УДК 519.62

РАСЧЕТ ЗАЩЕМЛЕННОЙ БАЛКИ, ПОДАТЛИВОЙ ПРИ ТРАНСВЕРСАЛЬНОМ СДВИГЕ, МЕТОДОМ РИТЦА

В. А. Нестеров

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660014, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31
E-mail: misternester@gmail.com

Рассматриваются задачи об изгибе, устойчивости и собственных колебаниях защемленной с обоих концов балки, податливой при трансверсальном сдвиге. Решения выполняются с помощью метода Ритца. Для кинематических параметров в качестве базисных используются балочные функции. Результаты решений, выполненных для сплошной композитной и трехслойной балки, сравниваются с результатами оригинального конечно-элементного расчета, в котором угол сдвига учитывается в качестве независимого узлового параметра. Показана допустимость приближенного решения методом Ритца для сплошных композитных балок и трехслойных балок с относительно высокой жесткостью материала заполнителя.

Ключевые слова: балка, трансверсальный сдвиг, метод Ритца, метод конечных элементов.

ANALYSIS OF SHEAR FLEXIBLE BEAM WITH BOTH CLAMPED ENDS BY RITZ METHOD

V. A. Nesterov

Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev
31, Krasnoyarsky Rabochy Av., Krasnoyarsk, 660014, Russian Federation
E-mail: misternester@gmail.com

Deformation, buckling and modal analysis of shear flexible clamped beam are considered. Analysis is fulfilled by Ritz method. The bending deflection of a beam is approximated by the first beam function. The results of calculation are compared to the original finite element solution in which transverse shear strain is appointed as the basic cinematic variable. The admissibility of approximate solution by Ritz method for analysis of composite beams and sandwich beams with rather high stiffness of score is shown.

Keywords: clamped beam, finite element method, Ritz method, transverse shear strains.

В настоящее время для производства авиационной и ракетно-космической техники широко применяются композиционные материалы. Композиты обладают высокой удельной прочностью и жесткостью, поэтому позволяют изготавливать конструкции с высокими показателями весового совершенства. Для композитов характерна низкая сдвиговая жесткость по отношению к трансверсальным напряжениям. Учет этой особенности приводит к усложнению математической модели за счет повышения порядка разрешающих уравнений из-за введения в рассмотрение углов трансверсального сдвига.

Тотальное господство численных методов, и прежде всего метода конечных элементов (МКЭ), в расчетной и инженерной практике не уменьшает интереса исследователей к приближенным методам, которые в ряде случаев в силу более простого алгоритма реализации позволяют получить приемлемые решения.

В настоящей работе рассматривается расчетная модель балки, базирующаяся на математической теории пластин Рейсснера–Миндлина. В расчете, выполняемом с помощью метода Ритца, учитывается трансверсальный сдвиг. Данный подход требует вариационной постановки задачи, при которой в качестве исходного функционала фигурирует выражение потенциальной энергии деформации конструкции. Для сдвиговой модели балки это выражение имеет вид

$$E=\frac{1}{2}\int_0^l\left(N\frac{du}{dx}+M\frac{d\theta}{dx}+Q\psi\right)dx-\int_0^l q\,w\,dx\,, \qquad (1)$$

где θ – угол наклона сечения, измеряемый в плоскости изгиба; u – перемещения точек начальной плоскости вдоль продольной оси балки; w – прогибы точек начальной плоскости; ψ – угол сдвига или осредненная по высоте сечения деформация трансверсального сдвига; q – погонная балочная нагрузка.

Угол наклона сечения θ складывается из угла сдвига ψ и угла изгиба dw/dx [1]:

$$\theta=\psi-\frac{dw}{dx}\,. \qquad (2)$$

Для внутренних силовых факторов справедливы следующие физические соотношения:

$$N=B\frac{du}{dx}+C\frac{d\theta}{dx}\,,\; M=C\frac{du}{dx}+D\frac{d\theta}{dx}\,,\; Q=K\psi\,, \qquad (3)$$

где B – жесткость балки при растяжении–сжатии вдоль продольной оси; C – смешанная жесткость; D – изгибная жесткость; K – жесткость балки при трансверсальном сдвиге.

Рассмотрим балку, закрепленную по обоим концам и нагруженную равномерно распределенной балочной нагрузкой. В случае симметрично армированного слоистого пакета смешанные жесткости C будут равны нулю. Принимая это обстоятельство во внимание, подставим физические соотношения (3) в функционал (1). В результате получим

$$E=\frac{1}{2}\int_0^l\left(B\left(\frac{du}{dx}\right)^2+D\left(\frac{d\psi}{dx}-\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2+K\psi^2\right)\times$$

$$\times\ dx-\int_0^l q\,w\,dx\,. \qquad (4)$$

Граничные условия на защемленных краях выражаются следующими соотношениями:

$$\text{при } x=0 \text{ и } x=l\text{:}\quad w=0\,,\quad \frac{dw}{dx}=0\,,\ \psi=0\,. \qquad (5)$$

С учетом данных граничных условий примем следующие распределения для кинематических параметров:

$$w=W\left\{\begin{matrix}\left(\sinh\,(kl)-\sin\,(kl)\right)\left(\cosh\,(kx)-\cos\,(kx)\right)-\\ -\left(\cosh\,(kl)-\cos\,(kl)\right)\left(\sinh\,(kx)-\sin\,(kx)\right)\end{matrix}\right\},$$

$$\psi=F\sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right),\qquad u=U\sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right). \qquad (6)$$

Реализация процедуры метода Ритца сводит вариационную задачу к системе алгебраических уравнений вида

$$\mathbf{AX}=\mathbf{R}, \qquad (7)$$

где $\mathbf{A}$ – матрица третьего порядка, компоненты которой вычисляются программно; $\mathbf{X}$ – вектор неизвестных, состоящий из амплитудных значений в разложениях (6); $\mathbf{R}$ – вектор нагрузки:

$$\mathbf{X}=\{U\,W\,F\}^{\mathrm{T}},\qquad \mathbf{R}=\{0\ r\ 0\}^{\mathrm{T}},$$

где

$$r=q\int_0^l\left\{\begin{matrix}\left(\sinh\,(kl)-\sin\,(kl)\right)\left(\cosh\,(kx)-\cos\,(kx)\right)-\\ -\left(\cosh\,(kl)-\cos\,(kl)\right)\left(\sinh\,(kx)-\sin\,(kx)\right)\end{matrix}\right\}dx.$$

Решая систему уравнений (7), определим компоненты вектора $\mathbf{X}$, а следовательно, и распределения кинематических параметров (6).

Решения, полученные с помощью приближенного метода Ритца, будем сравнивать с результатами численных расчетов, выполняемых методом конечных элементов. Основными узловыми неизвестными являются: прогиб w, изгибной угол наклона сечения, угол трансверсального сдвига и продольное перемещение u.

Таким образом, вектор узловых параметров в двухузловом элементе имеет вид

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{e}}=\left\{w_1\quad\left(\frac{dw}{dx}\right)_1\quad\psi_1\quad u_1\quad w_2\quad\left(\frac{dw}{dx}\right)_2\quad\psi_2\quad u_2\right\}^T.$$

Разрешающие уравнения теории МКЭ, соответствующие нашей задаче, представлены в [2], а вывод основополагающих матриц – в [3].

Предположим, что балка, изготовленная из однонаправленного углепластика, имеет квадратное сечение размером 1 × 1 см. Модуль упругости материала E = 180 ГПа, модуль сдвига G = 5 ГПа. Коэффициенты жесткости вычисляются по формулам

$$B=\frac{Ebh}{1-\mu^2}\,,\quad D=\frac{Ebh^3}{12(1-\mu^2)}\,,\quad K=G\,b\,h\,. \qquad (8)$$

Зададим погонную балочную нагрузку q = 100 Н/м и выполним статический расчет двумя вышеописанными методами. Результаты решения задачи с помощью МКЭ и в балочных функциях (методом Ритца) имеют хорошее совпадение по прогибам. Расхождение по центральному прогибу не превышает 1 %.

Выполним серию расчетов для той же самой композитной балки, увеличивая высоту ее сечения (при сохранении неизменной ширины 1 см). Результаты расчетов представим таблично (табл. 1).

Таблица 1

Прогибы, вычисленные с помощью метода Ритца и МКЭ

Размеры сечения, b x h, см x см	Центральный прогиб, мм		Разница, %	Нагрузка, q, Н/м
	МКЭ	Метод Ритца		
1 x 1	1,605	1,619	0,87	100
1 x 2	2,098	2,099	0,05	1000
1 x 3	1,336	1,318	1,41	2000
1 x 4	1,235	1,198	2,94	4000
1 x 5	1,406	1,340	4,73	8000

Как видно по этим данным, результаты решений двумя методами имеют хорошее совпадение по центральным прогибам. Тем не менее нельзя не заметить, что по мере увеличения высоты сечения балки имеет место тенденция к увеличению разницы прогибов, вычисленных разными методами. Этому обстоятельству можно дать следующее объяснение. При увеличении толщины (высоты сечения) балки возрастает роль сдвигового фактора. В решении, полученном методом Ритца, также учитывается трансверсальный сдвиг, но для точного представления функции прогибов в балке большой толщины одной базисной балочной функции оказывается недостаточно, что приводит к некоторому расхождению с более точным (МКЭ) вариантом расчета.

Рассмотрим теперь задачу об изгибе трехслойной балки. Будем полагать, что жесткость несущих слоев существенно выше жесткости промежуточного слоя. В этом случае можно допустить, что параметры жесткости балки B и D обеспечены несущими слоями:

$$B=\frac{2E_{\text{н}}\,bt}{1-\mu_{\text{н}}^2}\,,\quad D=\frac{E_{\text{н}}\,b(H^3-h^3)}{12(1-\mu_{\text{н}}^2)}\,,\quad K=H^2\Big/\frac{2t}{G_{\text{н}}}+\frac{h}{G_{\text{з}}}\,, \quad (9)$$

где H – полная толщина пакета; h – толщина слоя заполнителя; t – толщина каждого из несущих слоев; b – ширина сечения; $E_{\text{н}}$ – приведенный модуль упругости материала несущих слоев; $G_{\text{н}}$ и $G_{\text{з}}$ – модули сдвига материалов несущих слоев и заполнителя соответственно.

Выполним с помощью методов Ритца и конечных элементов расчет трехслойной балки, защемленной по обоим краям и нагруженной равномерным погонным балочным усилием q. Несущие слои толщиной в 1 мм – композитные ($E_н$ = 180 ГПа, $\mu_н$ = 0,3). Материал заполнителя – изотропный с модулем упругости $E_з$ = 5 ГПа и коэффициентом Пуассона $\mu_з$ = 0,3. Модули сдвига материалов несущих слоев и заполнителя определяются по классической формуле $G = E/(1+\mu)$.

Результаты расчетов для моделей с различной толщиной слоя заполнителя представлены в табл. 2. Они свидетельствуют о том, что приближенное решение методом Ритца с использованием в качестве базисной только одной балочной функции дает достаточно точные результаты по центральному прогибу для модели с относительно жестким слоем заполнителя. Причем на всем интервале изменения толщины слоя заполнителя (от 1 до 5 см) расхождение приближенного решения (методом Ритца) и численного (МКЭ) не превышает 1 %. Для расчета с помощью МКЭ задействована специально разработанная авторская программа [4].

Таблица 2

Прогибы трехслойной балки, вычисленные с помощью метода Ритца и МКЭ

Толщина слоя заполнителя h , см	Центральный прогиб, мм		Разница, %	Нагрузка, Н/м
	МКЭ	Метод Ритца		
1	2,215	2,233	0,81	100
2	3,110	3,127	0,55	500
3	2,928	2,925	0,10	1000
4	3,424	3,406	0,53	2000
5	4,525	4,483	0,93	4000

Еще один численный эксперимент проведен с целью определения точности приближенного решения методом Ритца при различных значениях жесткости заполнителя. Для этого проведена серия расчетов двумя методами (Ритца и МКЭ) той же самой трехслойной балки с композитными несущими слоями толщиной в 1 мм и слоем заполнителя толщиной 2,5 см. Анализ результатов (табл. 3) позволяет сделать вывод о том, что при малой жесткости слоя заполнителя приближенное решение методом Ритца (с одной базисной функцией для прогиба) дает значение центрального прогиба, существенно отличающееся от прогиба, рассчитанного с помощью МКЭ.

Таблица 3

Прогибы трехслойной балки при различной жесткости слоя заполнителя

$E_з$, ГПа	Центральный прогиб, мм		Разница, %
	МКЭ	Метод Ритца	
5	4,119	4,120	0,007
1	5,003	4,826	3,54
0,5	6,109	5,696	6,76
0,1	14,983	12,143	18,96
0,05	26,150	19,107	26,93

Неточность приближенного решения методом Ритца в данном случае обусловлена неадекватностью представления прогибов одной балочной функцией. Для получения более точного решения методом Ритца необходимо увеличить число базисных балочных функций в представлении прогиба. Однако при этом значительно возрастают вычислительные затраты и исчезает то преимущество приближенного решения (методом Ритца) перед численным (МКЭ), которое имело место при одночленной аппроксимации функции прогибов, а именно, простота реализации.

Рассмотрим теперь задачу об устойчивости защемленной балки при осевом сжатии. Функционал устойчивости для сдвиговой модели балки имеет вид

$$\Delta U = \frac{1}{2}\int_0^l \left\{ N_0 \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + D\left(\frac{d\psi}{dx} - \frac{d^2 w}{dx^2}\right)^2 + K\psi^2 \right\} dx,$$

где N_0 – усилие осевого сжатия.

В функционале устойчивости отсутствует продольное перемещение u, поэтому из распределений (6) здесь актуальны выражения для прогиба w и угла трансверсального сдвига ψ. Реализация процедуры метода Ритца сводит вариационную задачу к обобщенной задаче на собственные значения

$$\mathbf{AX} + N_0\mathbf{BX} = \mathbf{0}, \qquad (10)$$

где **A** и **B** – матрицы второго порядка, компоненты которых вычисляются программно; **X** – вектор неизвестных, состоящий из амплитудных значений в разложениях (6):

$$\mathbf{X} = \{W\,F\}^{\mathrm{T}}.$$

Решая систему уравнений (10), определим критическое значение усилия N_0. Форма потери устойчивости задается балочной функцией, фигурирующей в представлении прогиба (6).

Полученные с помощью приближенного метода Ритца критические величины будем сравнивать с результатами численных расчетов, выполняемых методом конечных элементов. Основными узловыми неизвестными являются: прогиб w, изгибной угол наклона сечения и угол трансверсального сдвига. Вектор узловых параметров элемента имеет вид

$$\boldsymbol{\delta}_\mathbf{e} = \left\{ w_1 \quad \left(\frac{dw}{dx}\right)_1 \quad \psi_1 \quad w_2 \quad \left(\frac{dw}{dx}\right)_2 \quad \psi_2 \right\}^T.$$

Вывод системы уравнений устойчивости произвольного балочного элемента выполняется программно [3], а соответствующие данной задаче матрицы жесткости представлены в [5].

Предположим, что балка, изготовленная из однонаправленного углепластика, имеет квадратное сечение размером 1 × 1 см. Модуль упругости материала E = 180 ГПа, модуль сдвига G = 5 ГПа. Коэффициенты изгибной и сдвиговой жесткости вычисляются по формулам (8). Критическое усилие сжатия, определенное при решении системы (10), соответствующей методу Ритца, оказалось равным 6623,83 Н. Конечно-элементный расчет для 50-узловой модели дал величину в 6444,44 Н. Относительная разница этих значений составляет 2,78 %, что свидетельствует о высокой точности приближенного решения задачи устойчивости методом Ритца.

В табл. 4 представлены критические нагрузки, определенные в серии расчетов композитной защемленной балки при варьировании высотой сечения. Здесь кроме результатов численного (МКЭ) и приближенного (метод Ритца) решений приводится аналитическое решение, вычисленное по формуле

$$N_{\text{кр}} = 4\pi \frac{EJ}{l^2}$$

и не учитывающее трансверсальный сдвиг.

Таблица 4

Значения критических усилий для сплошной композитной балки

h, мм	МКЭ, Н	Метод Ритца, Н	Относительная разница, %	Аналитическое решение, Н
5	811,43	835,73	2,99	813,43
10	6444,44	6623,83	2,78	6507,43
20	50100,62	51099,08	1,99	52059,45
30	161479,00	162811,12	0,82	175700,65
40	360150,83	358043,35	0,59	416475,61
50	653690,92	640293,63	2,05	813428,93
60	$1{,}040 \cdot 10^6$	$1{,}004 \cdot 10^6$	3,46	$1{,}406 \cdot 10^6$
70	$1{,}509 \cdot 10^6$	$1{,}438 \cdot 10^6$	4,71	$2{,}599 \cdot 10^6$
80	$2{,}050 \cdot 10^6$	$1{,}932 \cdot 10^6$	5,76	$3{,}332 \cdot 10^6$
90	$2{,}648 \cdot 10^6$	$2{,}475 \cdot 10^6$	6,53	$4{,}744 \cdot 10^6$

Как видно по представленным результатам (табл. 4), на большей части диапазона изменения высоты сечения балки расхождения критических величин, найденных двумя методами (МКЭ и метод Ритца), не превышают 3 %, что подчеркивает точность метода Ритца при решении задачи устойчивости балок с относительно высоким значением трансверсальной сдвиговой жесткости. Вместе с тем оценивая результаты аналитического решения (четвертый столбец, табл. 4), можно заключить, что уже при данных значениях трансверсальной сдвиговой жесткости нельзя не учитывать в постановке трансверсальную податливость.

Рассмотрим теперь задачу об устойчивости трехслойной балки. Коэффициенты изгибной и сдвиговой жесткости вычисляются по формулам (9).

Определим с помощью методов Ритца и конечных элементов критическую осевую нагрузку для трехслойной балки, защемленной по обоим краям. Несущие слои толщиной в 1 мм – композитные ($E_{\text{н}}$ = 180 ГПа, $\mu_{\text{н}}$ = 0,3). Материал заполнителя – изотропный с модулем упругости $E_{\text{з}}$ = 5 ГПа и коэффициентом Пуассона $\mu_{\text{з}}$ = 0,3. Модули сдвига материалов несущих слоев и заполнителя определяются по классической формуле $G = E/(1+\mu)$. Ширина сечения балки 10 мм.

Результаты расчетов, выполненных с помощью оригинальной программы, для моделей с различной толщиной слоя заполнителя представлены в табл. 5. Они свидетельствуют о том, что приближенное решение методом Ритца с использованием в качестве базисной только одной балочной функции дает достаточно точные результаты по критическому усилию для модели с относительно жестким слоем заполнителя. Причем на всем интервале изменения толщины слоя заполнителя (от 1 до 10 см) расхождение приближенного решения (методом Ритца) и численного (МКЭ) не превышает 3 %.

Таблица 5

Критические усилия для трехслойной балки с различной толщиной слоя заполнителя

$h_{\text{з}}$, мм	Метод Ритца, Н	МКЭ, Н	Отн. разница, %
10	4803,09	4677,02	2,70
20	17147,78	16762,82	2,30
30	36667,77	35986,80	1,89
40	62974,52	62035,97	1,51
50	95708,23	94620,84	1,15
60	134535,24	133474,27	0,79
70	179145,68	178321,76	0,46
80	229251,44	228910,52	0,15
90	284584,22	285045,82	0,16
100	344893,93	346478,19	0,46

Таблица 6

Критические усилия для трехслойной балки с различной жесткостью заполнителя

$E_{\text{з}}$, ГПа	Метод Ритца, Н	МКЭ, Н	Относительная разница, %
5	26035,86	25504,87	2,08
1	22223,03	22439,30	0,96
0,5	18830,16	19508,33	3,48
0,1	8833,13	9540,25	7,41
0,05	5613,39	5822,22	3,59
0,04	4829,16	4872,84	0,90
0,03	3985,85	3831,66	4,02
0,02	3076,50	2684,66	14,60
0,01	2093,06	1414,85	47,94

Еще один численный эксперимент проведен с целью определения точности приближенного решения задачи устойчивости с помощью метода Ритца при различных значениях жесткости заполнителя. Для этого проведена серия расчетов двумя методами (метод Ритца и МКЭ) той же самой трехслойной балки с композитными несущими слоями толщиной в 1 мм и слоем заполнителя толщиной 2,5 см. Анализ результатов (табл. 6) позволяет сделать вывод о том, что при малой жесткости слоя заполнителя приближенное решение методом Ритца (с одной базисной функцией для прогиба) дает значение критической нагрузки, существенно отличающееся от величины, рассчитанной с помощью МКЭ. Неточность приближенного решения методом Ритца в данном случае также обусловлена неадекватностью представления прогибов одной балочной функцией.

Для решения задачи о собственных колебаниях получен следующий функционал:

$$\frac{1}{2}\int_0^l \left(B\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + D\left(\frac{d\psi}{dx} - \frac{d^2 w}{dx^2}\right)^2 + K\psi^2 \right) \times$$

$$dx - \frac{1}{2}\omega^2 \int_0^l \left\{ B_\rho \left(u^2 + w^2\right) + D_\rho \left(\psi - \frac{dw}{dx}\right)^2 \right\} dx = 0\,,$$

где B_ρ, D_ρ – параметры, характеризующие инерционные свойства; ω – круговая частота колебаний.

Реализация процедуры метода Ритца при выбранной аппроксимации кинематических параметров (6) сводит вариационную задачу к обобщенной задаче на собственные значения

$$\mathbf{AX} + \omega^2\,\mathbf{BX} = \mathbf{0}, \qquad (11)$$

где **A** и **B** – матрицы третьего порядка, компоненты которых вычисляются программно; **X** – вектор неизвестных, такой же как в системе (7).

Решая систему уравнений (11), определим первую частоту собственных колебаний балки. Соответствующая форма колебаний задается балочной функцией, фигурирующей в представлении прогиба (6).

Полученные с помощью приближенного метода Ритца собственные значения будем сравнивать с результатами численных расчетов, выполняемых методом конечных элементов.

Вывод системы уравнений состояния произвольного балочного элемента представлен в [6]. При этом компоненты матриц жесткости и инерции вычисляются программно [3].

Предположим, что балка, изготовленная из однонаправленного углепластика, имеет квадратное сечение размером 1 × 1 см. Модуль упругости материала E = 180 ГПа, модуль сдвига G = 5 ГПа. Коэффициенты жесткости вычисляются по формулам (8).

Плотность материала ρ = 1500 кг/м^3. Параметры инерции определяются как

$$B_\rho = \rho\, b\, h\,, \qquad D_\rho = \frac{\rho\, b\, h^3}{12}. \qquad (12)$$

Первая частота собственных колебаний, определенная при решении системы (11), соответствующей методу Ритца, оказалась равной 117,3 Гц. Конечноэлементный расчет для 50-узловой модели дал величину в 117,1 Гц. Относительная разница этих значений составляет 0,17 %, что свидетельствует о высокой точности приближенного решения задачи о собственных колебаниях балки методом Ритца. Напомним, что циклическая f и круговая ω частоты колебаний связаны формулой $\omega = 2\,\pi\, f$.

В табл. 7 представлены частоты, определенные в серии расчетов композитной защемленной балки при варьировании высотой сечения. Здесь кроме результатов численного (МКЭ) и приближенного (метод Ритца) решений приводится аналитическое решение, вычисляемое по формуле

$$f_i = \frac{k_i^2}{2\pi}\sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}\,, \qquad (13)$$

где i – номер моды; F – площадь сечения балки.

Фигурирующий в (13) параметр k – это корень частотного уравнения, которое для защемленной по краям балки имеет вид

$$\cosh\,(kl)\cos\,(kl) - 1 = 0\,.$$

Для первых четырех мод этот параметр имеет значения 4,730; 7,853; 10,966; 14,137. В расчетной программе в действительности эти корни определены с точностью до 20 знака после запятой. Отметим, что аналитическое решение (13) не учитывает влияния трансверсального сдвига.

Таблица 7

Значения критических усилий для сплошной композитной балки

h, мм	Метод Ритца, Гц	МКЭ, Гц	Относительная разница, %	Аналитическое решение, Гц
10	117,30	117,10	0,17	118,04
20	230,35	228,83	0,66	236,08
30	335,66	330,93	1,43	354,114
40	430,99	420,97	2,38	472,15
50	515,42	498,17	3,46	590,19
60	589,07	563,14	8,47	708,23
70	652,76	617,09	5,78	826,27
80	707,66	661,70	6,94	944,30
90	755,05	698,49	8,10	1062,34
100	796,14	728,90	9,22	1180,38

Как видно по представленным результатам (табл. 7), на половине диапазона изменения высоты сечения балки (от 10 до 50 мм) расхождения в значениях первой частоты, найденных двумя методами (МКЭ и метод Ритца), не превышают 3,5 %, что подчеркивает точность метода Ритца при решении задачи о собственных колебаниях балок с относительно высоким значением трансверсальной сдвиговой жесткости. Однако нельзя не отметить тенденцию увеличения расхождения при дальнейшем увеличении высоты сечения.

Рассмотрим теперь модальный расчет трехслойной балки. Определим с помощью методов Ритца и конечных элементов критическую осевую нагрузку для трехслойной балки, защемленной по обоим краям. Несущие слои толщиной в 1 мм – композитные ($E_н$ = 180 ГПа, $\mu_н$ = 0,3, $\rho_н$ = 1500 кг/м^3). Материал заполнителя – изотропный с модулем упругости $E_з$ = 5 ГПа, коэффициентом Пуассона $\mu_з$ = 0,3 и плотностью $\rho_з$ = 1000 кг/м^3. Модули сдвига материалов несущих слоев и заполнителя определяются по классической формуле $G = E/(1{+}\mu)$. Ширина сечения балки 10 мм.

Параметры инерции трехслойки определяются следующим образом:

$$B_\rho = 2\rho_н\, b t + \rho_з\, b h\,, \qquad D_\rho = \frac{\rho_н\, b(H^3 - h^3)}{12} + \frac{\rho_з\, b h^3}{12}\,.$$

Результаты расчетов, выполненных с помощью оригинальной программы [4], для моделей с различной толщиной слоя заполнителя представлены в табл. 8. Они свидетельствуют о том, что приближенное решение методом Ритца с использованием в качестве базисной только одной балочной функции дает достаточно точные результаты по первой частоте для модели с относительно жестким слоем заполнителя. Причем на всем интервале изменения толщины слоя заполнителя (от 1 до 10 см) расхождение приближенного решения (методом Ритца) и численного (МКЭ) не превышает 2,5 %.

Еще один численный эксперимент проведен с целью определения точности приближенного решения задачи о собственных колебаниях трехслойной балки с помощью метода Ритца при различных значениях жесткости заполнителя. Для этого проведена серия расчетов двумя методами (метод Ритца и МКЭ) той же самой трехслойной балки с композитными несущими слоями толщиной в 1 мм и слоем заполнителя толщиной 2,5 см. Анализ результатов (табл. 9) позволяет сделать вывод о том, что при малой жесткости слоя заполнителя приближенное решение методом Ритца (с одной базисной функцией для прогиба) дает значение первой частоты, существенно отличающееся от величины, рассчитанной с помощью МКЭ.

Таблица 8

Значения первой частоты собственных колебаний для трехслойной балки с различной толщиной слоя заполнителя

h, мм	Метод Ритца, Гц	МКЭ, Гц	Относительная разница, %
10	107,29	107,05	0,22
30	185,99	184,65	0,73
50	236,94	234,13	1,20
70	275,96	271,50	1,64
90	307,82	301,59	2,07
100	321,81	314,68	2,27

Таблица 9

Значения первой частоты собственных колебаний для трехслойной балки с различной жесткостью слоя заполнителя

$E_з$, ГПа	Метод Ритца, Гц	МКЭ, Гц	Относительная разница, %
5	383,83	381,55	0,60
1	354,68	345,54	2,65
0,5	326,53	312,07	4,63
0,1	223,70	197,93	13,02
0,05	178,34	149,65	19,17
0,01	108,90	71,15	53,06

Таким образом, мы видим, что метод Ритца обеспечивает приемлемые результаты решения задачи о собственных колебаниях податливых при трансверсальном сдвиге балок и для сплошных композитных и трехслойных балок с относительно высокими значениями трансверсальной сдвиговой жесткости.

На примере задач об изгибе, устойчивости и собственных колебаниях защемленной с двух сторон балки, податливой при трансверсальном сдвиге, исследована точность метода Ритца с удержанием одного члена базисных балочных функций при аппроксимации прогибов. Выявлены границы применимости этого способа решения для расчета сплошных композитных балок и трехслойных балок с податливым заполнителем.

Библиографические ссылки

1. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М. : Машиностроение, 1988. 272 с.

2. Нестеров В. А. Конечно-элементный расчет трехслойной балки // Вестник СибГАУ. 2011. № 2 (35). С. 48–35.

3. Нестеров В. А. Комплекс программ для получения основных матриц и векторов теории МКЭ для конечных элементов балки, пластины и оболочки, податливых при трансверсальном сдвиге : свидетельство о гос. регистрации программ для ЭВМ № 2010611594 / 26.02.2010. 6 с.

4. А. с. о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2010611781. Исследование НДС, устойчивости и собственных колебаний трехслойной балки с податливым заполнителем с помощью МКЭ при учете трансверсального сдвига в качестве узлового неизвестного / В. А. Нестеров ; дата рег. 09.03.2010. 8 с.

5. Нестеров В. А. Конечно-элементный анализ устойчивости балок, податливых при трансверсальном сдвиге // Вестник СибГАУ. 2012. № 3 (43). С. 56–62.

6. Нестеров В. А. Модальный конечно-элементный анализ балок, податливых при трансверсальном сдвиге // Вестник СибГАУ. 2013. № 1 (47). С. 68–74.

References

1. Vasil'ev V. V. *Mekhanika konstruktsiy iz kompozitsionnykh materialov* (Mechanics of composite structures). Moscow, Mashinostroenie, 1988. 272 p.

2. Nesterov V. A. *Vestnik SibGAU.* 2011, no. 2 (35), p. 48–35.

3. Nesterov V. A. *Kompleks programm dlya polucheniya osnovnykh matrits i vektorov teorii MKE dlya konechnykh elementov balki, plastiny i obolochki, podatlivykh pri transversal'nom sdvige: svidetel'stvo o gosudarstvennoy registratsii programm dlya EVM* (Complex programs for basic theory of matrices and vectors FEM for finite element beams, plates and shells, compliant with transverse shear: a certificate of state registration of computer programs), number 2010611594 / 26.02.2010. 6 p.

4. Nesterov V. A. *A. s. o gosudarstvennoy registratsii programm dlya EVM № 2010611781. Issledovaniye NDS, ustoychivosti i sobstvennykh kolebaniy trekhsloynoy balki s podatlivym zapolnitelem s pomoshch'yu MKE pri uchete transversal'nogo sdviga v kachestve uzlovogo neizvestnogo* (A. p. on state registration of computer programs number 2010611781. Study VAT, sustainability and natural oscillations sandwich beams with pliable filler using FEM for transverse shear registered as a node in the unknown), no. 2010611781. 09.03.2010. 8 p.

5. Nesterov V. A. *Vestnik SibGAU.* 2012. no. 3 (43), p. 56–62.

6. Nesterov V. A. *Vestnik SibGAU.* 2013. no. 1 (47), p. 68–74.