УДК 517.55

Вестник СибГАУ
2014. № 3(55). С. 48–54

ЗАДАЧА ГОЛЬДШТИКА О СКЛЕЙКЕ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ*

И. И. Вайнштейн, И. М. Федотова

Институт космических и информационных технологий Сибирского федерального университета
Российская Федерация, 660074, г. Красноярск, ул. Академика Киренского, 26, кор. УЛК
E-mail: web.ikit@sfu-kras.ru

Рассматривается осесимметрическая модель вихревых течений идеальной несжимаемой жидкости с разрывной нелинейной завихренностью. Предложенная модель является обобщением схемы Лаврентьева, описывающей плоские отрывные течения идеальной жидкости, на осесимметрический случай. В терминах функции тока решается краевая задача Дирихле для неоднородного эллиптического уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу с разрывной нелинейностью в правой части уравнения относительно решения. Рассматриваемая задача является обобщением известной задачи Гольдштика о склейке плоских вихревых и потенциальных течений идеальной жидкости на осесимметрический случай.

Показывается существование так называемого тривиального решения, которое соответствует потенциальному течению во всей области. На модельном примере (течение в шаре) устанавливается существование двух отличных от тривиального решений. Для общего случая задачи доказано существование нетривиального решения, показывающего существование рассматриваемого класса вихревых осесимметрических течений идеальной жидкости. В рассматриваемой модели считается, что стационарное течение идеальной жидкости является предельным течением вязкой жидкости при вязкости, стремящейся к нулю.

Ключевые слова: вихревые и потенциальные течения, завихренность, задача Гольдштика, тривиальное решение, функция Грина, интегральное уравнение.

Vestnik SibGAU
2014, No. 3(55), P. 48–54

GOLDSHTIK’S PROBLEM OF PASTING OF VORTICAL CURRENTS OF AN IDEAL LIQUID IN THE AXIALLY SYMMETRIC CASE

I. I. Vainshtein, I. M. Fedotova

Institute of space and information technologies of Siberian Federal University
26, Kirenskogo St., ULK building, Krasnoyarsk, 660074, Russian Federation
E-mail: web.ikit@sfu-kras.ru

We consider that axially symmetric model of vortical flows of an ideal incompressible liquid with discontinuous nonlinear vorticity. The proposed model is a generalization of the Lavrentev’s scheme planar separated flows of an ideal fluid for the axially symmetric case. In terms of the the flow function we solve the Dirichlet problem for the inhomogeneous elliptic Euler-Poisson-Darboux equation with discontinuous nonlinearity is relative to the decision in the right part of the equation. This problem is a generalization of the well-known problem of Goldshtik of pasting planar vortical and potential flows of an ideal liquid on the axially symmetric case.

The existence of the so-called trivial solution, which corresponds to the potential flows in the whole domain is shown. On a model example (flow in the ball) we establish the existence of two non-trivial solutions. For the general case of the problem we prove the existence of a nontrivial solution, indicating the existence of this class of axially symmetric vortical flows of an ideal liquid. In the model it is assumed that the stationary flow of an ideal liquid is a limiting flow of a viscous with viscosity tends to zero.

Keywords: vortical and potential flows, vorticity, Goldshtik’s Problem, trivial decision, Green’s function, integral equation.

---

* Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ Сибирскому федеральному университету на выполнение НИР в 2014 году (задание № 1.1462.2014/K).

Постановка задачи. Стационарное вихревое течение идеальной несжимаемой жидкости в плоском случае описывается уравнением

$$\frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial y^2}=F(\psi), \qquad (1)$$

где завихренность $\omega=F(\psi)$; F – произвольная функция от ψ; $\psi(x,y)$ – функция тока; $V_x=\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $V_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$ – компоненты скорости, и в осесимметрическом случае при $rV_\varphi=\text{const}$ – уравнением

$$\frac{\partial^2\psi(z,r)}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi(z,r)}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi(z,r)}{\partial r}=F(\psi)r^2, \qquad (2)$$

где завихренность $\omega=F(\psi)r$; $r=\sqrt{x^2+y^2}$; $V_r=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}$; $V_z=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$ [1]. В случае $\omega=0$ имеем потенциальное течение.

В работе изучаются вихревые потоки с зонами, имеющими различные завихренности, у которых общая граница – «нулевая» линия тока. Здесь не исключается возможность завихренности равняться нулю. В этом случае имеем задачу о склейке вихревых и потенциальных течений идеальной жидкости, впервые предложенной М. А. Лаврентьевым применительно к отрывным течениям [2].

Если стационарное течение идеальной жидкости считать как предельное течение вязкой жидкости при вязкости, стремящейся к нулю, то в области течения, ограниченной замкнутой линией тока, $F(\psi)=\text{const}$ [1].

Пусть D – ограниченная область с границей Γ, $\omega_1\ge 0,\ \omega_2\ge 0$. Следуя [2–4], рассмотрим задачи:

– в области D требуется найти непрерывно дифференцируемое решение уравнения

$$\Delta\psi(x,y)=\begin{cases}\omega_1, \text{ если } \psi<0,\\ -\omega_2, \text{ если } \psi>0,\end{cases} \qquad (3)$$

в плоском и осесимметрическом случае

$$\frac{\partial^2\psi(z,r)}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi(z,r)}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi(z,r)}{\partial r}= =\begin{cases}\omega_1 r^2, \text{ если } \psi<0,\\ -\omega_2 r^2, \text{ если } \psi>0,\end{cases} \qquad (4)$$

при краевом условии

$$\psi|_\Gamma=\varphi(s)\ge 0. \qquad (5)$$

Рассмотрим задачу (3), (5) при $\omega_2=0$. Имеем задачу Гольдштика о склейке вихревых и потенциальных течений [1; 6]. Гармоническая функция $\psi_0(x,y)$, удовлетворяющая условию (5), положительна в области D и является решением уравнения (3). Это решение назовем тривиальным. Оно соответствует потенциальности течения во всей области.

В [1; 6] доказано существование нетривиального (с областью отрицательности) решения задачи (3), (5) при достаточно большом значении величины ω_1. В [4; 5] получено условие

$$\omega_1>\frac{4Ce}{R^2}, \qquad (6)$$

при котором существует нетривиальное решение задачи, где R – радиус наибольшего по площади круга, который можно вписать в область D; $C=\max\varphi(s)$. Если D – круг радиуса R и $\varphi(s)=C$, то при выполнении (6) задача (3), (5) имеет два нетривиальных решения [4]. Существование второго нетривиального решения задачи (3), (5) при $\omega_2=0$ доказано в [7; 8].

В работах [9–18] рассмотрены различные задачи о склейке вихревых и потенциальных течений, например, для неограниченной области или когда завихренность является произвольной функцией от функции тока. Задача (3), (5) при $\omega_1=0, \omega_2<0$ описывает течение идеальной жидкости в поле кориолисовых сил [1; 9; 14].

В общем случае задачи (3), (5) функция

$$\psi(x,y)=\psi_0(x,y)+\frac{\omega_2}{2\pi}\iint_D G(x,y,x_1,y_1)dx_1dy_1,$$

где $G(x,y,x_1,y_1)$ – функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа больше нуля во всей области D и тем самым является тривиальным решением задачи (3), (5). Это решение дает вихревое течение с постоянной завихренностью $-w_2$ во всей области течения.

Пусть B_1 – круг наибольшего радиуса R_1 такой, что $B_1\subseteq D$ (без ограничения общности можно считать, что его центр совпадает с началом координат), B_2 – круг наименьшего радиуса R_2 с центром в начале координат такой, что $B_2\supseteq D$. В [5] доказано, что при выполнении неравенства

$$w_1-\frac{w_2R_2^2}{R_1^2}eJ\frac{4Ce}{R_1^2}$$

задача (3), (5) имеет отличное от тривиального решение, что соответствует плоскому вихревому течению с разрывной кусочно-постоянной завихренностью.

Целью работы является исследование задачи (4), (5), описывающей вихревые осесимметрические течения идеальной жидкости с разрывной завихренностью.

Задача (4), (5). Тривиальное решение. Существование нетривиального решения. Пусть область D ограничена гладкой кривой σ, лежащей в верхней полуплоскости $r>0,$ и отрезком $[\alpha,\beta]$ оси z. Краевое условие (5) запишем в виде

$$\psi\big|_{\Gamma}=r^2\varphi(s)\geq 0. \qquad (7)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости равенства:

$$Lr^2\psi=r^2L^*\psi, \qquad (8)$$

$$L(\psi)=\frac{\partial^2\psi(z,r)}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi(z,r)}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi(z,r)}{\partial r},$$

$$L^*(\psi)=\frac{\partial^2\psi(z,r)}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi(z,r)}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial\psi(z,r)}{\partial r}.$$

Будем искать решение задачи (4), (5) в виде $\psi=r^2u(z,r)$. В соответствии с (8) задача (4), (5) переформулируется в следующем виде: требуется найти непрерывно дифференцируемое в области D решение уравнения

$$\frac{\partial^2u(z,r)}{\partial z^2}+\frac{\partial^2u(z,r)}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial u(z,r)}{\partial r}=\begin{cases}\omega_1, \text{ если } u<0,\\ -\omega_2, \text{ если } u>0,\end{cases} \qquad (9)$$

ограниченное при $r\to 0$, при краевом условии

$$u\big|_{\sigma}=\varphi(s)\geq 0. \qquad (10)$$

Пример. Пусть область D – полукруг $r^2+z^2\leq R^2\ (r>0),$ и условие (10) имеет вид

$$u\big|_{\sigma}=C\geq 0.$$

Это соответствует течению в шаре радиуса R.

Перейдем в уравнении (9) к полярным координатам и будем искать решение, зависящее только от $\rho,\ \rho^2=z^2+r^2$.

Имеем

$$\frac{\partial^2u(\rho)}{\partial\rho^2}+\frac{4}{\rho}\frac{\partial u(\rho)}{\partial\rho}=\begin{cases}\omega_1, & \text{если } 0\leq\rho<a,\\ -\omega_2, & \text{если } a<\rho<R,\end{cases} \qquad (11)$$

и дополнительные условия

$$u(R)=C,\ u(a)=0,\ u'(a-0)=u'(a+0),$$
$$u(\rho) \text{ ограничена при } \rho\to 0. \qquad (12)$$

Функция

$$u(\rho)=\frac{w_2}{10}(R^2-r^2)+C$$

является тривиальным решением задачи. Ищем нетривиальные решения в виде

$$u(\rho)=\begin{cases}\dfrac{\omega_1}{10}(\rho^2-a^2), & \text{если } \rho\leq a,\\ -\dfrac{\omega_2}{10}\rho^2+\dfrac{C_1}{\rho^3}+C_2, & \text{если } a\leq\rho<R.\end{cases} \qquad (13)$$

Удовлетворяя дополнительным условиям (12), получаем уравнение для нахождения величины a:

$$(\omega_1+\omega_2)a^2(a^3-R^3)+15\left(C-\frac{\omega_2}{10}(a^2-R^2)\right)R^3=0.$$

Обозначим $x=\dfrac{a}{R}$, $0\leq x\leq 1$ и введем функцию

$$y(x)=x^2(x^3-1)+15\left(\frac{C\omega}{\omega_2R^2}-\frac{\omega}{10}(x^2-1)\right),\ \omega=\frac{\omega_2}{\omega_1+\omega_2}.$$

Исследуем функцию $y(x)$. Имеем

$$y(0)=15\left(\frac{C\omega}{\omega_2R^2}+\frac{\omega}{10}\right)>0,\quad y(1)=15\frac{C\omega}{\omega_2R^2}>0. \qquad (14)$$

Далее

$$y'(x)=5x^4-2x-3\omega x=0.$$

Отсюда $x_*=\sqrt[3]{\dfrac{2+3w}{5}}<1$ – корень полученного уравнения. Требуем $y(x_*)<0$. Это приводит к выполнению неравенства

$$\left(\frac{2\omega_1+5\omega_2}{5}\right)^5>\left(\frac{10C}{R^2}+\omega_2\right)^3(\omega_1+\omega_2)^2. \qquad (15)$$

Тогда с учетом (14) кривая $y(x)$ будет пересекать ось Ox на интервале (0,1) в двух точках x_1, x_2. Беря в (13) $a=Rx_1$ и $a=Rx_2$, получаем два нетривиальных решения.

Полагая в (15) $\omega_2=0$, получаем неравенство

$$\omega_1>25\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{C}{R^2}, \qquad (16)$$

выполнение которого дает условие существования двух нетривиальных решений, когда в одной из зон течение потенциально [4].

Целью дальнейшего исследования является нахождение условий, при которых задача (4), (5) имеет нетривиальное решение.

Существование нетривиального решения. Для оператора L^* известно фундаментальное решение [19]

$$E(z,r,z_1,r_1)=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\Big[(z-z_1)^2+r_1^2+$$
$$+r^2-2r_1r\cos\beta\Big]^{-3/2}\sin^2\beta d\beta, \qquad (17)$$

которое как относительно z, r, так и z_1, r_1 при $z\neq z_1$, $r\neq r_1$ является решением уравнения

$$L^*E=0.$$

После замены $1+\cos\beta=t$

$$E=\frac{4}{\pi}\int_0^2[(z-z_1)+(r+r_1)-2rr_1t]^{-3/2}\sqrt{t(2-t)}dt=$$

$$= \frac{8}{\sqrt{\pi}} R_1^{-3} F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3; 1-\sigma\right),$$

где $F(a,b,\gamma;c)$ – гипергеометрическая функция [20],

$$h = \frac{R^2}{R_1^2},$$

где $R^2 = (z-z_1)^2 + (z-z_1)^2$, $R_1^2 = (z-z_1)^2 + (z+z_1)^2$.

Принимая во внимание формулу [21]

$$F(a,b,a+b;1-h) =$$
$$= \Gamma(a+b)\Gamma^{-1}(a)\Gamma^{-1}(b)F(a,b,1,h)\ln h + \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma^2(a)\Gamma^2(b)} \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{(k!)^2} [2\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} - \frac{\Gamma'(a+k)}{\Gamma(a+k)} - \frac{\Gamma'(b+k)}{\Gamma(b+k)}]h^k,$$

получаем

$$E(z,r,z_1,r_1) = -\frac{2}{\pi}(rr_1)^{-\frac{3}{2}} \ln[(z-z_1)^2 +$$
$$+ r_1^2 + r^2] + \bar{R}(z,r,z_1,r_1),$$

где $\bar{R}$ – регулярная в области *D* функция.

Будем предполагать, что кривая σ подходит к точкам α и β под углами, отличными от нуля и π соответственно. В [4; 20] для уравнения $L^* u = 0$, с использованием фундаментального решения (17), введена функция Грина $G(r,z,r_1,z_1)$ ($G > 0$ в области *D*) и доказано, что функция

$$V(z,r) = -\frac{1}{8} \iint_D f(z_1, r_1) r_1^3 G(r,z,r_1,z_1) dz_1 dr_1 \qquad (18)$$

внутри области *D* обладает свойствами аналогичными свойствам ньютоновского потенциала с логарифмитической особенностью на плоскости, на границе равняется нулю и непрерывна при $r_1 \to 0$. Причем, если $f(z,r)$ ограничена и измерима в области *D*, то в любой подобласти $\bar{B} \subset D$ функция $V(z,r)$ имеет первые производные, удовлетворяющие условию Гельдера с константой Гельдера, зависящей только от $\max|f|$ и расстояния области *B* до границы области *D*. Если функция $f(z,r)$ удовлетворяет в области *D* условию Гельдера, то в *D*

$$L^* V = f(z,r).$$

Пусть функция $u_0(z,r)$ непрерывна в $\bar{D}$, в области *D* удовлетворяет уравнению

$$L^* u_0 = 0$$

и

$$u_0\big|_\sigma = \varphi(s) \ge 0.$$

Существование такой функции доказано в [22]. Там же доказано, что отличное от константы непрерывное в рассматриваемой области $\bar{D}$ решение уравнения $L^* u\ (z,r) = 0$ максимальное и минимальное значение принимает только на σ. Отсюда следует, что $u_0 > 0$ в *D*.

Функция

$$u_*(z,r) = u_0(z,r) + \frac{\omega_2}{8} \iint_D r^3{}_1\ G(r,z,r_1,z_1) dr_1 dz_1 \qquad (19)$$

в области *D* положительна, удовлетворяет уравнению $L^* u_*(z,r) = -\omega_2$ и тем самым является тривиальным решением рассматриваемой задачи (9), (10). Это соответствует вихревому течению во всей области с одной постоянной завихренностью $-\omega_2$.

Для нахождения нетривиального решения рассмотрим последовательность вспомогательных задач

$$L^* u_n = \begin{cases} \omega_1, (r,z) \in B_a, \\ \frac{\omega_1}{2}(1 - th(u_n \cdot n)) - \frac{\omega_2}{2}(1 + th(u_n \cdot n)),\ (r,z) \in D \setminus \bar{B}_a \end{cases} \qquad (20)$$

при краевом условии

$$u_n\big|_\sigma = \varphi(s), \qquad (21)$$

где B_a – полукруг $r^2 + z^2 \le a^2\ (r > 0)$, $B_a \subset D$.

Задача (19), (20) эквивалентна интегральному уравнению

$$u_n(z,r) = u_0(z,r) - \frac{\omega_1}{8} \iint_{B_a} r_1^3 G(z,r,z_1,r_1) dz_1 dr_1 -$$
$$- \frac{1}{8} \iint_{D \setminus B_a} r_1^3 (\frac{\omega_1}{2}(1 - th(\psi_n \cdot n)) - \qquad (22)$$
$$- \frac{\omega_2}{2}(1 + th(\psi_n \cdot n))) G(z,r,z_1,r_1) dz_1 dr_1.$$

Исходя из указанных свойств интеграла (18), следуя [1; 3], заключаем (используя теорему Шаудера), что интегральное уравнение (22) в области $D \setminus \bar{B}_a$ при каждом *n* имеет решение. Подставляя это решение в правую часть уравнения (22), определяем функцию $u_n(z,r)$ во всей области *D*. Полученная функция – решение задачи (20), (21). Учитывая еще раз свойства интеграла (18) и применяя теорему Арцелла, устанавливаем компактность последовательности $u_n(z,r)$ в пространстве непрерывно дифференцируемых в области *D* функций. Пусть подпоследовательность $u_{n_k}(z,r)$ сходится к непрерывно дифференцируемой функции u^*. Учитывая

$$\lim_{n_k \to \infty} \frac{1}{2}(1 - th(u_{n_k} \cdot n_k)) = \begin{cases} 1, \text{ если } u(z,r) < 0, \\ 0, \text{ если } u(z,r) > 0, \end{cases}$$

получаем, что правая часть уравнения (21) в пределе совпадает с правой частью уравнения (9). Далее, аналогично [1; 4; 9], устанавливаем, что предельная функция является непрерывно дифференцируемым решением задачи

$$\frac{\partial^2 u^*(z,r)}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u^*(z,r)}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial u^*(z,r)}{\partial r}= \\ =\begin{cases}\omega_1, \text{ если } (r,z)\in B_a, \\ -\omega_2, \text{ если } (r,z)\in D\setminus \overline{B}_a,\end{cases} \tag{23}$$

$$u^*\big|_\sigma=\varphi(s).$$

Подберем полукруг B_a в (23) так, чтобы полученная функция u^* была в нем отрицательна. Тогда она будет искомым нетривиальным решением рассматриваемой задачи.

Пусть B_1 – полукруг $r^2+z^2<R_1^2,\ r>0,$ наибольшего радиуса R_1 такой, что $B_1\subseteq D$ (без ограничения общности можно считать, что его центр совпадает с началом координат), B_2 – полукруг $r^2+z^2<R_2^2,\ r>0,$ наименьшего радиуса R_2 с центром в начале координат такой, что $B_2\supseteq D$ и G_{B_1}, G_{B_2} – функции Грина для областей B_1, B_2 соответственно.

Рассмотрим функции

$$V_1(z,r)=\iint\limits_{B_a} r_1^3 G(z,r,z_1,r_1)dz_1dr_1- \\ -\iint\limits_{B_a} r_1^3 G_{B_1}(z,r,z_1,r_1)dz_1dr_1,\quad (z,r)\in B_1,$$

$$V_2(z,r)=\iint\limits_{D} r_1^3 G(z,r,z_1,r_1)dz_1dr_1- \\ -\iint\limits_{B_2} r_1^3 G_{B_2}(z,r,z_1,r_1)dz_1dr_1,\ (z,r)\in D.$$

Пусть B_a – полукруг $z^2+r^2<a^2$, $0<a<R_1$. Тогда

$$L^*V_1=0,\ (z,r)\in B_1,$$

$$L^*V_2=0,\ (z,r)\in D,$$

$$V_1\big|_{\sigma_1}>0,\ V_2\big|_{\sigma}<0.$$

Отсюда и из принципа экстремума для уравнения $L^*V(z,r)=0$ следует

$$-\iint\limits_{B_a} r_1^3 G(z,r,z_1,r_1)dz_1dr_1< \\ <-\iint\limits_{B_a} r_1^3 G_{B_1}(z,r,z_1,r_1)dz_1dr_1,\ (r,z)\in B_1,$$

$$\iint\limits_{D} r_1^3 G(z,r,z_1,r_1)dz_1dr_1< \\ <\iint\limits_{B_2} r_1^3 G_{B_2}\ (z,r,z_1,r_1)dz_1dr_1,\ (r,z)\in D.$$

Применяя полученные неравенства в (22) $((z,r)\in B_1)$, получаем

$$u_n(z,r)\le u_0(z,r)-\frac{\omega_1}{8}\iint\limits_{B_a} r_1^3 G_{B_1}(z,r,z_1,r_1)dz_1dr_1+ \\ +\frac{\omega_2}{8}\iint\limits_{D} r_1^3 G(z,r,z_1,r_1)dz_1dr_1\le \\ \le C-\frac{\omega_1}{8}\iint\limits_{B_a} r_1^3 G_{B_1}(z,r,z_1,r_1)dz_1dr_1+ \\ +\frac{\omega_2}{8}\iint\limits_{B_2} r_1^3 G_{B_2}(z,r,z_1,r_1)dz_1dr_1\le \\ \le C+\frac{\omega_2 R_2^2}{5}-\frac{\omega_1}{8}\iint\limits_{B_a} r_1^3 G_{B_1}(z,r,z_1,r_1)dz_1dr_1. \tag{24}$$

Обозначим

$$v(z,r)=C+\frac{\omega_2 R_2^2}{5}-\frac{\omega_1}{8}\iint\limits_{B_a} r_1^3 G_{B_1}(z,r,z_1,r_1)dz_1dr_1. \tag{25}$$

Подберем полукруг B_a в (25) так, чтобы функция $v(z,r)$ на его границе равнялась нулю. Тогда она будет в B_a меньше нуля, а в $B_1\setminus B_a$ – больше нуля. В этом случае она является решением частного случая задачи, рассмотренной в примере, если положить $\omega_2=0$, а граничное условие взять

$$v\big|_{\sigma_1}=C+\frac{\omega_2 R_2^2}{5}.$$

Для этого случая условие (16) существования требуемого полукруга B_a принимает вид

$$\omega_1>25\left(\frac{5}{2}\right)^{2/3}\left(\frac{C}{R_2^2}+\frac{\omega_2}{5}\right). \tag{26}$$

Пусть выполнено неравенство (26). Учитывая, что $u^*<\nu$ при $(z,r)\in B_1$, заключаем, что полученное решение u^* меньше нуля в полукруге B_a, а это значит, что оно является отличным от тривиального решением рассматриваемой задачи.

Таким образом, установлено, что при выполнении неравенства (26) существуют осесимметрические вихревые течения с разрывными завихренностями, и такие течения обладают эффектом неединственности.

Замечание. Если в плоском случае вихревое течение идеальной жидкости описывается уравнением (1), то осесимметрическое течение в общем случае – уравнением

$$L\psi=r^2F(\psi)-\Gamma(\psi)\Gamma'(\psi),$$

где $F(\psi)$ и $\Gamma(\psi)$ – произвольные функции от ψ,

$$V_r=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z},\ V_z=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r},\ rV_\varphi=\Gamma(\psi).$$

Вопрос об определении функций $F(\psi)$ и $\Gamma(\psi)$ рассмотрен в [1]. Как указывалось выше, одним из подходов их определения является рассмотрение течения идеальной жидкости как предельного значения вязкой, при стремлении вязкости к нулю. В этом случае $F(\psi)$ и $\Gamma(\psi)$ являются константами. В общем случае функции $F(\psi)$ и $\Gamma(\psi)$ должны быть заданы исходя из граничных условий. Задача, рассматриваемая в настоящей работе, соответствует случаю, когда $F(\psi)$ и $\Gamma(\psi)$ равны константам.

Библиографические ссылки

1. Гольдштик М. А. Вихревые потоки. Новосибирск : Наука, 1981. 365 с.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М. : Наука, 1973. 416 с.
3. Вайнштейн И. И. Об одной краевой задаче вихревых и потенциальных течений идеальной жидкости в осесимметрическом случае // Дифференциальные уравнения. 1970. Т. 6. № 1. С. 109–122.
4. Вайнштейн И. И. Движение идеальной жидкости с завихренными зонами : дис. … канд. физ.-мат. наук . Новосибирск, 1972. 125 с.
5. Вайнштейн И. И., Юровский В. К. Об одной задаче сопряжения вихревых течений идеальной жидкости // Журн. прикл. мех. и техн. физ. 1976. № 5. С. 98–100.
6. Гольдштик М. А. Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147, № 6. С. 1310–1313.
7. Вайнштейн И. И. Решение двух дуальных задач о склейке вихревых и потенциальных течений вариационным методом М. А. Гольдштика // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2011. № 4(3). С. 320–331.
8. Потапов Д. К. О числе решений для одного класса уравнений эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью // Дальневост. матем. журн. 2012. Т. 12, № 1. С. 86–88.
9. Вайнштейн И. И., Гольдштик М. А. О движении идеальной жидкости в поле кориолисовых сил // Докл. АН СССР. 1967. Т.173, № 6. С. 1277–1280.
10. Шабат А. Б. Об одной схеме плоского движения жидкости при наличии на дне траншеи // Журн. прикл. мех. и техн. физ. 1962. № 4. С. 68–80.
11. Шабат А. Б. О двух задачах на склеивание // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150. № 6. С. 1242–1245.
12. Антонцев С. Н., Лелюх В. Д. Некоторые задачи сопряжения вихревых и потенциальных дозвуковых течений // Динамика сплошной среды. Новосибирск. 1969. Вып. 1. С. 134–153.
13. Плотников П. И. О разрешимости одного класса задач на склеивание потенциального и вихревого течений // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1969. Вып. 3. С. 61–69.
14. Вайнштейн И. И. Дуальная задача к задаче М. А. Гольдштика с произвольной завихренностью // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2010. № 3(4). С. 500–506.
15. Вайнштейн И. И., Федотова И. М. Дуальная задача к задаче М. А. Гольдштика с неограниченной завихренностью // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2012. № 5(4). С. 515–526.
16. Вайнштейн И. И., Литвинов П. С. Модель М. А. Лаврентьева о склейке вихревых и потенциальных течений из жидкости // Вестник СибГАУ. 2009. № 3(24). С. 7–9.
17. Васин А. В., Тимофеева О. А. Нахождение линии раздела областей с потенциальным и вихревым течением // Журнал Университета водных коммуникаций. 2012. Вып. 2 (14). С. 8–13.
18. Потапов Д. К. О решениях задачи Гольдштика // Сиб. журн. вычисл. матем. 2012. 15(4). С. 409–415.
19. Терсенов С. А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. Новосибирск, 1973. 144 с.
20. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. М. : Физматгиз,1963. 1100 с.
21. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М. : Гостехиздат, 1953. 190 с.
22. Кароль И. Л. К теории краевых задач для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа // Матем. сб. 1956. Т. 38(80), № 3. С. 261–282.

References

1. Gol'dshtik M. A. *Vihrevye potoki* [Vortex flows]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1981, 365 p.
2. Lavrent'ev M. A., Shabat B. V. *Problemy gidrodinamiki i ih matematicheskie modeli* [Problems of hydrodynamics and their mathematical models]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 416 p.
3. Vainshtein I. I. [On a boundary problem of vortex and potential flows of an ideal fluid in the axially symmetric case]. *Differentsial'nye uravneniya.* 1970, vol. 6, no. 1, p. 109–122. (In Russ.)
4. Vainshtein I. I. *Dvizhenie ideal'noy zhidkosti s zavihrennymi zonami: dis.… kand. fiz.-mat. nauk* [Motion of ideal fluid with vorticity zones: Diss. on competition of a scientific degree of the candidate of phys. and math. sci.]. Novosibirsk, 1972, 125 p.
5. Vainshtein I. I., Yurovskiy V. K. [On a problem of conjugation of vortical flows of ideal fluid]. *Zhurn. prikl. meh. i tehn. fiz*. 1976, no. 5, p. 98–100. (In Russ.)
6. Gol'dshtik M. A. [Mathematical model of separated flows of an incompressible fluid]. *Dokl. AN SSSR.* 1962, vol. 147, no. 6, p. 1310–1313. (In Russ.)
7. Vainshtein I. I. [Solution of two dual problems of gluing eddy currents and potential variational M. A. Goldshtik's method]. *Zhurn. SFU. Ser. Matem. i fiz*. 2011, 4(3), p. 320–331. (In Russ.)
8. Potapov D. K. [The number of solutions for a class of elliptic equations with a spectral parameter and discontinuous nonlinearity]. *Dal'nevost. matem. zhurn*. 2012, vol. 12, no. 1, p. 86–88. (In Russ.)
9. Vainshtein I. I., Gol'dshtik M. A. [On the motion of an ideal fluid in the Coriolis forces]. *Dokl. AN USSR*. 1967, vol. 173, no 6, p. 1277–1280. (In Russ.)
10. Shabat A. B. [A scheme for plane motion in the presence of liquid at the bottom of the trench]. *Zhurn. prikl. meh. i tehn. fiz.* 1962, no. 4, p. 68–80. (In Russ.)

11. Shabat A. B. [Two problems pasting]. *Dokl. AN SSSR*. 1963, vol. 150, no. 6, p. 1242–1245. (In Russ.)

12. Antontsev S. N., Lelyuh V. D. [Some problems of conjugation of vortex and potential subsonic flows]. *Dinamika sploshnoy sredy.* Novosibirsk, 1969, vol. 1, p. 134–153. (In Russ.)

13. Plotnikov P. I. [On the solvability of a class on the gluing of potential and vortex flows]. *Dinamika sploshnoy sredy.* Novosibirsk, 1969, vol. 3, p. 61–69. (In Russ.)

14. Vainshtein I. I. [The dual problem to M. A. Goldshtik with arbitrary vorticity]. *Zhurn. SFU. Ser. Matem. i fiz.* 2010, no. 3(4), p. 500–506 (In Russ.)

15. Vainshtein I. I., Fedotova I. M. [The dual problem to M. A. Goldshtik with unlimited vorticity]. *Zhurn. SFU. Ser. Matem. i fiz.* 2012, no. 5(4), p. 515–526. (In Russ.)

16. Vainshtein I. I., Litvinov P. S. [Model to M.A. Lavrentiev about gluing of vortex and potential flows of liquid]. *Vestnik SibGAU.* 2009, vol. 24, no. 3, p. 7–9. (In Russ.)

17. Vasin A. V., Timofeeva O. A. [Finding the line of domains with the potential and vortex flow]. *Zhurnal Universiteta vodnyh kommunikatsiy*. 2012, vol. 2 (14), p. 8–13. (In Russ.)

18. Potapov D. K. [About Solutions of Problem to Goldshtik]. *Sib. zhurn. vychisl. matem*. 2012, no. 15(4), p. 409–415. (In Russ.)

19. Tersenov S. A. *Vvedenie v teoriyu uravneniy vyrozhdayuschihsya na granitse* [Introduction to the theory of equations degenerating on the boundary]. Novosibirsk, 1973. 144 p.

20. Gradshtein I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsa integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Table of integrals, series and products]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963, 1100 p.

21. Lebedev N. N. *Spetsial'nye funktsii i ih prilozheniya* [Special functions and their applications]. Moscow, Gostehizdat Publ., 1953, 190 p.

22. Karol' I. L. [On the theory of boundary value problems for equations of mixed elliptic-hyperbolic type]. *Matem. sb.* 1956, vol. 38(80), no. 3, p. 261–282. (In Russ.)