

Conf. on Articulated motion and deformable objects (AMDO), 2010. P. 118–127.

5. Suryanarayan P., Subramanian A., Mandalapu D. Dynamic Hand Pose Recognition Using Depth Data // 20th Intern. Conf. on Pattern Recognition (ICPR), 2010. P. 3105–3108.

6. Phung S. L., Bouzerdoum A., Chai D. Skin Segmentation Using Color Pixel Classification: Analysis and Comparison // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 2005. Vol. 27. P. 148–154.

7. Siddharth J., Gaurav S., Face detection // EE368: Digital Image Processing. 2003. P. 101–112.

8. Зотин А. Г., Носов А. В., Бузаев Д. В. Анализ пригодности методов сегментации для локализации объектов на основе цветовых и структурных признаков // Вестник СибГАУ. 2012. Вып. 1(41). С. 23–28.

9. Hu MK. Visual Pattern Recognition by Moment Invariant. IRE Trans. Info. 1962. Theory 8 (2). P. 179–187.

2. Mesteckij L. M., Rejer I. [Continuous skeletal representation of the image with controlled accuracy]. *International Conference Graphicon*. Moscow, 2003, p. 51–54.

3. ChaLearn Gesture Dataset (CGD2011). ChaLearn, California, 2011, Available at URL: <http://gesture.chalearn.org> (accessed 5 February 2014).

4. Gudmundsson S. A., Sveinsson J. R., Pard'as M. et al. Model-Based Hand Gesture Tracking in ToF Image Sequences. 6th International Conference on Articulated motion and deformable objects (AMDO), 2010, p. 118–127.

5. Suryanarayan P., Subramanian A., Mandalapu D. Dynamic Hand Pose Recognition Using Depth Data. 20th International Conf. on Pattern Recognition (ICPR), 2010, p. 3105–3108.

6. Phung S. L., Bouzerdoum A., Chai D. Skin Segmentation Using Color Pixel Classification: Analysis and Comparison. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 2005. January. Vol. 27, p. 148–154.

7. Siddharth J., Gaurav S. Face detection. *EE368: Digital Image Processing*. 2003, p. 101–112.

8. Zotin A. G., Nosov A. V., Buzaev D. V. [Suitability analysis segmentation methods for localization of objects based on the color and structural features]. *Vestnik SibGAU*. 2012, vol. 41, no. 1, p. 23–28. (In Russ.)

9. Hu MK. Visual Pattern Recognition by Moment Invariant. IRE Trans. Info. 1962, Theory 8 (2), p. 179–187.

## References

1. Mesteckij L. M. *Nepřeryvnaja morfologija binarnyh izobrazhenij: figury, skelety, cirkuljary* [Continuous morphology of binary images : figures, skeletons, circulars]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009.

© Носов А. В., 2014

УДК 539.3

## К РАСЧЕТУ ПЛАСТИН В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НА ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАГРУЗКИ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ В ФУНКЦИЯХ НАПРЯЖЕНИЙ

Р. А. Сабиров

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева  
Российская Федерация, 660014, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31  
E-mail: rashidsab@mail.ru

*Разработан вариационно-разностный метод расчета напряженного состояния пластинок в условиях плоской задачи теории упругости в функциях напряжений. Для решения температурной задачи применяется метод устранения деформаций С. Тимошенко. Получен функционал в функциях напряжений с учетом температурного члена, что освобождает от вычисления перемещений и деформаций. Особенностью разработанного алгоритма расчета является использование для формирования коэффициентов системы разрешающих уравнений и ее правой части первой и второй вариаций данного функционала. Это дает простой и универсальный алгоритм вычислений – применяются одни и те же процедуры в программных модулях. Конечно-разностная дискретизация континуальной задачи позволяет решать задачи большой размерности. Напряжения на контуре известны априори; в области пластинки уравнения неразрывности обеспечиваются при достаточно редких конечно-разностных сетках, экономится время счета и ресурсы оперативной памяти. Составлена программа расчета на основе пакета Maple; приведен пример расчета свободной пластинки при неравномерном нагреве.*

*Ключевые слова: плоская задача теории упругости, функционал Кастилиано, вариационно-разностный метод, функция напряжений.*

**TO CALCULATION OF PLATES IN THE CONDITIONS OF THE FLAT TENSION  
ON TEMPERATURE LOADINGS WITH THE HELP OF THE VARIATION  
AND DIFFERENTIAL METHOD IN TENSION FUNCTIONS**

R. A. Sabirov

Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev  
31, Krasnoyarsky Rabochy Av., Krasnoyarsk, 660014, Russian Federation  
E-mail: rashidsab@mail.ru

*The variation and differential method of calculation of plates tension in the conditions of a flat task of the elasticity theory in functions of tension is developed. The method of elimination of deformations of S. Tymoshenko is applied to the solution of a temperature task. The functionality in functions of tension, taking into account the temperature member that exempts from calculation of deformations, is received. The feature of the developed algorithm of calculation is the usage of the allowing equations and its right part of the first and second variations of this functionality for formation of coefficients of the system. It gives a universal algorithm of calculations when the same procedure in program modules is applied. The finite-differential discretization sampling of a continual task allows to solve problems of a big dimension. Tension on a contour is known a priori; in the field of a plate the equation of continuity is provided at rather rare finite-differential grids, the counting duration and resources of memory is small. The calculation program on the basis of a Maple package is made; the example of calculation of a free plate is given at uneven heating.*

*Keywords: flat task of the theory of elasticity, Kastiliano's functionality, variation and differential method, function of tension.*

Одной из причин появления напряжений в теле является неравномерное его нагревание. Температура как в земных условиях, так и в космическом пространстве изменяется ежесекундно. Опасные напряженные состояния возникают необязательно при высоких или низких температурах; опасными должны быть неравномерные изменения температурных воздействий как по области конструкций, так и по времени. Важным случаем температурного воздействия являются моменты входа аппарата и пластин солнечных батарей в тень Земли и выхода из тени. Также в период эксплуатации системы конструкций действует постоянное многоцикловое неравномерное нагревание и охлаждение. Возможны явления усталости материалов, приводящие к локальным разрушениям при сравнительно низком уровне напряжений. Казалось бы, изменения температуры действуют постоянно, а учет дополнительных температурных напряжений, с целью их добавления к напряжениям от силовых факторов, уделяется второстепенное значение (конечно, за исключением оригинальных конструкций). Подход к анализу конструкций односторонний, ограниченный, с пренебрежением к дополнительным факторам, дающим дополнительные напряжения от изменения температуры, а в какие-то моменты они могут проявиться и как основные напряжения, может привести к исключительным нештатным ситуациям. Поэтому работу, посвященную разработке метода расчета конструкций, в частности тонких пластинок, на температурные воздействия с целью исследования напряженного состояния, следует считать актуальной. Таким образом, требуется разработать подход к решению задач оценки напряженного состояния свободных от закреплений прямоугольных пластин на нагрузки, возникающие при воздействии стационарного тепло-

вого потока (температура является функцией координат).

Для решения задачи воспользуемся методом устарения деформаций [1; 2]. В этом методе для изотермического нагружения объемные и поверхностные силы определяются через температурное поле  $T(x,y,z)$  исходной температурной задачи. Известно, что модуль упругости стали при нагревании уменьшается [2], а модули упругости сплавов при нагревании как уменьшаются, так и увеличиваются (причем в 1,5–2 раза) [3]. Чтобы в разрешающие уравнения не входили упругие постоянные материала [1], краевую задачу формулируют в напряжениях.

Определенное научное содержание работы заключается:

- в полученном выражении функционала Кастилиано в функциях напряжений, учитывающем изменение температуры;
- алгоритме формирования разрешающей системы уравнений и ее правой части с использованием первой и второй вариаций функционала;
- составленной программе расчета;
- расчете напряженного состояния пластинки при неравномерном нагреве.

Рассмотрим вариационную формулировку [4], для которой получим функционал Кастилиано с учетом изменения температуры. В первую очередь, из уравнений равновесия для плоской задачи теории упругости [5] получим вариационное уравнение

$$-\iint_S (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_y \delta \varepsilon_y) dx dy + \iint_S [X \delta u + Y \delta v] dx dy + \int_{y=0}^{y=b} (\sigma_x^* \delta u + \tau_{xy}^* \delta v) dy \Big|_{x=0}^{x=a} + \int_{x=0}^{x=a} (\sigma_y^* \delta v + \tau_{yx}^* \delta u) dx \Big|_{y=0}^{y=b} = 0, \quad (1)$$

где  $\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y$  – компоненты тензора напряжений;  $\delta\varepsilon_x, \delta\gamma_{xy}, \delta\varepsilon_y$  – вариации компонент тензора деформаций;  $X, Y$  – объемные силы;  $\delta u, \delta v$  – вариации вектора перемещений;  $S$  – площадь пластинки;  $\sigma_x^*, \tau_{xy}^*, \sigma_y^*, \tau_{yx}^*$  – заданы на контуре напряжения. Добавив в (1) закон Гука [2], точнее, вариации деформаций, выраженные через вариации напряжений,

$$\delta\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\delta\sigma_x - \mu\delta\sigma_y) + \delta(\alpha T), \quad (2)$$

$$\delta\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\delta\sigma_y - \mu\delta\sigma_x) + \delta(\alpha T), \quad (3)$$

$$\delta\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \delta\tau_{xy}, \quad (4)$$

получим интегральное тождество, содержащее член  $\alpha T = \alpha T(x, y)$ . Из преобразованного уравнения (1) вынесем оператор  $\delta$ :

$$\begin{aligned} & \delta \left\{ - \iint_S \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 - 2\mu\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + \right. \\ & \left. + 2(1+\mu)\tau_{xy}^2 + 2E\alpha T(\sigma_x + \sigma_y)] dx dx + \right. \\ & \left. + \iint_S [Xu + Yv] dx dy + \int_{y=0}^{y=b} (\sigma_x^* u + \tau_{xy}^* v) dy \right\}_{x=0}^{x=a} + \\ & \left. + \int_{x=0}^{x=a} (\sigma_y^* v + \tau_{yx}^* u) dx \right\}_{y=0}^{y=b} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда (5) примет вид  $\delta\mathcal{E} = 0$ , (6)

где  $\mathcal{E}$  – выраженный в напряжениях функционал Лагранжа:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & - \iint_S \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 - 2\mu\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + \\ & + 2(1+\mu)\tau_{xy}^2 + 2E\alpha T(\sigma_x + \sigma_y)] dx dx + \\ & + \iint_S [Xu + Yv] dx dy + \int_{y=0}^{y=b} (\sigma_x^* u + \tau_{xy}^* v) dy \Big|_{x=0}^{x=a} \\ & + \int_{x=0}^{x=a} (\sigma_y^* v + \tau_{yx}^* u) dx \Big|_{y=0}^{y=b}. \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим вариант исключения из выражения (7) объемных сил  $X, Y$  и интегралов на контуре. Для этого формально умножим уравнения равновесия бесконечно малого элемента на перемещения  $u = u(x, y)$  и  $v = v(x, y)$ :

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} u + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} u + Xu = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} v + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} v + Yv = 0. \quad (9)$$

Из (8) и (9) перенесем в левую часть произведения объемных сил на перемещения, сложим их и проинтегрируем:

$$\begin{aligned} \iint_S (Xu + Yv) dx dy = & - \iint_S \left( \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} u + \right. \\ & \left. + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} u + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} v + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} v \right) dx dy. \end{aligned} \quad (10)$$

Интегрирование по частям в правой части (10) по типу

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x u) = & \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} u + \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} u) = & \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} u + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} \dots \end{aligned} \quad (11)$$

даёт равенство

$$\begin{aligned} \iint_S (Xu + Yv) dx dy = & \iint_S \left( \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy - \\ & - \int_{y=0}^{y=b} (\sigma_x^* u + \tau_{xy}^* v) dy \Big|_{x=0}^{x=a} - \\ & - \int_{x=0}^{x=a} (\sigma_y^* v + \tau_{yx}^* u) dx \Big|_{y=0}^{y=b}, \end{aligned} \quad (12)$$

которое с учетом геометрических уравнений Коши приводит к

$$\begin{aligned} \iint_S (Xu + Yv) dx dy = & \frac{1}{E} \iint_S [\sigma_x^2 - 2\mu\sigma_x\sigma_y + \\ & + \sigma_y^2 + 2(1+\mu)\tau_{xy}^2] dx dy - \\ & - \int_{y=0}^{y=b} (\sigma_x^* u + \tau_{xy}^* v) dy \Big|_{x=0}^{x=a} - \\ & - \int_{x=0}^{x=a} (\sigma_y^* v + \tau_{yx}^* u) dx \Big|_{y=0}^{y=b}. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставив (13) в (7), получим искомое выражение энергии деформирования пластинки в напряжениях, называемое функционалом Кастилиано:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_K(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = & \iint_S \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 - 2\mu\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + \\ & + 2(1+\mu)\tau_{xy}^2 + 2E\alpha T(\sigma_x + \sigma_y)] dx dx, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $E = E(x, y)$  – модуль упругости;  $\mu = \mu(x, y)$  – коэффициент Пуассона;  $\alpha = \alpha(x, y)$  – коэффициент линейного температурного расширения материала;  $T = T(x, y)$  – температурное поле. С приложением функционала Кастилиано краевая задача формулируется так, что из всех возможных напряженных состояний действительное напряженное состояние сообщает функционалу (14) максимальное значение [5].

Введем в функционал (14) функцию напряжений  $\varphi(x, y)$  (функцию Эри [6]) без учета объемных сил:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y},$$

определяющую искомым функционал

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_K(\varphi) = \iint_S \frac{1}{2E} \left[ \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 - 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2(1+\mu) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2E\alpha T \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \right] dx dy, \quad (15) \end{aligned}$$

и сформулируем для краевой задачи с учетом температурного члена, что из всех возможных напряженных состояний находящейся в равновесии пластинки действительное напряженное состояние сообщает (15) стационарное значение.

Чтобы найти напряженное состояние пластинки для формирования разрешающей системы уравнений и ее правой части, предлагается прием использования первой и второй вариаций (15):

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}_K(\varphi(x, y)) = \iint_S \frac{1}{E} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial x^2} - 2\mu \left( \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + 2(1+\mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial x \partial y} + E\alpha T \left( \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial y^2} \right) \right] dx dy; \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_2(\delta_1 \mathcal{E}_K) = \iint_S \frac{1}{E} \left[ \frac{\partial^2 \delta_2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta_1 \varphi}{\partial x^2} - 2\mu \left( \frac{\partial^2 \delta_2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta_1 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta_1 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta_2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 \delta_2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta_1 \varphi}{\partial y^2} + 2(1+\mu) \frac{\partial^2 \delta_2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta_1 \varphi}{\partial x \partial y} \right] dx dy, \quad (17) \end{aligned}$$

аппроксимации которых легли в основу предлагаемого алгоритма решения задачи.

Применим вариационно-разностную постановку. Выберем на области пластинки (рис. 1) прямоугольную равномерную сетку  $\omega_{ij} = \{(x_i = i\lambda_x, y_j = j\lambda_y), i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n\}$  на отрезках  $[0, l_x]$  и  $[0, l_y]$ . Здесь  $x = x_i$  и  $y = y_j$  – узлы сетки;  $\lambda_x = l_x / m$  и  $\lambda_y = l_y / n$  – шаг сетки, а  $l_x$  и  $l_y$  – размеры пластинки по направлениям осей координат  $x$  и  $y$ . Введем сетку с узлами  $\xi, \eta$ :

$$\begin{aligned} \omega_{\xi\eta} = \{(x_\xi = \lambda_x / 2 + i\lambda_x, y_\eta = \lambda_y / 2 + j\lambda_y), \\ i = 0, 1, \dots, m-1, j = 0, 1, \dots, n-1\}. \end{aligned}$$

Континуальную область в (16) и (17) заменим дискретной. Тогда:

$$\begin{aligned} \delta_2(\delta \mathcal{E}_K) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{1}{E_{i,j}} \left[ \frac{\partial^2 \delta_2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta_1 \varphi}{\partial x^2} - 2\mu \left( \frac{\partial^2 \delta_2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta_1 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta_1 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta_2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 \delta_2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta_1 \varphi}{\partial y^2} \right] S_{i,j} + \sum_{i=1}^m \sum_{\eta=1}^{n-2} \left[ (1+\mu) \frac{\partial^2 \delta_2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta_1 \varphi}{\partial x \partial y} \right] S_{i,\eta} + \\ + \sum_{j=1}^n \sum_{\xi=1}^{m-2} \left[ (1+\mu) \frac{\partial^2 \delta_2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta_1 \varphi}{\partial x \partial y} \right] S_{j,\xi}; \quad (18) \\ \delta \mathcal{E}_K(\delta_1 \varphi(x, y)) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[ \alpha T \left( \frac{\partial^2 \delta_1 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta_1 \varphi}{\partial y^2} \right) \right] S_{i,j}. \quad (19) \end{aligned}$$

Здесь площадки интегрирования  $S_{\alpha,\beta}$  равны:  $\lambda_x \lambda_y$  – во внутренних узлах области;  $\lambda_x \lambda_y / 2$  – в узлах, расположенных на контуре;  $\lambda_x \lambda_y / 4$  – в узлах, расположенных в углах пластинки. Дифференциальные операторы в (18) и (19) заменяются конечно-разностными аналогами:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 \delta_k \varphi}{\partial x^2} \right)_{i,j} &= \frac{\delta_k \varphi_{i+1,j} - 2\delta_k \varphi_{i,j} + \delta_k \varphi_{i-1,j}}{\lambda_x^2}, \\ \left( \frac{\partial^2 \delta_k \varphi}{\partial y^2} \right)_{i,j} &= \frac{\delta_k \varphi_{i,j+1} - 2\delta_k \varphi_{i,j} + \delta_k \varphi_{i,j-1}}{\lambda_y^2}, \quad (20) \\ \left( \frac{\partial^2 \delta_k \varphi}{\partial x \partial y} \right)_{i,\eta} &= \frac{-\delta_k \varphi_{i+1,\eta+1} + \delta_k \varphi_{i-1,\eta+1} - \delta_k \varphi_{i-1,\eta} + \delta_k \varphi_{i+1,\eta}}{2\lambda_x \lambda_y}, \\ \left( \frac{\partial^2 \delta_k \varphi}{\partial x \partial y} \right)_{j,\xi} &= \frac{-\delta_k \varphi_{i+1,j+1} + \delta_k \varphi_{i,j+1} - \delta_k \varphi_{i,j-1} + \delta_k \varphi_{i+1,j-1}}{2\lambda_x \lambda_y}, \end{aligned}$$

( $k = 1, 2$ ).

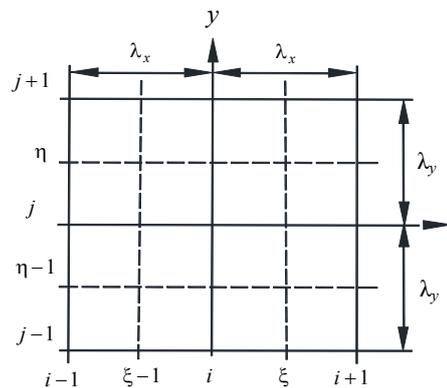


Рис. 1. Конечно-разностная сетка, нанесенная на область пластинки

Для задания функции  $\varphi$  на контуре пластинки используем «рамную аналогию» [5; 6].

Построим алгоритм формирования системы уравнений и правой части. Пусть функционал (15) в дискретной форме содержит вектор  $p$  переменных

$\bar{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ . Тогда (18) содержит вариации вектора  $\delta_1\bar{\varphi} = (\delta_1\varphi_1, \delta_1\varphi_2, \dots, \delta_1\varphi_p)$  и  $\delta_2\bar{\varphi} = (\delta_2\varphi_1, \delta_2\varphi_2, \dots, \delta_2\varphi_p)$ . Элемент матрицы  $a_{ij}$  системы линейных алгебраических уравнений вычисляется как

$$a_{ij} = \delta^2 \mathcal{E}_K(\delta_1\bar{\varphi}, \delta_2\bar{\varphi}) = \delta_2(\delta_1 \mathcal{E}_K(\delta_1\bar{\varphi}, \delta_2\bar{\varphi})) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \left( \sum_{l=1}^p \frac{\partial \mathcal{E}_K(\delta_1\bar{\varphi}, \delta_2\bar{\varphi})}{\partial \varphi_l} \delta_1\varphi_l \right) \delta_2\varphi_k, \quad (21)$$

$$\delta_2\varphi_k = \begin{cases} 1, & \text{при } k = i \\ 0, & \text{при } k \neq i \end{cases}, \quad \delta_1\varphi_l = \begin{cases} 1, & \text{при } l = j \\ 0, & \text{при } l \neq j \end{cases}, \quad (22)$$

$i = 1, 2, \dots, p; \quad j = 1, 2, \dots, p.$

Цикл (22) из равенства (21) формирует квадратную симметричную относительно главной диагонали матрицу. Соответственно, вектор правой части определяется из (19) циклом

$$b_i = \delta_1 \mathcal{E}_L(\delta_1\bar{\varphi}) = \sum_{l=1}^p \frac{\partial \mathcal{E}_L(\delta_1\bar{\varphi})}{\partial \varphi_l} \delta_1\varphi_l; \quad (23)$$

$$i = 1, 2, \dots, p; \quad \delta_1\varphi_l = \begin{cases} 1, & \text{при } l = i \\ 0, & \text{при } l \neq i \end{cases}.$$

В контурных узлах значения функций Эри известны. В законтурных узлах  $\varphi$  вычисляется по формуле  $d\varphi/dv = N$ , где  $v$  – нормаль к контуру рамы, окаймляющей собственно пластинку;  $N$  – продольное усилие в раме.

Для расчета пластинки на температурные нагрузки составлена программа расчета на основе пакета Maple. Приведем пример тестового расчета пластинки на изменение температуры по закону  $T(x, y) = T(2y/l_y)^2$  – такое распределение температуры рассматривается для балок в [1; 2; 7]. Пластинка квадратная в плане размерами  $l_x = 0,2$  м и  $l_y = 0,2$  м. Конечно-разностную сетку примем с шагом  $40 \times 40$ . Модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па; коэффициент Пуассона 0,5.

График распределения установившейся температуры в пластинке по заданному закону приведен на рис. 2.

Эпюры напряжений приведены на рис. 3. Для удобства анализа напряженного состояния разделим значения напряжений, приведенных в эпорах, на введенный в расчет модуль Юнга. Наибольшие нормальные напряжения  $\sigma_x = -(2/5)E\alpha T$  действуют в области  $y = \pm l_y/2$ , а растягивающие напряжения  $\sigma_x = (1/10)E\alpha T$  возникают в окрестности  $y = 0$ . В более нагретых местах возникают сжимающие температурные напряжения  $\sigma_x$ . Условия равновесия элементов пластинки диктуют проявление и растягивающих напряжений  $\sigma_x$ . На свободных краях  $x = l_x$  и  $x = 0$  напряжения  $\sigma_x = 0$ .

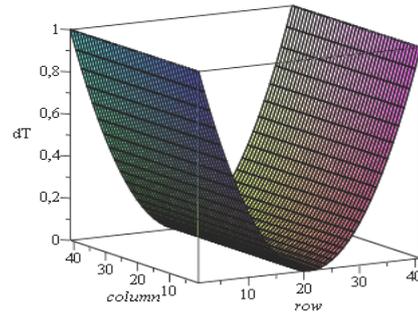


Рис. 2. Эпюра температурного воздействия – график установившейся температуры в пластинке. Множитель  $T$

Нормальные напряжения  $\sigma_y$ , наоборот, достигают наибольших сжимающих значений на краях  $x = l_x$  и  $x = 0$ , а растягивающих значений – в средней зоне области пластинки. Условия неразрывности деформаций требуют возникновения этих напряжений. Порядок напряжений  $\sigma_y$  такой же, как порядок напряжений  $\sigma_x$ .

Касательные напряжения достигают значений  $\tau_{xy} = \pm(3/40)E\alpha T$ ; наибольшие значения приобретают в областях  $y = \pm l_y/4$ ,  $x = \pm l_x/4$ .

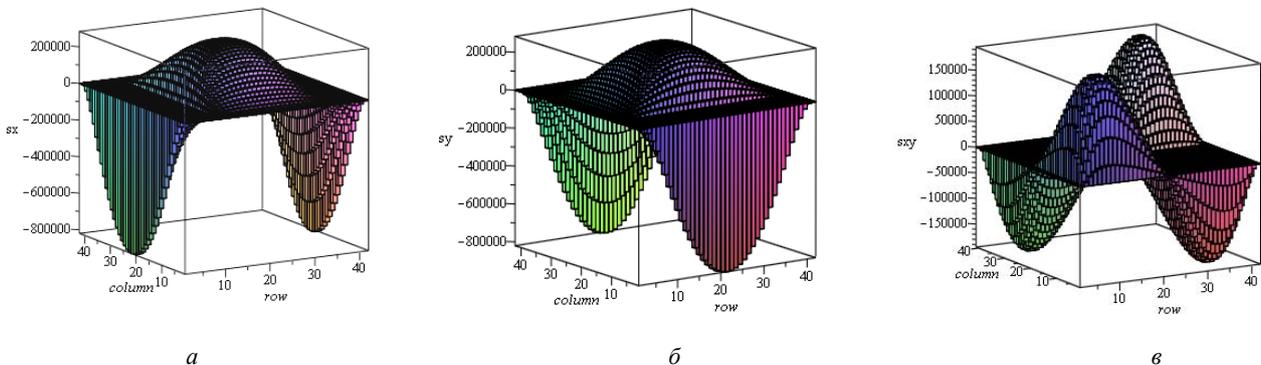


Рис. 3. Эпюры нормальных и касательных напряжений в пластинке:  $a - \sigma_x$ ;  $b - \sigma_y$ ;  $в - \tau_{xy}$  (здесь размерность  $\text{кГ/см}^2$ ; множитель  $aT$ )

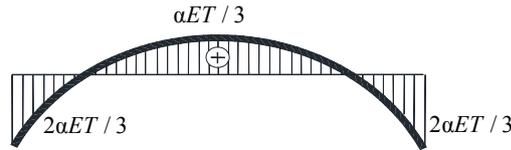


Рис. 4. Эпюра напряжения  $\sigma_x$  в поперечном сечении стержня, полученная методом сопротивления материалов

Характер распределения напряжений  $\sigma_x$  согласуется с характером распределения аналогичного напряжения в стержне температурной задачи, рассмотренной в [7]. Распределение напряжений показано на рис. 4 для стержня шириной  $b = l_y$ . Эпюра нормальных напряжений в стержне во всех поперечных сечениях, включая и контур, постоянная. В стержне действие напряжений  $\sigma_y$  и касательных напряжений  $\tau_{xy}$  не учитывается.

Таким образом, применение подхода к решению краевой задачи с использованием первой и второй вариаций функционала Кастилиано с конечно-разностной аппроксимацией позволили создать универсальный алгоритм расчета напряженного состояния пластинок на температурные воздействия; расчеты напряженного состояния пластинки были выполнены на различных сетках; исследования сходимости решений в напряжениях от сгущения сетки показали достаточность редкой сетки  $6 \times 6$  (т. е. наблюдается достаточно хорошая сходимость напряжений в зависимости от сгущения сетки к напряжениям напряженного состояния, обеспечивающего неразрывность деформаций в дискретной задаче); характер распределения напряжений  $\sigma_x$  согласуется с характером распределения аналогичного напряжения в балках; скромность требуемых ресурсов для реализации позволяет внедрить методику решения рассмотренной плоской задачи в учебный курс теории упругости как добавление к традиционно используемой дифференциальной формулировке краевой задачи в виде бигармонического уравнения неразрывности деформаций.

#### Библиографические ссылки

1. Тимошенко С. П. Теория упругости. Л. ; М. : ОНТИ. 1937. 451 с.
2. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М. : Наука, 1975. 576 с.

3. Механические свойства материалов с эффектом памяти при сложном температурно-силовом воздействии и ортогональном нагружении : монография / под ред. И. Н. Андропова. Ухта : УГТУ, 2010. 191 с.

4. Ланцош К. Вариационные принципы механики : пер. с англ. М. : Мир, 1965. 408 с.

5. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности : пер. с англ. М. : Мир, 1987. 542 с.

6. Новацкий В. Теория упругости. М. : Мир. 1975. 872 с.

7. Биргер И. А., Мавлютов Р. Р. Сопротивление материалов. М. : Наука, 1986. 560 с.

#### References

1. Timoshenko S. P. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Leningrad–Moscow, ONTI Publ., 1937, 451 p.

2. Timoshenko S. P., Gud'er Dzh. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 576 p.

3. *Mekhanicheskie svoystva materialov s jeffektom pamjati pri slozhnom temperaturno-silovom vozdejstvii i ortogonal'nom nagruzhennii* [Mechanical properties of materials with effect of memory at difficult temperature and power influence and orthogonal loading]. Uhta, UGTU Publ., 2010, 191 p.

4. Lancosh K. *Variatsionnye printsipy mekhaniki* [Variation principles of mechanics]. Moscow, Mir Publ., 1965, 408 p.

5. Vasidzu K. *Variatsionnye metody v teorii uprugosti i plastichnosti* [Variational methods in elasticity and plasticity]. Moscow, Mir Publ., 1987, 542 p.

6. Novackij V. *Teoriya uprugosti* [Elasticity theory]. Moscow, Mir Publ., 1975, 872 p.

7. Birger I. A., Mavljutov R. R. *Soprotivlenie materialov* [Resistance of materials]. Moscow, Nauka Publ., 1986, 560 p.

© Сабилов Р. А., 2014