УДК 62-506.1

О НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ

О. А. Иконников

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660014, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31
E-mail: ik_ol@mail.ru

Рассматривается задача идентификации линейных динамических систем (ЛДС) в условиях непараметрической неопределенности, т. е. исследуется случай, когда априорная информация об объекте незначительна. Сконструированы непараметрические алгоритмы моделирования с применением стохастической аппроксимации кривой регрессии. Представлены результаты непараметрического моделирования линейных динамических процессов высоких порядков. Показано качество работы построенных моделей. Исследован метод, позволяющий математически получить выборочные совокупности, на основе которых можно сформировать устойчивые динамические процессы высоких порядков.

Ключевые слова: идентификация, непараметрическое моделирование, динамический объект, интеграл Дюамеля, переходная функция.

TO NONPARAMETRIC MODELLING OF LINEAR DYNAMIC PROCESSES OF HIGH ORDER

O. A. Ikonnikov

Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev
31, Krasnoyarsky Rabochy Av., Krasnoyarsk, 660014, Russian Federation
E-mail: ik_ol@mail.ru

The linear dynamic systems (LDS) identification problem in conditions of nonparametric uncertainty is considered, i. e. the case, when the object priori information either insignificant or completely absent is researched. The nonparametric modeling algorithms based on Duhamel (convolution) integral with stochastic approximation of curve of regression are constructed. This paper contains the results of nonparametric modeling of linear dynamic processes of high orders. The quality of constructed models work is registered. The method permissive to generate mathematically stable linear dynamic object of high order is offered.

Keywords: identification, nonparametric modeling, dynamic object, Duhamel integral, transition function.

В последнее время достаточно высокий уровень развития информационных технологий подразумевает под собой практическую разработку и исследование новых или недостаточно хорошо изученных на сегодняшний день задач в сфере управления, идентификации, а также моделирования различных динамических процессов.

Первым этапом в общем комплексе работ по математическому моделированию является *идентификация* изучаемого объекта, т. е. построение его математической модели. Под идентификацией будем понимать построение математической модели, устанавливающей закономерность между выходными и входными переменными объекта, которая дает возможность определить с заданной точностью выходную переменную этого объекта по его входным переменным. Основой для создания модели данного объекта служат результаты измерений его входных и выходных переменных. При этом важно лишь то, что измерения входных и выходных сигналов производятся синхронно, т. е. в одинаковые моменты времени.

В общем случае построение модели для конкретного объекта требует по результатам измерений входного и выходного сигналов отнесения данного объекта к определенному классу. При этом будем исходить из статистической постановки задачи идентификации, считая, что возмущение (входная переменная) $u(t)$ и реакция (выходная переменная) $x(t)$ представляют собой случайные функции или случайные величины.

Если динамические характеристики объекта описываются оператором A, то при наличии результатов измерений входной и выходной случайных функций (переменных) задача идентификации сводится к определению некой оценки $\tilde{A}$ оператора A. Естественно требовать близости оценки $\tilde{A}$ к истинному значению оператора A, что равносильно требованию близости случайной функции на выходе модели [1]

$$\tilde{x}(t) = \tilde{A}u(t) \qquad (1)$$

к случайной функции $x(t)$, являющейся реакцией самой системы на входное возмущение $u(t)$.

Самым распространенным критерием в задачах идентификации является критерий минимума квадрата ошибки оценки оператора A. Этот критерий выглядит следующим образом [1]:

$$w = \sum_{i=1}^{s} (x(t_i) - \tilde{x}(t_i))^2 \to \min, \qquad (2)$$

где s – объем выборки.

Непараметрическая теория, как известно, имеет такой уровень развития, который позволяет охватывать практически любые порядки исследуемых процессов. Несмотря на довольно большой объем вычислений, была предпринята попытка получить результаты по математическому моделированию динамических процессов, порядок которых достаточно высок, и выяснить, а действительно ли непараметрические модели могут удовлетворительно работать с такими процессами.

В теории регулирования для описания работы динамических систем, на входе которых наблюдаются сигналы произвольной формы, очень часто применяется *интеграл Дюамеля (свертки)*:

$$x(t) = k(0)u(t) + \int_0^t k'(t-\tau)u(\tau)d\tau =$$

$$= k(0)u(t) + \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau, \qquad (3)$$

где k и h – переходная и весовая функции соответственно; u – входное динамическое воздействие на систему.

Математическая модель, построенная на основе этого интеграла с применением непараметрической аппроксимации кривой регрессии, имеет следующий вид [2]:

$$x_s(t) = k(0)\cdot u(t) + \frac{1}{s\cdot c_s}\cdot\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t/\Delta\tau} k_i \cdot H'(\frac{t-\tau_i - t_i}{c_s})\cdot u(\tau_i)\Delta\tau. \quad (4)$$

Пусть исследуемый линейный динамический процесс описывается дифференциальным уравнением следующего вида:

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 x(t) = u(t). \qquad (5)$$

Это уравнение связывает координаты выходного состояния объекта $x(t)$ с входным воздействием $u(t)$, и эта связь подчинена определенному дифференциальному закону. Для работы на ЭВМ выражение (5) представляется в дискретно-разностной форме, а результаты счета представляются в графическом виде. Получение выходных сигналов объекта происходит посредством измерения координаты x_t через определенные промежутки времени Δt, от величины которых зависит точность аппроксимации.

Проводились численные исследования линейных динамических процессов десятого, пятнадцатого, а также двадцатого порядков. Результаты проведенных численных исследований изображены на рис. 1, 2. Машинное время счета обозначено как Tc.

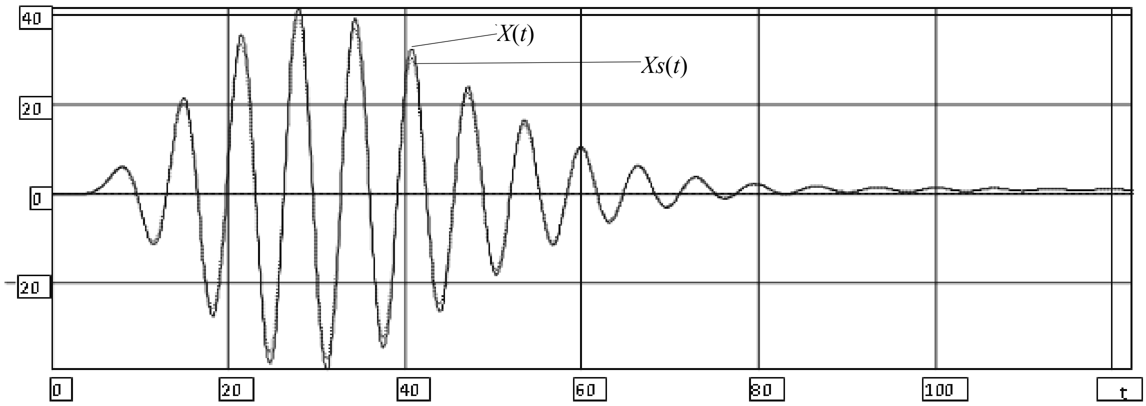

Рис. 1. Переходные функции объекта и модели (Δt = 0,07, s = 1750, n = 10, Tc = 23 мин)

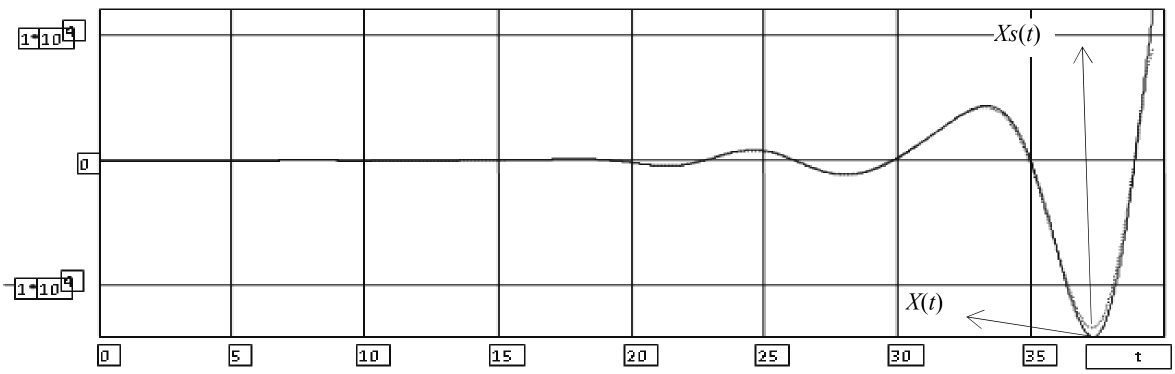

Рис. 2. Переходные функции объекта и модели (Δt = 0,02, s = 2000, n = 10, Tc = 29 мин)

Как можно видеть из рисунков, качество работы построенной непараметрической модели весьма удовлетворительно. В этом можно убедиться, посмотрев на поведение кривых, которые практически совпадают на графиках.

Однако несмотря на вполне корректные модельные результаты, нетрудно заметить, что при уменьшении интервала дискретизации процесс теряет свою устойчивость. Как выяснилось, метод дискретных разностей, который с успехом применяется для исследований процессов, порядок которых относительно невысок, является не совсем пригодным для работы с подобными задачами. Задача усложняется тем, что для исследования были взяты процессы, все корни характеристических уравнений которых были комплексными. Было предложено использовать другой численный метод, а именно, метод из серии (М, К) – методов типа Розенброкка. Для простоты и наглядности в качестве примера для пояснения метода ограничимся дифференциальным уравнением второго порядка.

Пусть объектом исследования выступает следующее дифференциальное уравнение:

$$a_2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = u(t). \tag{6}$$

Составим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = y(t) \\ a_2 \dfrac{dy(t)}{dt} + a_1 y(t) + a_0 x(t) = u(t). \end{cases} \tag{7}$$

Пусть $z_1 = x(t)$, тогда $z_2 = y(t)$, а систему (7) представим в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = z_2 \\ \dfrac{dz_2}{dt} = -\dfrac{a_1}{a_2} z_2 - \dfrac{a_0}{a_2} z_1 + \dfrac{u(t)}{a_2}. \end{cases} \tag{8}$$

Примем $\dfrac{dz_n}{dt} = f(z_n)$, причем $z_n = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, тогда

$$f(z_n) = \begin{pmatrix} z_2 \\ -\dfrac{a_1}{a_2} z_2 - \dfrac{a_0}{a_2} z_1 + \dfrac{u(t)}{a_2} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Запишем, собственно, сам алгоритм, который использует данный метод:

$$z^{n+1} = z^n + dk_1 + (1 - d)k_2, \tag{10}$$

где $d = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, k_1 и k_2 – векторы искомых значений, которые находятся из следующих равенств:

$$Dk_1 = hf(z_n),\ Dk_2 = k_1. \tag{11}$$

При этом

$$D = E - d \cdot \Delta t \cdot \frac{\partial f(z_n)}{\partial z_n}, \tag{12}$$

где E – единичная матрица, а матрица Якоби равна

$$\frac{\partial f(z_n)}{\partial z_n} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(z_1)}{\partial z_1} & \dfrac{\partial f(z_1)}{\partial z_2} \\ \dfrac{\partial f(z_2)}{\partial z_1} & \dfrac{\partial f(z_2)}{\partial z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{a_0}{a_2} & -\dfrac{a_1}{a_2} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & d \cdot \Delta t \\ -\dfrac{a_0}{a_2} d \cdot \Delta t & -\dfrac{a_1}{a_2} d \cdot \Delta t \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -d \cdot \Delta t \\ \dfrac{a_0}{a_2} d \cdot \Delta t & 1 + \dfrac{a_1}{a_2} d \cdot \Delta t \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{14}$$

После проведенных преобразований нетрудно отыскать векторы k_1 и k_2, подставив которые в (10) становится возможным получение серии решений уравнения (6) в точке $t = t_0$.

Далее процедура, проведенная выше, повторяется, но при этом

$$t = t_1 = \Delta t + t_0. \tag{15}$$

Таким образом находится серия решений в точке $t = t_1$ и т. д., пока не закончится время, ограниченное объемом выборки и интервалом дискретизации.

Как видно из рисунков, хотя процедура получения истинных процессов высоких порядков в системе с применением численного метода дискретных разностей стала невозможной, мы можем наблюдать тот факт, что с увеличением порядка дифференциального уравнения, которым описывается реальный процесс в системе, существенно растут как объемы выборок, так и время регулирования процесса, что приводит к не менее существенному росту машинного времени *Tc*, затрачиваемого на реализацию математических расчетов.

Библиографические ссылки

1. Иконников О. А., Первушин В. Ф. Исследование непараметрических моделей динамических систем // Вестник СибГАУ. 2013. Вып. 1(47). С. 36–40.

2. Медведев А. В. Об идентификации линейных динамических систем // Алгоритмы и программы в системах обработки экспериментальных данных. Фрунзе : Илим, 1975. С. 14–26.

References

1. Ikonnikov O. A., Pervushin V. F. [The study of nonparametric models of dynamic systems]. *Vestnik SibGAU*, vol. 47, no. 1, 2013, p. 36–40. (In Russ.)

2. Medvedev A. V. [To identification of linear dynamic systems]. *Algoritmy i programmy v sistemakh obrabotki eksperimental'nykh dannykh* [Algorithms and programs in experimental data processing systems]. Frunze, Ilim Publ., 1975, p. 14–26.