\partial \xi_4}{\partial l}+(2-\gamma)\xi_4\frac{\partial T_n(l,t)}{\partial l}, \qquad (16)$$

$$\frac{\partial \xi_4}{\partial t}=\xi_4\frac{R}{\rho}\frac{\partial \rho(l,t)}{\partial l}+(\gamma-2)\xi_4\frac{\partial u(l,t)}{\partial l}+$$

$$+\frac{\xi_4\gamma}{C_v\rho}\frac{\partial Q(T_n)}{\partial T_n}\xi_5 k_2-R\frac{\partial \xi_3(l,t)}{\partial l}-u\frac{\partial \xi_4(l,t)}{\partial l}-k_1\xi_4,$$

$$\frac{\partial \xi_5}{\partial t}=\xi_5 k_2+2\left(T_c-T_c^*\right)+\omega\frac{\partial \xi_5(l,t)}{\partial l}+\xi_4 k_1.$$

Начальные условия

$$\xi_i(l,T)=0, \quad i=\overline{1,5}. \qquad (17)$$

Аналогично проведем преобразования вспомогательного функционала I_2 на границе области, имея в виду, что

$$\tilde{l}=\lambda^{(1)}\left[\frac{\partial \rho(0,t)}{\partial t}-b_1 v_1(t)\right]+\lambda^{(2)}\left[\frac{\partial x(0,t)}{\partial t}-b_2 v_2(t)\right]+$$

$$+\lambda^{(3)}\left[\frac{\partial u(0,t)}{\partial t}-b_3 v_3(t)\right]+\lambda^{(4)}\left[\frac{\partial T_n(0,t)}{\partial t}-b_4 v_4(t)\right]+$$

$$+\lambda^{(5)}\left[\frac{\partial T_c(L,t)}{\partial t}-b_5 v_5(t)\right]+$$

$$+\mu^{(1)}\left[\left(v_{1\max}-v_1(t)\right)\left(v_1(t)-v_{1\min}\right)-z_1^2(t)\right]+$$

$$+\mu^{(2)}\left[\left(v_{2\max}-v_2(t)\right)\left(v_2(t)-v_{2\min}\right)-z_2^2(t)\right]+$$

$$+\mu^{(3)}\left[\left(v_{3\max}-v_3(t)\right)\left(v_3(t)-v_{3\min}\right)-z_3^2(t)\right]+$$

$$+\mu^{(4)}\left[\left(v_{4\max}-v_4(t)\right)\left(v_4(t)-v_{4\min}\right)-z_4^2(t)\right]+$$

$$+\mu^{(5)}\left[\left(v_{5\max}-v_5(t)\right)\left(v_5(t)-v_{5\min}\right)-z_5^2(t)\right].$$

$\lambda^{(i)}(t), \mu^{(i)}(t) \quad \left(i=\overline{1,5}\right)$ – функции Лагранжа.

При этом получим:

$$\delta I_2=\int_0^T\left[\eta_1(L,t)\delta\rho(L,t)-\left(\eta_1(0,t)+\frac{d\lambda^{(1)}}{dt}\right)\delta\rho(0,t)+\right.$$

$$+\eta_2(L,t)\delta x(L,t)-\left(\eta_2(0,t)+\frac{d\lambda^{(2)}}{dt}\right)\delta x(0,t)+$$

$$+\eta_3(L,t)\delta u(L,t)-\left(\eta_3(0,t)+\frac{d\lambda^{(3)}}{dt}\right)\delta u(0,t)+$$

$$+\eta_4(L,t)\delta T_n(L,t)-\left(\eta_4(0,t)+\frac{d\lambda^{(4)}}{dt}\right)\delta T_n(0,t)+$$

$$+\eta_5(L,t)\delta T_c(L,t)-\left(\eta_5(0,t)+\frac{d\lambda^{(5)}}{dt}\right)\delta T_c(0,t)+$$

$$+\left(-\lambda^{(1)}b_1+\mu^{(1)}\left(v_{1\max}-2v_1(t)+v_{1\min}\right)\right)\delta v_1(t)+$$

$$+\left(-\lambda^{(2)}b_2+\mu^{(2)}\left(v_{2\max}-2v_2(t)+v_{2\min}\right)\right)\delta v_2(t)+$$

$$+\left(-\lambda^{(3)}b_3+\mu^{(3)}\left(v_{3\max}-2v_3(t)+v_{3\min}\right)\right)\delta v_3(t)+$$

$$+\left(-\lambda^{(4)}b_4+\mu^{(4)}\left(v_{4\max}-2v_4(t)+v_{4\min}\right)\right)\delta v_4(t)+ \qquad (18)$$

$$+\left(-\lambda^{(5)}b_5+\mu^{(5)}\left(v_{5\max}-2v_5(t)+v_{5\min}\right)\right)\delta v_5(t)-$$

$$-2\mu^{(1)}z_1(t)\delta z_1(t)-2\mu^{(2)}z_2(t)\delta z_2(t)-2\mu^{(3)}z_3(t)\times$$

$$\left.\times\delta z_3(t)-2\mu^{(4)}z_4(t)\delta z_4(t)-2\mu^{(5)}z_5(t)\delta z_5(t)\right]dt,$$

откуда

$$\eta_1(0,t)+\frac{d\lambda^{(1)}}{dt}=0, \qquad \eta_2(0,t)+\frac{d\lambda^{(2)}}{dt}=0,$$

$$\eta_3(0,t)+\frac{d\lambda^{(3)}}{dt}=0, \quad \eta_4(0,t)+\frac{d\lambda^{(4)}}{dt}=0,$$

$$\eta_5(L,t)+\frac{d\lambda^{(5)}}{dt}=0$$

или с учетом (15) имеем

$$\frac{d\lambda^{(1)}}{dt}=-\xi_1(0,t)u(0,t)-\xi_3(0,t)\frac{RT_n(0,t)}{\rho(0,t)},$$

$$\frac{d\lambda^{(2)}}{dt}=-\xi_2(0,t)u(0,t),$$

$$\frac{d\lambda^{(3)}}{dt}=-\xi_1(0,t)\rho(0,t)-\xi_3(0,t)+\xi_4(0,t)(1-\gamma)T_n(0,t),$$

$$\frac{d\lambda^{(4)}}{dt}=-\xi_3(0,t)R-\xi_4(0,t)u(0,t),$$

$$\frac{d\lambda^{(5)}}{dt} = -\xi_5(L,t)\omega. \quad (19)$$

Для системы (19) начальные условия следующие:

$$\lambda^{(1)}(T)=0, \quad \lambda^{(2)}(T)=0, \quad \lambda^{(3)}(T)=0, \\ \lambda^{(4)}(T)=0, \quad \lambda^{(5)}(T)=0. \quad (20)$$

кроме того,

$$\eta^{(1)}(L,t)=0, \quad \eta^{(2)}(L,t)=0, \quad \eta^{(3)}(L,t)=0, \\ \eta^{(4)}(L,t)=0, \quad \eta^{(5)}(0,t)=0$$

или

$$\xi_1(L,t)u(L,t)+\xi_3(L,t)\frac{RT_n(L,t)}{\rho(L,t)}=0,$$
$$\xi_2(L,t)u(L,t)=0,$$
$$\xi_1(L,t)\rho(L,t)+\xi_3(L,t)u(L,t)-(1-\gamma)\xi_4(L,t)T_n(L,t)=0,$$
$$\xi_3(L,t)R+\xi_4(L,t)u(L,t)=0,$$
$$\xi_5(0,t)\omega=0.$$

Из (18) также следует, что

$$\mu^{(1)}z_1(t)=0, \quad \mu^{(2)}z_2(t)=0, \quad \mu^{(3)}z_3(t)=0, \\ \mu^{(4)}z_4(t)=0, \quad \mu^{(5)}z_5(t)=0. \quad (21)$$

$$L_1 \equiv -\lambda^{(1)}b_1+\mu^{(1)}\left(v_{1\max}-2v_1(t)+v_{1\min}\right)=0,$$
$$L_2 \equiv -\lambda^{(2)}b_2+\mu^{(2)}\left(v_{2\max}-2v_2(t)+v_{2\min}\right)=0,$$
$$L_3 \equiv -\lambda^{(3)}b_3+\mu^{(3)}\left(v_{3\max}-2v_3(t)+v_{3\min}\right)=0, \quad (22)$$
$$L_4 \equiv -\lambda^{(4)}b_4+\mu^{(4)}\left(v_{4\max}-2v_4(t)+v_{4\min}\right)=0,$$
$$L_5 \equiv -\lambda^{(5)}b_5+\mu^{(5)}\left(v_{5\max}-2v_5(t)+v_{5\min}\right)=0.$$

Таким образом, мы получим систему (16) с начальными условиями (17) и граничными условиями (19)-(22). Из (21) следует: если $z_i \equiv 0, \quad i=\overline{1,5}$, то управления $v_i(t), \quad i=\overline{1,5}$ принимают граничные значения $v_{i\min}$ или $v_{i\max}$. Если же $\mu^{(i)}(t)\equiv 0, \quad i=\overline{1,5}$, то на технологические параметр процесса наложены жесткие условия.

Левые части (22) конечно-разностных аналогов уравнений представляют собой градиенты аппроксимированного функционала качества (11). Следовательно, для решения задачи может быть применен градиентный метод.

Метод решения задачи оптимального управления заключается в следующем:

1. Задаются начальные приближения управления $v_i^0(t), \quad i=\overline{1,5}$.

2. Если $v_i^n(t)$ известны, из системы уравнений (7) и начальных и граничных условий (8) находятся $\rho^{(n)}(l,t)$, $x^{(n)}(l,t)$, $u^{(n)}(l,t)$, $T_n^{(n)}(l,t)$, $T_c^{(n)}(l,t)$ и из сопряженной задачи (16)-(22) находятся $\xi_i^{(n)}(l,t)$, $\lambda_i^{(n)}(l,t)$, $i=\overline{1,5}$.

3. Далее полагаем $v_i^{(n+1)}=v_i^n-\tau L_i, \quad n=0,1,2,\dots$, $i=\overline{1,5}$.

4. Предельные значения управлений дают решение задачи оптимального управления.

Библиографические ссылки

1. Варшавский Г. А. Горение капли жидкого топлива (диффузионная теория) // Бюро новой техники НКАП. М. : Гостехиздат, 1945. № 6. С. 87–106.
2. Демиденко Н. Д. Моделирование статических и динамических режимов в трубчатых печах // Управление, вычислительная техника и информатика // Вестник Томского государственного университета. 2012. № 3 (20). С. 13–21.
3. Демиденко Н. Д., Потапов В. И., Шокин Ю. И. Моделирование и оптимизация систем с распределенными параметрами. Новосибирск : Наука. 2006. 551 с.
4. Демиденко Н. Д., Еркаева Е. А., Школьникова И. Р. Разработка методов и программ расчета статических и динамических характеристик технологических печей. Красноярск : Вычислительный центр СО РАН СССР. 1986. 23 с.

References

1. Warshawskiy G. A. *Byuro novoy tekhniki NKAP.* Moscow, Gostekhizdat, 1945, № 6, p. 87–106.
2. Demidenko N. D. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta.* 2012, 3 (20), p. 13–21.
3. Demidenko N. D., Potapov V. I., Shokin Y. I. *Modelirovaniye i optimizatsiya sistem s raspredelennymi parametrami* (Simulation and optimization of distributed parameter systems). Novosibirsk, Nauka, 2006, 551 p.
4. Demidenko N. D., Erkayeva E. A., Shkol'nikova I. R. *Razrabotka metodov i programm rascheta staticheskikh i dinamicheskikh kharakteristik tekhnologicheskikh pechey* (Development of methods and programs for calculation of static and dynamic characteristics of process furnaces). Krasnoyarsk, Vychislitel'nyy tsentr SO RAN SSSR, 1986, 23 p.