

**МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ С БИКУБИЧЕСКИМ ЭРМИТОВЫМ БАЗИСОМ
В ОБЛАСТИ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ**

В. А. Киреев

Сибирский федеральный университет
Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, просп. Свободный, 79
E-mail: kireevvit@gmail.com

Рассматривается метод коллокации, базисными функциями которого выбраны бикубические многочлены Эрмита, применяемый к первой краевой задаче для эллиптического уравнения в области с криволинейной границей. Метод коллокации имеет некоторые преимущества по сравнению с методом конечных элементов Галеркина: не требуется вычислять интегралы для определения коэффициентов матрицы жесткости. Бикубические функции Эрмита принадлежат классу C^1 . Для решения задачи строится согласованная с границей сетка. Сетка согласуется с границей так, чтобы два узла в нерегулярных ячейках лежали на криволинейной границе. Это позволяет уменьшить общее количество базисных функций в области. В качестве внутренних узлов коллокации берутся точки множества Гаусса. На криволинейной границе точки коллокации распределяются равномерно. Полученные решения обладают достаточно высоким порядком точности.

Ключевые слова: метод коллокации, бикубический эрмитов базис, эллиптическое уравнение второго порядка, криволинейная граница.

Vestnik SibGAU
2014, No. 3(55), P. 73–77**HERMITE BICUBIC COLLOCATION METHOD
IN DOMAIN WITH CURVILINEAR BOUNDARY**

V. A. Kireev

Siberian Federal University
79, Svobodnyi prosp., Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation
E-mail: kireevvit@gmail.com

In this paper the collocation method with Hermite bicubic basis functions is considered, applied to the first boundary value problem for an elliptic equation in a domain with a curved boundary. The collocation method has some advantages compared with Galerkin finite element method: no need to compute the integrals for the determination of the coefficients of the stiffness matrix. Hermite bicubic functions belongs to the class C^1 . The consistent with the boundary mesh is constructed for solving the problem. The grid is consistent with the border so that two nodes in irregular cells were lying on a curvilinear boundary. This approach allows to reduce the total number of basis functions in the domain. As an internal collocation nodes the points of the set of Gauss are taken. The collocation points are distributed evenly on a curvilinear boundary. Under such arrangement, the total number of collocation points equal the total number of basis functions with the given boundary conditions. The problem is reduced to solution of a linear system $Au=f$ where A is a square matrix. The results of numerical experiments of solving Poisson equation with different right sides show that the algorithm of solution has the convergence of high order.

Keywords: collocation method, Hermite bicubic basis, second order elliptic equation, curved boundary.

Широкое применение метода конечных элементов при решении дифференциальных уравнений с частными производными не уменьшает необходимости создания и использования новых методов, которые при более простом алгоритме реализации позволяют получить приемлемые решения с повышенной точностью.

Метод коллокации успешно применялся для численного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений [1] и уравнений с частными производными [2], в том числе для эллиптических уравнений второго порядка [3]. В них приближенное решение ищется в пространстве кусочно-квадратичных функций на сетках с прямоугольными

или треугольными ячейками. В работах [4; 5] рассматривается метод коллокации и наименьших квадратов. В работе [6] метод рассматривается в областях общего вида.

Метод коллокации с бикубическим эрмитовым базисом имеет некоторые преимущества. Так, по сравнению с методом конечных элементов Галеркина не требуется вычислять интегралы для определения коэффициентов матрицы. Для общего линейного эллиптического оператора с достаточно гладкими коэффициентами и граничными условиями Дирихле, эрмитова коллокация обеспечивает точность $O(h^4)$ в норме L_2 , где h – шаг сетки. Эрмитовы элементы более эффективны по сравнению с лагранжевыми элементами, так как размерность систем алгебраических уравнений оказывается меньше при одинаковом порядке аппроксимации [7].

При фиксированном значении одной из переменных бикубическая эрмитова функция и ее первая производная по этой переменной превращаются в одномерные эрмитовы кубические функции относительно другой переменной [8], это дает 16 степеней свободы в каждом прямоугольнике. Стандартный базис в одномерном случае состоит из функций двух типов, интерполирующих значения функции и ее производных соответственно на отрезке $[x_j, x_l]$:

$$\begin{aligned} \varphi_j &= \begin{cases} 1 & \text{в узле } x = x_j \\ 0 & \text{в других узлах} \end{cases}; \psi_l = 0 \text{ во всех узлах;} \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} &= 0 \text{ во всех узлах;} \frac{\partial \psi_l}{\partial x} = \begin{cases} 1 & \text{в узле } x = x_l; \\ 0 & \text{в других узлах.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

На эти функции натянуты все кусочно-кубические функции класса C^1 . Эрмитово бикубическое пространство есть произведение двух эрмитовых кубических пространств, и четыре параметра в обычных узлах $z = (x_j, y_l)$ приводят к четырем соответствующим базисным функциям:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \varphi_j(x)\varphi_l(y), \quad \Phi_2 = \varphi_j(x)\psi_l(y), \\ \Phi_3 &= \psi_j(x)\varphi_l(y), \quad \Phi_4 = \psi_j(x)\psi_l(y). \end{aligned} \quad (2)$$

Бикубические элементы (конечные элементы с базисом из бикубических эрмитовых элементов) применяются только на прямоугольниках (или, после простого линейного преобразования плоскости, на параллелограммах). На прямоугольной области эрмитов бикубический элемент – один из самых лучших. Его гладкость непосредственно следует из гладкости базиса. Поэтому бикубические элементы можно использовать для уравнений четвертого порядка, пробные функции будут принадлежать H^2 . Эрмитово пространство S_h состоит из всех непрерывных кусочно-бикубических функций v , u которых v_x, v_y, v_{xy} непрерывны [9].

Рассмотрим первую краевую задачу для эллиптического уравнения в области Ω :

$$\begin{aligned} Lu &= f, x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, x \in \partial\bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Omega = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1; x \geq 0; y \geq 0\}$; $\partial\bar{\Omega}$ – граница; L – линейный эллиптический оператор второго порядка $Lu = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$.

На примере решения этой задачи рассмотрим алгоритм метода коллокации. Суть метода заключается в том, что приближенное решение ищется в конечномерном линейном пространстве функций, а неизвестные коэффициенты его разложения по базису пространства определяются из уравнений коллокации и краевых условий. Уравнения коллокации представляют собой требования того, чтобы приближенное решение удовлетворяло уравнениям исходной дифференциальной задачи в конечном множестве точек области (точках коллокации), в которой ставится данная задача. Для получения краевых условий соответствующие условия задачи записываются в нескольких точках на границе области.

Для аппроксимации решения покроем область согласованной с границей сеткой с прямоугольными ячейками:

$$w_h = \left\{ x_i = \sin \frac{\pi i}{2N}, y_j = \sin \frac{\pi j}{2N}, j = \begin{cases} \overline{0, N}, i = 0 \\ \overline{0, N-i+1}, i = 1, N \end{cases} \right\}. \quad (4)$$

При этом ячейки сетки делятся на внутренние (регулярные), которые не содержат границы области, и граничные (нерегулярные). Сетка согласуется с границей так, чтобы два узла в нерегулярных ячейках лежали на криволинейной границе. Это позволяет уменьшить общее количество базисных функций в области. Общее число ячеек на такой сетке равно

$$N_{el} = \frac{N(N+1)}{2}.$$

В качестве базисных функций в каждой ячейке задаются бикубические многочлены Эрмита с 16 степенями свободы. В области $[-1, 1] \times [-1, 1]$ они определяются следующим образом [10]:

$$\begin{aligned} \varphi_i(z_i) &= 1, \varphi_i(z_j) = 0, i \neq j; \\ \frac{\partial \varphi_{xi}(z_i)}{\partial x} &= 1, \frac{\partial \varphi_{xi}(z_j)}{\partial x} = 0, i \neq j; \\ \frac{\partial \varphi_{yi}(z_i)}{\partial y} &= 1, \frac{\partial \varphi_{yi}(z_j)}{\partial y} = 0, i \neq j; \\ \frac{\partial^2 \varphi_{xyi}(z_i)}{\partial x \partial y} &= 1, \frac{\partial^2 \varphi_{xyi}(z_j)}{\partial x \partial y} = 0, i \neq j, \\ \frac{\partial \varphi_{xyi}(z_j)}{\partial x} &= 0, \frac{\partial \varphi_{xyi}(z_j)}{\partial y} = 0, i, j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Для каждой ячейки точки коллокации берутся в нулях полинома Лежандра $P_2\left(\frac{2x - x_i - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)$, чтобы достичь наибольшей возможной точности [11]:

$$\xi_{i,m}^x = x_{c,i} \pm \frac{\sqrt{3}}{6} h_{x,i}, \xi_{j,m}^y = y_{c,j} \pm \frac{\sqrt{3}}{6} h_{y,j}, m = 1, 2,$$

где $x_{c,i} = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$, $y_{c,j} = \frac{y_j + y_{j-1}}{2}$, $h_{x,i} = x_i - x_{i-1}$,
 $h_{y,j} = y_j - y_{j-1}$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, l$.

При этом для прямоугольной области верна оценка $\|u - u^h\|_{L_2} \leq Ch^4 \|u\|_{H^4(\Omega)}$ [12], где $H^m(\Omega)$ обозначает пространство Соболева с нормой

$$\|v\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq i+j \leq m} \left\| \frac{\partial^{i+j} v}{\partial x^i \partial y^j} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Оценки в других нормах даны в работе [13].

В каждой граничной ячейке добавляются по 3 точки коллокации равномерно на границе:

$$\begin{aligned} \xi_{i,k+4}^x &= \cos\left(\frac{\pi}{2N}\left(i + \frac{k}{4}\right)\right), \\ \xi_{j,k+4}^y &= \sin\left(\frac{\pi}{2N}\left(j + \frac{k}{4}\right)\right), \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (5)$$

При такой расстановке общее число точек коллокации совпадает с общим числом базисных функций с учетом граничных условий и равно $N_\phi = 2N^2 + 5N$.

На рис. 1 изображена построенная сетка с точками коллокации. Узлы сетки обозначены жирными точками, точки коллокации – крестами.

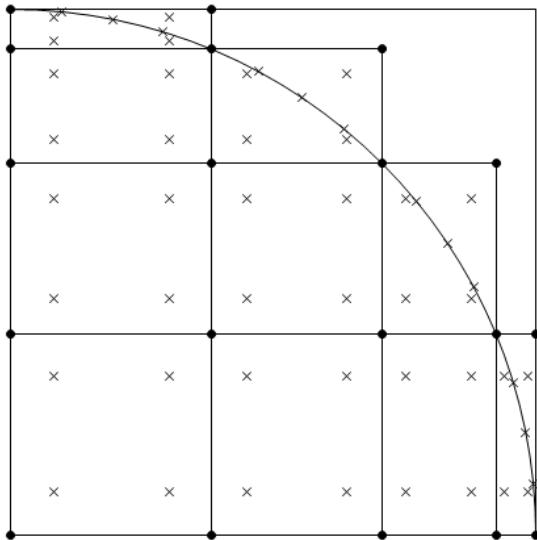


Рис. 1. Согласованная сетка и точки коллокации

Построенный метод коллокации аппроксимирует неизвестную функцию u функцией U в пространстве конечномерных функций V . В построенном базисе эрмитовых бикубических функций функция U равна:

$$u^h(x, y) = \sum_{n=1}^{n_G} u_n^h \Phi_n(x, y), \quad (6)$$

где Φ_n – эрмитовы бикубические базисные функции; n_G – число точек коллокации; U_n – коэффициенты.

Задача эрмитовой коллокации состоит в том, чтобы найти $U \in V$, удовлетворяющее (1) в точках коллокации, т. е.:

$$\begin{aligned} Lu^h(\xi_{i,m}^x, \xi_{j,m}^y) &= f(\xi_{i,m}^x, \xi_{j,m}^y), (\xi_{i,m}^x, \xi_{j,m}^y) \in \Omega; \\ u^h(\xi_{i,m}^x, \xi_{j,m}^y) &= 0, (\xi_{i,m}^x, \xi_{j,m}^y) \in \partial\bar{\Omega}. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение задачи сводится к решению линейной системы $Au = f$, где элементы матрицы

$$A[i, j] = \begin{cases} L\Phi_j(x_i, y_i), (x_i, y_i) \in \Omega \\ \Phi_j(x_i, y_i), (x_i, y_i) \in \partial\bar{\Omega} \end{cases}$$

$$\text{вектор правой части } f[i] = \begin{cases} f(x_i, y_i), (x_i, y_i) \in \Omega \\ 0, (x_i, y_i) \in \partial\bar{\Omega} \end{cases}.$$

Для исследования порядка сходимости приближенного решения $U(x, y)$ к точному проведены расчеты на последовательности сеток при $h \rightarrow 0$. В табл. 1 приведены результаты численных экспериментов с решением

$$u(x, y) = \sin(1 - x^2 - y^2)xy, \quad (8)$$

которое удовлетворяет уравнению Пуассона (3) с правой частью

$$f(x, y) = 4xy(3\cos(1 - x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)\sin(1 - x^2 - y^2)).$$

Таблица 1

Значения погрешности в норме L_2

N	N_{el}	N_ϕ	h_{\max}	$\delta_h = \ u - u^h\ $	δ_{2h} / δ_h	$\log_2(\delta_{2h} / \delta_h)$
3	6	33	0,5	$4,93 \times 10^{-4}$		
6	21	102	0,2588	$2,25 \times 10^{-5}$	21,9	4,45
12	78	348	0,1305	$1,18 \times 10^{-6}$	19,1	4,25
24	300	1272	0,0654	$6,32 \times 10^{-8}$	18,7	4,22
48	1176	4848	0,0327	$3,53 \times 10^{-9}$	17,9	4,16

Численные эксперименты с другими функциями, удовлетворяющими граничным условиям, свидетельствуют о том, что порядок сходимости приближенного решения к точному при $h \rightarrow 0$ здесь не хуже 4. Порядок сходимости α вычисляется методом наименьших квадратов из $\|u - u^h\|_{L_2} \leq Ch_{\max}^\alpha \|u\|_{H^4(\Omega)}$, где h_{\max} – максимальный линейный шаг по всем ячейкам сетки (табл. 2, рис. 2).

Таблица 2

Порядок сходимости для различных функций

Функция	Порядок сходимости α
$u_1 = \sin(1 - x^2 - y^2)xy$	4,2779
$u_2 = (1 - x^2 - y^2)\sin(\pi x)\sin(\pi y)$	4,2169
$u_3 = ((1 - x^2 - y^2)xy)^2$	4,4270
$u_4 = (1 - x^2 - y^2)\sin(xy)$	4,3803
$u_5 = e^{(1-x^2-y^2)xy} - 1$	4,3953

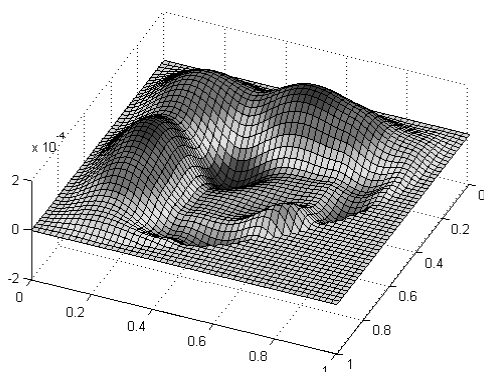


Рис. 2. Распределение ошибки при разбиении на 10 ячеек

Результаты численных экспериментов показывают, что данный алгоритм обладает сходимостью повышенного порядка. Согласование узлов ячеек расчетной области с областью определения задачи позволяет увеличить теоретический порядок сходимости метода и уменьшить размерность пространства базисных функций. При этом по сравнению с методами Галеркина и Рунге метод коллокации более прост в реализации, так как нет скалярных произведений, а значит, не нужно интегрировать. Вместе с этим эффективно используются бикубические эрмитовы базисные функции, так как по сравнению с лагранжевыми они показывают больший порядок аппроксимации.

Библиографические ссылки

1. Russell R. D., Shampine L. F. A collocation method for boundary value problems // *Numer. Math.* 1972. Vol. 19. P. 1–28.
2. Leyk Z. A Co-collocation-like method for elliptic equations on rectangular regions // *Australian Math. Soc. B. Appl. Math.* 1997. Vol. 38. P. 368–387.
3. Слепцов А. Г. Коллокационно-сеточное решение эллиптических краевых задач // *Моделирование в механике.* 1987. Т. 5(22), № 2. С. 101–126.
4. Исаев В. И., Шапеев В. П., Идимешев С. В. Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнения Пуассона // *Вычислительные технологии.* 2011. Т. 16, № 1. С. 85–93.
5. Беляев В. В., Шапеев В. П. Метод коллокаций и наименьших квадратов на адаптивных сетках в области с криволинейной границей // *Вычислительные технологии.* 2000. Т. 5, № 4. С. 13–21.
6. Houstis E. N., Mitchell W. F., Rice J. R. Collocation Software for Second-Order Elliptic Partial Differential Equations // *ACM Transactions on Mathematical Software.* 1985. Vol. 11, no. 4. P. 379–412.
7. Gileva L., Shaydurov V., Dobronets B. The triangular Hermite finite element complementing the Bogner-Fox-Schmit rectangle // *Applied Mathematics.* 2013. Vol. 5, no. 12A. P. 50–56.

8. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М. : Наука, 1980. 352 с.

9. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М. : Мир, 1977. 351 с.

10. Dobronets B. S. Combined bicubic Hermite finite element method // *The First China-Russia Conference on Numerical Algebra with Applications in Radiative Hydrodynamics.* China, (October 16–18, Beijing). 2012. 19 p.

11. Mateescu G., Ribbens C. J., Watson L. T. A Domain Decomposition Preconditioner for Hermite Collocation Problems // *Computer Science, Virginia Tech : Technical Report TR-02-02,* 2002.

12. Prenter P. M., Russell. R. D. Orthogonal collocation for elliptic partial differential equations // *SIAM J. Numer. Anal.* 1976. Vol. 13, no. 6. P. 923–939.

13. Bialecki B., Xiao-Chuan C. H1-norm error bounds for piecewise Hermite bicubic orthogonal spline collocation schemes for elliptic boundary value problems // *SIAM J. Numer. Anal.* 1994. Vol. 31, no. 4. P. 1128–1146.

References

1. Russell R. D., Shampine L. F. A collocation method for boundary value problems. *Numer. Math*, 1972, vol. 19, p. 1–28.
2. Leyk Z. A Co-collocation-like method for elliptic equations on rectangular regions. *Australian Math. Soc. B. Appl. Math*, 1997, vol. 38, p. 368–387.
3. Sleptsov A. G. [Collocation-grid solution of an elliptic boundary value problems]. *Modelirovanie v mekhanike.* 1987, vol. 5(22), no. 2, p. 101–126. (In Russ.).
4. Isaev V. I., Shapeev V. P., Idimeshev S. V. [Variants of the collocation and least squares method of increased accuracy for the numerical solution of the Poisson equation]. *Vychislitel'nye tekhnologii.* 2011, vol. 16, no. 1, p. 85–93. (In Russ.).
5. Belyaev V. V., Shapeev V. P. [Collocation and least squares method on adaptive grids in the areas with curvilinear boundary]. *Vychislitel'nye tekhnologii.* 2000, vol. 5, no. 4, p. 13–21. (In Russ.).
6. Houstis E. N., Mitchell W. F., Rice J. R. Collocation Software for Second-Order Elliptic Partial Differential Equations. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 1985, vol. 11, no. 4, p. 379–412.
7. Gileva L., Shaydurov V., Dobronets B. The triangular Hermite finite element complementing the Bogner-Fox-Schmit rectangle. *Applied Mathematics.* 2013, vol. 5, no. 12A, p. 50–56.
8. Zav'yalov. Yu. S., Kvasov B. I., Miroshnichenko V. L. *Metody splayn-funktsiy* [Spline-function methods]. Moscow, Nauka Publ., 1980, 352 p.
9. Strang G., Fix. G. J. *An analysis of the finite element method.* Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, Inc., 1973.
10. Dobronets B. S. Combined bicubic Hermite finite element method. *The First China-Russia Conference on Numerical Algebra with Applications in Radiative Hydrodynamics.* Beijing, China, October 16–18, 2012, p. 19.

11. Mateescu G., Ribbens C. J., Watson L. T. A Domain Decomposition Preconditioner for Hermite Collocation Problems. *Computer Science, Virginia Tech*, Technical Report TR-02-02, 2002.

12. Prenter P. M., Russell R. D. Orthogonal collocation for elliptic partial differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1976, vol. 13, no. 6, p. 923–939.

13. Bialecki B., Xiao-Chuan C. H1-norm error bounds for piecewise Hermite bicubic orthogonal spline collocation schemes for elliptic boundary value problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1994, vol. 31, no. 4, p. 1128–1146.