

УДК 512.54

ВЗАИМООТНОШЕНИЯ ПОЧТИ СЛОЙНО КОНЕЧНЫХ ГРУПП С БЛИЗКИМИ КЛАССАМИ

В. И. Сенашов

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660014, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31
Институт вычислительного моделирования СО РАН
Российская Федерация, 660036, Красноярск, Академгородок, 50/44
Сибирский федеральный университет
Российская Федерация, 660041, Красноярск, просп. Свободный, 79
E-mail: sen1112home@mail.ru

Работа посвящена изучению взаимоотношений классов групп с условиями конечности. Условия конечности накладываются на количество элементов данного порядка в группе, на порядки ее элементов, на мощность классов сопряженных элементов. Приводятся примеры групп, разделяющие класс почти слойно конечных групп и близкие к нему классы групп: слойно конечные группы, периодические группы, черниковские группы, локально нормальные группы и группы с конечными классами сопряженных элементов. Устанавливаются свойства взаимоотношений рассматриваемых классов групп. В частности, доказывается совпадение классов почти слойно конечных групп и черниковских групп в классе примарных групп. Результаты статьи найдут применение при изучении бесконечных групп с условиями конечности.

Ключевые слова: группа, слойно конечный радикал, инволюция, слойная конечность.

RELATIONSHIPS OF THE ALMOST LAYER FINITE GROUPS WITH SIMILAR GROUP CLASSES

V. I. Senashov

Siberian State Airspace University named after academician M. F. Reshetnev
31, Krasnoyarsky Rabochy Av., Krasnoyarsk, 660014, Russian Federation
Institute of Computational Modelling of Siberian Branch of RAS
50/44, Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation
Siberian Federal University
79, Svobodny Av., Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation
E-mail: sen1112home@mail.ru

This paper is devoted to the study of the relationships between classes of groups with finiteness conditions. Finiteness conditions superimpose limitations on a number of elements of a certain order in a group, on the order of its elements and on the cardinality of conjugate classes. The paper provides examples of groups that share class of almost layer-finite groups and those close to that class of groups: layer-finite groups, periodic groups, Chernikov's groups, locally normal groups and the groups with the finite classes of conjugate elements. We establish the properties of the relationships of the considered classes of groups. In particular, we prove the coincidence of the classes of almost layer-finite groups and Chernikov's groups in the class of primary groups. Our results will be used in the study of infinite groups with finiteness conditions.

Keywords: group, layer-finite radical, involution, layer-finiteness.

Группа называется *слойно конечной*, если она имеет конечное число элементов каждого порядка. Это понятие впервые было введено С. Н. Черниковым в работе [1]. Слойно конечные группы исследовали С. Н. Черников, Р. Бэр, Х. Х. Мухамеджан, Я. Д. Половицкий и др. Теория таких групп в развернутом виде изложена в монографиях [2; 3]. Как указал С. Н. Черников в математической энциклопедии [4], слойно

конечные группы оказались наиболее изученными среди групп с конечными классами сопряженных элементов. В почти слойно конечных группах классы сопряженных элементов не обязаны быть конечными.

Определение. Почти слойно конечная группа – это группа, являющаяся расширением слойно конечной группы при помощи конечной группы.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-00509) и гранта Сибирского федерального университета (проект «Алгебро-логические структуры и комплексный анализ»).

Почти слойно конечные группы представляют собой существенно более широкий класс групп, чем слойно конечные группы. В него, в частности, входят все черниковские группы. Черниковские группы не обязательно являются слойно конечными.

Напомним, что группа называется *черниковской*, если она либо конечна, либо является конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп.

Слойно конечные группы начали изучаться С. Н. Черниковым в связи с изучением групп с условием минимальности в случае, когда конечен индекс центра группы. Основным результатом, описывающим строение слойно конечных групп, был получен С. Н. Черниковым в 1948 г. в работе [5]. В нем говорится, что группа тогда и только тогда слойно конечна, когда ее можно представить в виде произведения двух поэлементно перестановочных подгрупп, из которых первая является слойно конечной полной абелевой группой, а вторая – слойно конечной группой с конечными силовскими подгруппами.

Почти слойно конечные группы не обязаны удовлетворять условию минимальности, но близки по свойствам к таким группам. В данной работе мы приведем примеры групп, разделяющих между собой классы групп: слойно конечные группы, периодические группы, группы с конечными классами сопряженных элементов, локально нормальные группы, черниковские группы. Докажем ряд теорем, которые помогут установить взаимоотношения этих классов групп.

Классу почти слойно конечных групп посвящены работы [6–8].

По своему определению почти слойно конечные группы представляют собой более широкий класс групп, чем слойно конечные группы. В качестве примера, показывающего различие этих классов групп, можно указать расширение квазициклической примарной группы при помощи циклической группы порядка два, которая инвертирует все элементы из квазициклической группы.

Этот же пример разделяет между собой классы черниковских групп и слойно конечных групп, так как рассмотренная группа черниковская и не является слойно конечной.

Определения слойно конечной группы, почти слойно конечной группы и черниковской группы приведены выше. Напомним определения классов групп, которые мы также будем рассматривать.

Определение. *Периодическая группа* – это группа, в которой порядок любого элемента конечен.

Определение. *Группа с конечными классами сопряженных элементов* – это группа, в которой все классы сопряженных элементов конечны.

Определение. Группа называется *локально нормальной*, если в ней любое конечное множество элементов содержится в конечной подгруппе, нормальной в самой группе.

Нам потребуются еще два термина.

Определение. *Элемент второго порядка* называется инволюцией.

Определение. Если произведение всех нормальных слойно конечных подгрупп группы слойно конечно, то оно называется *слойно конечным радикалом* группы.

Приведем известные результаты, которые мы использовали в работе. Для удобства ссылок на эти результаты, будем называть их предложениями с соответствующим номером.

Предложение 1 (С. Н. Черников). Если группу G можно представить в виде произведения двух слойно конечных нормальных делителей, то группа G слойно конечна (усиление теоремы 3.5 из [2], приведенное в [2] на с.140).

Предложение 2 (В. П. Шунков). Расширение черниковской группы с помощью черниковской группы есть черниковская группа (теорема 2.2 из [9]).

Предложение 3 (С. Н. Черников). Слойно конечную группу можно представить в виде произведения двух поэлементно перестановочных подгрупп, из которых первая является полной абелевой слойно конечной группой, а вторая – слойно конечной группой с конечными силовскими подгруппами (теорема 3.3 из [2]).

Предложение 4 (С. Н. Черников). Класс слойно конечных групп совпадает с классом локально нормальных групп, все силовские подгруппы которых удовлетворяют условию минимальности (теорема 3.7 из [2]).

Предложение 5 (С. Н. Черников). Бесконечная слойно конечная p -группа G содержит нормальную подгруппу конечного индекса, которая разлагается в прямое произведение конечного числа квазициклических групп (и потому группа G нильпотентна и удовлетворяет условию минимальности) [1] (см. также теорему 5.1 из [3]).

При изучении почти слойно конечных групп понятие слойно конечного радикала является ключевым. Не в каждой группе имеется слойно конечный радикал. Однако любая почти слойно конечная группа обладает слойно конечным радикалом, который имеет конечный индекс в группе.

Действительно, пусть W – произвольная почти слойно конечная группа. Если группа W слойно конечна, то она совпадает со своим слойно конечным радикалом. Поэтому будем полагать группу W не слойно конечной. Почти слойная конечность группы W означает, что в группе W можно найти нормальный делитель A_1 , фактор-группа по которому конечна. Если группа A_1 не является максимальной нормальной в группе W слойно конечной подгруппой, то найдется содержащая подгруппу A_1 слойно конечная подгруппа A_2 , нормальная в W и отличная от A_1 . При этом выполняется неравенство $|W/A_2| < |W/A_1|$. Если группа A_2 снова не является максимальной нормальной в группе W слойно конечной подгруппой, то строим подгруппу A_3 аналогично. Процесс построения подгрупп A_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ оборвется на некотором конечном шаге n ввиду конечности порядка группы W/A_1 ,

и построенная группа A_n будет являться максимальной нормальной в группе W слойно конечной подгруппой.

Группа A_n будет единственной максимальной нормальной в группе W слойно конечной подгруппой. Действительно, если нашлась другая максимальная нормальная в группе W слойно конечная подгруппа C , то ввиду предложения 1 группа $A_n \cdot C$ является слойно конечной и в то же время нормальной в группе W . Поскольку группа $A_n \cdot C$ строго содержит подгруппу A_n , то получаем противоречие с максимальной последней.

В черниковской группе множество простых делителей порядков элементов конечно, в то же время черниковские группы почти слойно конечны. В связи с этим интересен следующий результат: нечерниковская почти слойно конечная группа обладает бесконечным множеством простых делителей порядков ее элементов.

По предложению 2 слойно конечный радикал $R(W)$ нечерниковской группы W является нечерниковской группой, по предложениям 3 и 4 $R(W)$ можно представить в виде произведения двух поэлементно перестановочных подгрупп A и B , где A – полная абелева группа, а B – локально нормальная группа с конечными силовскими подгруппами. Если бы множество простых делителей порядков группы W было конечным, то группа A являлась бы прямым произведением конечного числа квазициклических групп, а группа B – конечной группой, и тогда группа $R(W)$ была бы черниковской. Противоречие означает, что множество простых делителей порядков элементов группы W бесконечно.

Существование нечерниковской почти слойно конечной группы, одно из свойств которой только что получено, устанавливает следующий пример: расширение прямого произведения бесконечного множества квазициклических групп по разным простым числам при помощи циклической группы порядка два, инволюция из которой инвертирует все элементы из прямого произведения.

Почти слойно конечная группа из этого примера не является ни черниковской группой, ни группой с конечными классами сопряженных элементов, ни слойно конечной группой.

Рассмотрим строение почти слойно конечных примарных групп. В качестве примера таких групп можно указать прямые произведения конечного числа квазициклических примарных групп по одному и тому же простому числу p и расширение таких групп при помощи конечных p -групп.

Этими примерами исчерпываются все примарные почти слойно конечные группы, а именно, справедлив следующий результат: бесконечная почти слойно конечная p -группа G содержит нормальную подгруппу конечного индекса, которая разлагается в прямое произведение конечного числа квазициклических групп.

Как мы показали выше, группа G обладает слойно конечным радикалом $R(G)$, имеющим конечный индекс в группе G . Слойно конечная подгруппа $R(G)$, в

свою очередь, содержит по предложению 5 нормальную подгруппу A конечного индекса, которая разлагается в прямое произведение конечного числа квазициклических групп. Так как группа A , очевидно, является характеристической в группе $R(G)$, то она также является нормальной подгруппой в группе G и имеет в G конечный индекс.

Из доказанного результата и определения черниковской группы вытекает следующее утверждение: почти слойно конечная примарная группа является черниковской.

Отсюда видно, что в классе примарных групп класс почти слойно конечных групп совпадает с классом черниковских групп. В то же время в классе примарных групп слойно конечные группы строго содержатся в классе черниковских групп, как показывает пример: расширение квазициклической 2-группы при помощи циклической группы порядка два, которая инвертирует все элементы из квазициклической группы.

Приведем пример слойно конечной группы с конечными классами сопряженных элементов, которая не является черниковской группой: прямое произведение бесконечного множества квазициклических групп по разным простым числам.

Следующий пример показывает, что классы слойно конечных групп и черниковских групп имеют неединичное пересечение: конечные группы или прямые произведения конечного множества квазициклических групп являются примерами слойно конечных черниковских групп.

Следующий пример – пример группы с конечными классами сопряженных элементов, не являющейся почти слойно конечной группой: прямое произведение бесконечного множества изоморфных между собой конечных групп.

Докажем еще следующий факт: почти слойно конечная группа является периодической.

Как мы показали выше, почти слойно конечная группа G обладает слойно конечным радикалом $R(G)$. Элемент бесконечного порядка не может содержаться в слойно конечном радикале, так как его степени составляют в нем бесконечный слой элементов одного и того же порядка.

Вне радикала в $G \setminus R(G)$ также не может содержаться элемента бесконечного порядка, так как в фактор-группе по слойно конечному радикалу в этом случае будет содержаться бесконечная циклическая подгруппа (ввиду единичности пересечения бесконечной циклической группы, порожденной этим элементом и слойно конечным радикалом), но это невозможно из-за конечности этой фактор-группы.

Из доказанного факта вытекает, что класс почти слойно конечных групп содержится в классе периодических групп. Эти классы не совпадают между собой, как показывает следующий пример: бесконечная элементарная абелева примарная группа является периодической не почти слойно конечной группой.

Этот пример также показывает, что локально нормальная группа не обязана быть почти слойно конечной. В связи с этим интересно, что класс почти слой-

но конечных групп совпадает с классом почти локально нормальных групп с силовскими подгруппами, удовлетворяющими условию минимальности.

Действительно, пусть группа G почти локально нормальна. Тогда в ней имеется локально нормальная подгруппа H конечного индекса. Если силовские подгруппы группы H удовлетворяют условию минимальности, то по предложению 4 H слойно конечна и в одну сторону. Утверждение доказано.

Пусть теперь группа G почти слойно конечна. Ее силовские подгруппы удовлетворяют условию минимальности по доказанному выше и ввиду того, что черниковские группы удовлетворяют условию минимальности. Слойно конечный радикал группы G имеет в G конечный индекс, как мы уже не раз отмечали, и является локально нормальной группой по предложению 4. Следовательно, G является почти локально нормальной группой.

В результате построения восьми примеров определены взаимоотношения класса почти слойно конечных групп с близкими по свойствам классами групп. Эти взаимоотношения уточнены при помощи доказанных свойств. Результаты статьи найдут применение при изучении бесконечных групп с условиями конечности.

Библиографические ссылки

1. Черников С. Н. К теории бесконечных специальных p -групп // Докл. АН СССР. 1945. Т. 50. С. 71–74.
2. Черников С. Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.: Наука, 1980. 384 с.
3. Сенашов В. И. Слойно конечные группы. Новосибирск: Наука, 1993. 158 с.
4. Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1977. Т. 1. 1152 с.

5. Черников С. Н. Бесконечные слойно конечные группы // Мат. сб. 1948. Т. 22(64). С. 101–133.

6. Сенашов В. И. О группах Шункова с сильно вложенной почти слойно конечной подгруппой // Труды ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16 (3). С. 234–239.

7. Сенашов В. И. О группах с сильно вложенной подгруппой, обладающей почти слойно конечной периодической частью // Украин. мат. журн. 2012. Т. 64(3). С. 384–391.

8. Сенашов В. И. Строение бесконечной силовой подгруппы в некоторых группах Шункова // Вестник СибГАУ. 2013. № 1 (47). С. 74–79.

9. Шунков В. П. О вложении примарных элементов в группе. Новосибирск: Наука, 1992. 132 с.

References

1. Chernikov S. N. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1945, vol. 50, p. 71–74.
2. Chernikov S. N. *Gruppy s zadannymi svoystvami sistemy podgrupp* (Group with the Given Properties of Subgroups Systems). Moscow, Nauka, 1980, 384 p.
3. Senashov V. I. *Sloyno konechnyye gruppy* (Layer Finite Groups). Novosibirsk, Nauka, 1993, 158 p.
4. *Matematicheskaya entsiklopediya*. Vol. 1. Moscow, Sovetskaya entsiklopediya Publ., 1977, 1152 p.
5. Chernikov S. N. *Math. Sbornik*. 1948, vol. 22 (64), p. 101–133.
6. Senashov V. I. *Trudy IMM UrO RAN*. 2010, vol. 16, № 3, p. 234–239.
7. Senashov V. I. *Ukrain. math. zhurn.* 2012, vol. 64, № 3, p. 384–391.
8. Senashov V. I. *Vestnik SibGAU*. 2013, № 1 (47), p. 74–79.
9. Shunkov V. P. *O vlozhenii primarnykh elementov v gruppe* (On an Embedding of Primary Elements in a Group). Novosibirsk, Nauka Publ., 1992, 132 p.

© Сенашов В. И., 2014

УДК 539.371

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ*

С. И. Сенашов, Е. В. Филюшина

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660014, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31
E-mail: sen@sibsau.ru, filyushina@sibsau.ru

В настоящее время для полноценного исследования дифференциальных уравнений кроме определения типа уравнений и правильной постановки граничных условий, выяснения существования и единственности решений необходимо знать симметрии, допускаемые системой, и законы сохранения. При этом оказывается, что кроме общеизвестных законов сохранения, следующих из общих методов построения уравнений, существуют и иные законы сохранения. Эти законы могут быть полезны для решения краевых задач и получения различных оценок решений. Построены новые законы сохранения для двумерных уравнений линейной упругости в стационарном случае. Сохраняющийся ток линеен по первым производным от искомых функций, но не зависит от

* Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, Б-180-14.