

**О СИЛОВСКОЙ 2-ПОДГРУППЕ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ГРУППЕ
С ЗАДАННЫМ НАБОРОМ КОНЕЧНЫХ ПОДГРУПП**Е. А. Пронина¹, А. А. Шлепкин², А. Н. Дарзиев¹¹Красноярский государственный аграрный университет
Российская Федерация, 660130, г. Красноярск, ул. Стасовой, 44и
E-mail: katyushka_2707@mail.ru²Сибирский федеральный университет
Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, просп. Свободный, 79
E-mail: ak_kgau@mail.ru

Изучение бесконечных групп с различными условиями конечности – актуальная задача в теории групп. Одним из таких условий является условие насыщенности группы заданным множеством групп.

Группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{M}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{M}$. Известно, что произвольная периодическая группа, насыщенная группами из множества групп $\{L_2(p^n)\}$, где p и n не фиксируются, изоморфна $L_2(Q)$, где Q – локально-конечное поле. Кроме того, этот результат удалось обобщить на случай, когда группа насыщена группами из множества групп $\{SL_2(p^n)\}$. Естественно было бы рассмотреть случай, когда периодическая группа насыщена группами из множества групп $\{GL_2(p^n)\}$ в предположении, что имеет место следующая гипотеза: пусть периодическая группа G насыщена множеством групп $\{GL_2(p^n)\}$, где p , n не фиксируются. Тогда $G \cong GL_2(Q)$ для некоторого локально-конечного поля Q . Таким образом, возникает задача выделения в периодических группах классов групп, в которых данная гипотеза имеет место. Данная гипотеза доказана в классе локально-конечных групп. Одним из классов, в котором эта гипотеза может оказаться верной, является класс групп Шункова. В данном классе эта гипотеза была доказана для периодических групп Шункова при дополнительном ограничении – фиксированности p . Попытка отказаться от условия фиксированности p привела к необходимости классификации силовских 2-подгрупп в указанных группах. В данной работе эта классификация сделана. Установлена структура силовских 2-подгрупп группы G для случая, когда $\mathfrak{M}$ состоит из полных линейных групп степени два над конечными полями.

Ключевые слова: группа, насыщенность.

Vestnik SibGAU
2014, No. 5(57), P. 101–107**ABOUT A SYLOW 2-SUBGROUP IN THE PERIODIC GROUP
WITH A GIVEN SET OF FINITE SUBGROUPS**E. A. Pronina¹, A. A. Shlepin², A. N. Darzиеv¹¹Krasnoyarsk State Agrarian University
44I, Stasov str., Krasnoyarsk, 660130, Russian Federation
E-mail: katyushka_2707@mail.ru²Siberian Federal University
79, Svobodnyi Av., Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation
E-mail: ak_kgau@mail.ru

This article is about the study of infinite groups with different conditions limbs actual problem in group theory. One of such conditions is the condition of saturation of a group specified set of groups.

The group G is full of groups of many $\mathfrak{M}$, if any finite subset of is contained in a subgroup G isomorphic to some group of $\mathfrak{M}$. It is known that an arbitrary periodic group, saturated groups from a variety of groups $\{L_2(p^n)\}$, where p and n not fixed, is isomorphic to $L_2(Q)$, where Q is a locally – finite field. Additionally, this result has been generalized to the case when the group is saturated with groups from a variety of groups $\{SL_2(p^n)\}$. It would be natural to

consider the case when periodic group are saturated with groups from a variety of groups $\{GL_2(p^n)\}$: Let a periodic group G is saturated with many groups $\{GL_2(p^n)\}$, where p, n not fixed. Then $G \simeq GL_2(Q)$ for some locally finite fields Q . Thus, there is a problem of separation in periodic groups of classes of groups in which this hypothesis holds. This hypothesis is proved in the class of locally finite groups. One of the classes in which this hypothesis may be true, is the class of groups Shunkov. In this class, this hypothesis was proved for periodic groups Shunkov when the additional constraint is fixed p . Attempt to abandon the fixity conditions led to the need for classification of Sylow 2-subgroups in these groups. In this work, this classification is made. The structure of Sylow 2-subgroups of the group G for the case when is $\mathfrak{M}$ of the full linear group of degree two over finite fields.

Keywords: group, saturation.

Введение. Группа G насыщена группами из множества групп $\mathfrak{M}$, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G , изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{M}$ [1].

Пусть группа G насыщена группами из множества групп $\mathfrak{M}$ и K – конечная подгруппа из G . Через $\mathfrak{M}(K)$ обозначим множество всех подгрупп из G , содержащих K и изоморфных группам из $\mathfrak{M}$. В частности, если 1 – единичная подгруппа G , то $\mathfrak{M}(1)$ – множество всех подгрупп группы G , изоморфных группам из $\mathfrak{M}$ [2].

Под символом e в данной работе будет пониматься единица группы G .

В [3] доказано, что произвольная периодическая группа, насыщенная группами из множества групп $\{L_2(p^n)\}$, где p и n не фиксируются, изоморфна $L_2(Q)$, где Q – локально-конечное поле. Там же этот результат удалось обобщить на случай, когда группа насыщена группами из множества групп $\{SL_2(p^n)\}$. Естественно рассмотреть случай, когда периодическая группа насыщена группами из множества групп $\{GL_2(p^n)\}$.

Гипотеза. Пусть периодическая группа G насыщена множеством групп $\{GL_2(p^n)\}$, где p, n не фиксируются. Тогда $G \simeq GL_2(Q)$ для некоторого локально-конечного поля Q .

Следующий пример показывает, указанная гипотеза в классе периодических групп неверна. Рассмотрим группу

$$G = L_2(2^n) \times B(m, p),$$

где $m > 1$; $p = 2^n - 1$ – простое фиксированное число, большее 665; $B(m, p)$ – свободная берсайдова группа с m образующими и периода p . Так как

$$GL_2(2^n) = L_2(2^n) \times Z(GL_2(2^n)),$$

$|Z(GL_2(2^n))| = 2^n - 1 = p$ и порядок любой нетривиальной конечной подгруппы из $B(m, p)$, как показано в [4, с. 296], равен p , то G насыщена множеством

$\mathfrak{M} = \{GL_2(2^n)\}$, состоящим из одной группы. Как показано в [4, с. 262], $B(m, p)$ для указанных m и p не является локально-конечной группой. Следовательно, G не локально-конечная группа.

Таким образом, возникает задача выделения в периодических группах классов групп, в которых данная гипотеза имеет место. В [5] данная гипотеза доказана в классе локально-конечных групп. Одним из классов, в котором эта гипотеза может оказаться верной, является класс групп Шункова.

Для доказательства гипотезы в классе групп Шункова предлагается следующая схема:

1. Доказать, что центр $Z(G)$ нетривиален и является локально-циклической группой.

2. Доказать, что $\bar{G} = G \setminus Z(G)$ является группой Шункова и насыщена группами из множества $\{PGL_2(p^n)\}$ и, как следствие, вывести отсюда, что $\bar{G}$ изоморфна $PGL_2(Q)$ для некоторого локально-конечного поля Q .

3. Используя верность гипотезы для локально-конечных групп, показать, что G изоморфна $GL_2(Q)$.

В [6; 7] данная схема реализована в классе периодических групп Шункова при дополнительном ограничении – фиксированности p . Попытка отказаться от условия фиксированности p привела к необходимости классификации силовских 2-подгрупп в указанных группах. В данной работе эта классификация сделана.

Пусть $\mathfrak{M} = \{GL_2(p^n)\}$, где p – простое нефиксированное число и натуральное n не фиксируется.

Доказан следующий результат.

Теорема. Пусть периодическая группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{M}$. Тогда силовская 2-подгруппа S группы G одна из следующих:

1. $S = \langle a^{2^n} = v^2 = 1, a^v = a^{2^{n-1}-1} \rangle$ – полудиэдральная группа и $|S| = 2^{n+1}$.

2. $S = \langle a, w \mid a^{2^n} = b^{2^n} = w^2 = e, a^w = b, ab = ba \rangle$ – сплетенная 2-группа и $|S| = 2^{n+2}$.

3. S – конечная элементарная абелева 2-группа.

4. S – бесконечная элементарная абелева 2-группа.

5. $S = \tilde{S}K$, где $\tilde{S}$ – полная 2-группа 2 ранга не более 2, K – конечная 2-группа, изоморфная некоторой подгруппе группы диэдра порядка 8.

6. В G существует силовская 2-подгруппа $S = (A \times B)\lambda(w)$, где A – бесконечная локально-циклическая 2-группа; $w^2 = e$; $A^w = B$.

Известные факты и определения.

Предложение 1. Определение черниковской группы. Группа называется черниковской, если она является конечным расширением прямого произведения квазициклических групп, взятых в конечном числе [8].

Предложение 2. Пусть $G-p$ – группа Шункова. Если ранги конечных элементарных абелевых p подгрупп из G ограничены в совокупности, то G – черниковская группа [9–11].

Предложение 3. Пусть $G = (A \times B)\lambda(w)$ – конечная сплетенная 2-группа, т. е.

$A = \langle a \rangle, B = \langle b \rangle, a^w = b, a^{2^k} = b^{2^k} = w^2 = 1$. Тогда:

1. Центр $Z = Z(G) = \langle ab \rangle = \langle z \rangle$, где $z = ab$.

2. $G = (A \times B)\lambda(w) = (Z \times A)\lambda(w)$, $z^w = z$, $a^w = b = aba^{-1} = za^{-1}$, $a^{w^2} = (za^{-1})^w = (za^{-1})^{-1} = zz^{-1}a = a$.

3. $G = (Z \times B)$, $z^w = z$, $b^w = a = abb^{-1} = zb^{-1}$.

4. Пусть $x \in (A \times B)$ и $|x| = 2^m$. Тогда $|xw| \leq 2^{m+1}$, $(xw)^2 \in Z$, в частности, если $x = a$, то $(aw)^2 = ab = z$, и если $x = b$, то $(bw)^2 = ab = z$.

5. $(aw)(bw) = abz^{-1} = ab^{-1}z$.

6. $(ab^{-1})^w = a^wb^{-1} = ba^{-1}$ и $R = \langle ab^{-1} \rangle \lambda(w)$ – группа диэдра.

7. Пусть $d = a^{2^m-1}b^l$ и $(l2) = 1$ $d^w = b^{2^m-1}a^l$, $dd^w = a^{2^m-1}b^l b^{2^m-1}a^l = a^{2^m}b^{2^m} = z^{2^m}$, $d^w = d^{-1}a^{2^m}b^{2^m} = d^{-1}z^{2^m}$, $|d| = 2^k$.

8. Если $m = k$ и $\langle d \rangle = \langle ab^{-1} \rangle$, тогда $\langle d \rangle \lambda(w) = \langle ab^{-1} \rangle \lambda(w) = R$ – группа диэдра.

9. Если $m = k-1$, то a^{2^m} – инволюция из A , b^{2^m} – инволюция из B и $a^{2^m}b^{2^m} = z_1$ – инволюция из $D \cap Z = \langle z_1 \rangle$. Тогда $dd^w = z_1$, $d^w = d^{-1}z_1$ и $D = \langle d \rangle \lambda(w)$ – полудиэдральная группа.

10. $N(\langle bw \rangle) = \langle bw \rangle \lambda z_b$, где z_b – инволюция из $\langle b \rangle$, $(bw)^{z_b} = bwz_1$.

11. $N(\langle aw \rangle) = \langle aw \rangle \lambda z_a$, где z_a – инволюция из $\langle a \rangle$, $(aw)^{z_a} = awz_1$.

12. Пусть $\langle c \rangle \times \langle d \rangle \subset G$. Если $|c| = |d| > 2$, тогда $\langle c \rangle \times \langle d \rangle \subseteq A \times B$.

13. Пусть $G_1 = (\langle c \rangle \times \langle d \rangle) \lambda(w_1)$, $c^{w_1} = d$, $w_1^2 = e$ и $G_1 \subset G$. Тогда имеет место одно из следующих утверждений:

1) $G_1 = (\langle c_1 \rangle \times \langle d_1 \rangle) \lambda(w_2)$, где $c_1^{w_2} = d_1$, $w_2^2 = e$ и $\langle c_1 \rangle \times \langle d_1 \rangle \subseteq A \times B$;

2) $G_1 = (\langle v \rangle \lambda(w_3))$, где $|v| = 4, v \in A \times B$, $w_3^2 = e$, $v^{w_3} = v^{-1}$.

Доказательство пункта 12. Предположим, что $\langle c \rangle \times \langle d \rangle \leq A \times B$. Тогда для некоторого $x \in (\langle c \rangle \times \langle d \rangle)$, $x = uw$, где $u \in A \times B$. Ясно, что для любого $v \in (A \times B) \cap (\langle c \rangle \times \langle d \rangle)$, $vx = xv$. Следовательно $vuw = uuvw = uvwv$, $uvw = uvwv$, $vw = wv$ и $v \in Z$. Следовательно, $(A \times B) \cap (\langle c \rangle \times \langle d \rangle) \subseteq Z$. Так как Z – циклическая группа, то и $(A \times B) \cap (\langle c \rangle \times \langle d \rangle)$ – циклическая группа, а это не так, в силу условия $|c| > 2$. Противоречие. Пункт доказан.

Доказательство пункта 13. Поскольку $x^2 = e$, то $y^w = y^{-1}$. Если $w_1 \in (A \times B)$, то $(\langle c \rangle \times \langle d \rangle) \lambda(w_1) = (\langle z_1 \rangle \times \langle x \rangle) \lambda(w_1) = (\langle z_1 \rangle \times \langle w_1 \rangle) \lambda(x)$, положив $w_1^x = c_1$, $w_1 = d_1$, $x = w_2$, получаем пункт 1 предложения 12.

Пусть $w_1 \notin (A \times B)$. Тогда $w_1 = vw$ для некоторого $v \in (A \times B)$. Посчитаем $w_1x = vwuw = vy^{-1} \in (A \times B)$. Очевидно, $vy^{-1} \neq e$, так как в противном случае $v = y$ и $x = w$, что невозможно по условию. Если $|vy^{-1}| = 2$, то $vy^{-1} = z_1, v = yz_1, vw = z_1uw, w_1 = z_1x$, что невозможно. Итак, $vy^{-1} > 2$, значит $|vy^{-1}| = 4$.

Положив $v = w_1x$ и $w_3 = w_1$, получаем утверждение 2 предложения 13. Предложение доказано.

Предложение 4. В $GL_2(p^n)$, где p – нечетно, нет подгрупп, изоморфных A_4 .

Доказательство. Предположим обратное: пусть $H \subset GL_2(p^n)$ и $H \approx A_4$. Тогда $H = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \lambda(w)$, где $a^2 = b^2 = v^3 = e, a^v = ab$ [12; 13]. Возьмем инволюцию $z \in Z(GL_2(p^n))$. Если z лежит в H , то $\langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle z \rangle$ – подгруппа в $GL_2(p^n)$, что невозможно. Следовательно $z \notin H$, что противоречит структуре A . Предложение доказано.

Предложение 5. Пусть G – периодическая группа, c – инволюция из G , а b – элемент порядка 4 из G такие, что $cb^2 = b^2c$. Тогда $H = \langle c, b \rangle$ – конечная группа одного из следующих видов:

1) $H = \langle b \rangle \times \langle c \rangle$;

2) $H = \langle b \rangle \lambda(c)$ – группа диэдра;

3) $H = \langle d \rangle \lambda \langle c \rangle, d^c = b^2 d^{-1}, b^2 \in \langle d \rangle, |d| > 4, b = dc$ – полудиэдральная группа;

4) $H = (\langle d \rangle \times \langle b^2 \rangle) \lambda \langle c \rangle, d^c = d^{-1} b^2, b = dc, d^c = b^2 d^{-1}, |d| > 2$.

Доказательство. Рассмотрим фактор-группу $\bar{C} = C_G(b^2) / \langle b^2 \rangle$, а в ней подгруппу $\bar{H} = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$. Очевидно, $\bar{C}$ – периодическая группа и $\bar{H} = \langle \bar{d} \rangle \lambda \langle \bar{c} \rangle = \langle \bar{d} \rangle \lambda \langle \bar{b} \rangle$ – группа диэдра. Пусть $d = bc$. Тогда $H = (\langle b^2 \rangle \cdot \langle d \rangle) \lambda \langle c \rangle$ и либо $d^c = d^{-1}$, либо $d^c = d^{-1} b^2$ [14]. Если H – абелева группа, то H вида 1. Если H – неабелева и $|H| = 8$, то H вида 2. Пусть $H > 8$.

Если $d^c = d^{-1}$, то $d^c = cbcc = cb = c^{-1} b^{-1}$, $cb = c^{-1} b^{-1}$ и $b^2 = c^{-2} = e$. Противоречие с тем, что $|b| = 4$. Таким образом, $d^c = b^2 d^{-1}$, и если $b^2 \notin \langle d \rangle$, то $H = (\langle b^2 \rangle \times \langle d \rangle) \lambda \langle c \rangle$ (H – вида 3), а если $b^2 \in \langle d \rangle$, то $H = \langle d \rangle \lambda \langle c \rangle$ – полудиэдральная группа (H – вида 4). Предложение доказано.

Предложение 6. Пусть $\langle a \rangle$ – циклическая порядка 2^n и φ – изоморфизм порядка 2 группы $\langle a \rangle$. Тогда имеет место одно из следующих утверждений:

- 1) $\varphi(a) = a^{-1}$;
- 2) $\varphi(a) = a^{-1} z, z^2 = e$;
- 3) $\varphi(a) = az$.

Доказательство. Ясно, что для некоторого нечетного $l < 2^n$, $\varphi(a) = a^l$. Так как $\varphi^2(a) = a$, то $a^{l^2} = a$, $a^{l^2-1} = e$ и $(l^2 - 1) \equiv 0 \pmod{2^n}$. Запишем l в двоичной системе $l = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \dots + 2^{m_s} + 1$, где $1 \leq m_s < m_{s-1} < \dots < m_2 < m_1 < 2^n$.

Тогда $(e^2 - 1) = (e - 1)(e + 1) = 0 \pmod{2^n}$ и $(2^{n_1} + 2^{n_2} + \dots + 2^{n_s})(2^{m_1} + 2^{m_2} + \dots + 2^{m_s} + 2) \equiv 0 \pmod{2^n}$. Следовательно, $2^{n_s}(2^{m_1-n_s} + 2^{m_2-n_s} + \dots + 2^{m_{s-1}-n_s} + 1)2(2^{m_1-1} + 2^{m_2-1} + \dots + 2^{m_{s-1}-1} + 1) \equiv 0 \pmod{2^n}$. Если $n_s - 1 > 0$, то $(2^{m_1-n_s} + 2^{m_2-n_s} + \dots + 2^{m_{s-1}-n_s} + 1)$ – нечетное число и $(2^{m_1-1} + 2^{m_2-1} + \dots + 2^{m_{s-1}-1} + 1)$ – нечетное число. Отсюда вытекает, что $2^{n_s+1} = 2^n$, $n = n_s + 1$, $n_1 = n_s$, $l = 2^{n-1} + 1$. В этом случае $\varphi(a) = a^{2^{n-1}+1} = za$, где z – элемент порядка 2 из $\langle a \rangle$, т. е. имеет место утверждение 3.

Рассмотрим ситуацию, когда $n_s = 1$. Тогда $2^{n_s}(2^{m_1-1} + 2^{m_2-1} + \dots + 2^{m_{s-1}-1} + 1)2^2(2^{m_1-2} + 2^{m_2-2} + \dots + 2^{m_{s-2}-2} + 1) \equiv 0 \pmod{2^n}$.

Если $n_{s-1} - 2 > 0$, то, как и выше, $n_{s-1} > 2$, $2^3 = 2^n$, $n = 3$, $l = 2^2 + 2 + 1 = 7$ и противоречие с тем, что $n_{s-2} > 2$. Следовательно, $n_{s-1} = 2$, $S_1 = 2^{n-1}$. Действуя подобным образом, получаем, что $l = (2^{n_1} + 2^{n_1-1} + \dots + 2^2 + 2 + 1)$, $(e - 1)(e + 1) = 2a2^m$, где a – нечетное число, $2^m = (2^{n_1} + 2^{n_1-1} + \dots + 2^2 + 2 + 1) + 1 = e + 1$ и $2^{m+1} \equiv 0 \pmod{2^n}$. Следовательно, либо $m = n$, либо $m = n - 1$ и $m + 1 \geq n$.

По формуле геометрической прогрессии имеем $(2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1) + 1 = (2^n - 1) + 1 = 2^n$ в первом случае и $(2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1) + 1 = (2^{n-1} - 1) + 1 = 2^{n-1}$ во втором случае. Соответственно, либо $l = 2^{n-1} - 1$ и имеет место утверждение 2, либо $l = 2^n - 1$ и имеет место утверждение 1. Предложение доказано.

Доказательство теоремы. Если в G некоторая S конечна, то из предложений 1, 2 вытекает, что S одна из первых трех видов 1, 2, 3, и в этом случае теорема доказана.

В дальнейшем считаем, что S – бесконечная группа.

Лемма 1. Если S содержит подгруппу $D = \langle x \rangle \times \langle y \rangle \times \langle z \rangle$, где $x^2 = y^2 = z^2 = 1$, то S – элементарная абелева группа.

Доказательство. В силу предложения 4 и [14; 15] D вложена в бесконечную локально-конечную подгруппу I групп S .

Если I содержит элемент в порядке 4, то $\langle D, b \rangle$ – конечная 2-группа, которая по условию насыщенности является подгруппой группы D_1 , где D_1 – одна из следующих (предложение 6):

- 1) D_1 – конечная группа полудиэдра;
- 2) D_1 – конечная сплетенная 2-группа;
- 3) D_1 – элементарная абелева 2-группа

Но в первых двух случаях D_1 не может содержать подгруппу D , а в последнем – не может содержать элемент b .

Итак, I – элементарная абелева 2-группа, и можно считать I максимальной в указанном смысле ($D < I$).

Если $S = 1$, то все доказано. Предположим, что $x \in G \setminus I \neq \emptyset$. Покажем, что x можно выбрать так, что $xz = zx$ для некоторой инволюции $z \in I$.

Если $|x| = 2$, то группа $\langle x, z \rangle$ конечна для любой инволюции Z из I . Пусть t – инволюция из $Z(\langle x, z \rangle)$. Если $t \in I$, то положим $Z = t$. Если $t \notin I$, то положим $x = t$. Подгруппа $\langle z \rangle \times \langle x \rangle = K_1$, очевидно, не лежит в I и $K_1 \cap I = \langle z \rangle$. Возьмем в I инволюцию $t \neq z$. Ясно, что $tz = zt$.

Рассмотрим конечную подгруппу $\langle z, x, t \rangle$. Данные подгруппы, очевидно, не лежат в I и $\langle z, x, t \rangle \cap I \geq (\langle x \rangle \times \langle t \rangle)$. В силу леммы 1 в $\langle z, x, t \rangle$

существует элемент v такой, что $v \in N_G(\langle z \rangle \times \langle t \rangle) \setminus I$ и $v^2 \in I$. Тогда группа $K_2 = \langle v, z, x, t, t_1 \rangle$, где $t_1 \in I \setminus (\langle z \rangle \times \langle t \rangle)$, конечная 2-группа.

По условию насыщенности $K_2 \leq K_3 \in \mathfrak{M}(1)$. Так как K_2 содержит подгруппу $\langle t \rangle \times \langle t_1 \rangle \times \langle z \rangle$, то из структуры $\mathfrak{M}$ вытекает, что K_2 – элементарная абелева 2-группа. В силу произвольности t_1 как инволюции из I получим, что x перестановочен с любой инволюцией из I . Таким образом, $I \times \langle x \rangle$ – элементарная абелева 2-группа, что противоречит максимальности I как элементарной абелевой 2-группы.

Пусть $|x| = 4$. Возьмем $x_1 = x^2$. По доказанному выше $x_1 \in I$. В дальнейшем, дословно повторяя рассуждения для случая $|x| = 2$, получим, что $x \in K_2$ – элементарная абелева 2-группа. Противоречие с тем, что $|x| = 4$. Лемма доказана.

В дальнейшем будем считать, что G не содержит элементарных абелевых групп порядка более четырех.

Лемма 2. Если ранг $\tilde{S}$ равен 2, S^1 типа 5.

Доказательство. В этом случае $\tilde{S} = A \times B$, где A, B – локально-циклические группы. Возьмем в $\tilde{S}$ конечную подгруппу $R = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, где $a \in A, b \in B, |a| = |b| > 2$. По условию насыщенности $R \subset K \in \mathfrak{M}(1)$. Следовательно, $K \cong GL_2(p^n)$ и $p \neq 2$. Пусть S_K – силовская 2-подгруппа из K , содержащая R . По предложению 3 $S_K = (\langle c \rangle \times \langle d \rangle) \lambda w$ – сплетенная 2-группа, т. е. $|c| = |d| > 2$ и $c^w = d$. По предложению 4 $R \leq (\langle c \rangle \times \langle d \rangle)$ и $R^w = R$. Возьмем в $\tilde{S} \setminus R$ элемент y со свойством $y^2 \in R$. Очевидно, такой, в силу структуры $\tilde{S}$, найдется. Ясно, что $y \in C_G(R)$. Следовательно, группа $\langle R, y, w \rangle$ – конечна.

По условию насыщенности $\langle R, y, w \rangle \subset K_1 \in \mathfrak{M}(1)$ и $K_1 \cong GL_2(p_1^{n_1})$, где $p_1 \neq 2$. По предложению 5 $\langle R_1, y, w \rangle \subset N_{K_1}(R) = (\langle c_1 \rangle \times \langle d_1 \rangle) \lambda \langle w \rangle$ – сплетенная группа. Здесь $|c_1| = |d_1| = (p_1^{n_1} - 1)^2$ и $c_1^w = d_1$. Кроме того, $C_{K_1}(R) = (\langle c_1 \rangle \times \langle d_1 \rangle)$. В частности, отсюда вытекает, что $\langle y^w, y \rangle \leq (\langle c_1 \rangle \times \langle d_1 \rangle)$. Пусть y_1 – другой элемент из $\tilde{S} \setminus R$ со свойством $y_1^2 \in R$ и $\langle y_1 \rangle \neq \langle y \rangle$. Покажем, что $y_1 y^w = y^w y_1$. Действительно, $\langle R, y_1, y^w \rangle$ – конечная группа.

По условию насыщенности $\langle R, y_1, y^w \rangle \leq K_2 \in \mathfrak{M}(1), K_2 \cong GL_2(p_2^{n_2})$, где $p_2 \neq 2$. По предложению 5 $C_{K_2}(R) = (\langle c_2 \rangle \times \langle d_2 \rangle)$, где $|c_2| = |d_2| = (p_2^{n_2} - 1)^2$. Так

как $\langle R, y_1, y^w \rangle \leq C_{K_2}(R)$, то $y_1 y^w = y^w y_1$, что и требовалось.

Пусть Y – множество элементов из $\tilde{S} \setminus R$ со свойством, что для нового $y \in Y, y^2 \in R$. Ясно, что Y – конечное множество. Из сказанного выше получаем, что $\langle Y, Y^w \rangle$ – конечная абелева группа из $C_G(R)$, а $\langle R, Y, Y^w, w \rangle$ – конечная группа из $N_G(R)$. По условию насыщенности $\langle R, Y, Y^w, w \rangle \leq K_3 \in \mathfrak{M}(1)$,

$K_3 \cong GL_2(p_3^{n_3})$ и $p_3 \neq 2$. По предложению 5 $N_{K_3}(R) = (\langle c_3 \rangle \times \langle d_3 \rangle) \lambda \langle w \rangle, (\langle c_3 \rangle \times \langle d_3 \rangle) = C_{K_3}(R)$ и $\langle R, Y, Y^w \rangle \leq C_{K_3}(R)$. Положим, $R_1 = \tilde{S} \cap (\langle c_3 \rangle \times \langle d_3 \rangle)$.

По построению $R < R_1 = (\langle v_1 \rangle \times \langle u_1 \rangle)$, где $\langle v \rangle < A, \langle u \rangle < B$ и $v_1^w = u_1$. Действуя по описанному выше алгоритму, мы строим цепочку подгрупп $\tilde{S}$

$$R < R_1 < R_2 < \dots < R_i < \dots$$

со следующими свойствами

- 1) $R_i = (\langle u_i \rangle \times \langle v_i \rangle)$;
- 2) $v_i^w = u_i$.

Так как $\tilde{S}$ полная 2-группа ранга 2, то очевидно $R_i = \tilde{S}$ и $w \in N(\tilde{S})$.

Осталось показать, что $\tilde{S} \lambda \langle w \rangle = S$. Рассмотрим $N_G(\tilde{S}) / \bar{S} = \bar{N}$. Очевидно в $\bar{N}$ силовская 2-подгруппа конечна, а значит все силовские 2-подгруппы из N конечны и сопряжены. Поэтому с точностью до сопряженности можно считать, что $\tilde{S} \lambda \langle w \rangle \leq \bar{S}^x$, а значит $\tilde{S} \lambda \langle w \rangle \leq S^x$ для некоторого $x \in N_G(\tilde{S})$. Это означает, что $S = \tilde{S} \langle y \rangle$ и $y^2 \in \tilde{S}$. Из предложения 5 получаем, что $y \in \tilde{S} \lambda \langle w \rangle$. Следовательно, $\tilde{S} \lambda \langle w \rangle = S$. Лемма доказана.

Лемма 3. Если S содержит подгруппу $((\langle a_n \rangle \times \langle b_n \rangle) \lambda \langle w_n \rangle) \subset S$, где $|a_n| = |b_n| > 2$, $a_n^{w_n} = b_n$ и $w_n^2 = e$, то S типа 5.

Доказательство. Положим, $D_n = (\langle a_n \rangle \times \langle b_n \rangle) \times \lambda \langle w_n \rangle$. Если S содержит бесконечную цепочку

$$D_1 < D_2 < \dots < D_n < \dots, \quad (1)$$

то очевидно S насыщена конечными сплетенными 2-группами по предложению 2 S типа 5.

Предположим, что бесконечных цепочек типа (1) в S нет. Пусть D_n – максимальная конечно-сплетенная 2-группа из S . Пусть $(\langle a_n \rangle \times \langle b_n \rangle) = R_n$.

Покажем, что R_n нормальная подгруппа S . Возьмем $s \in S \setminus D_n$ и $s \in N_S \setminus D$. По условию насыщенности конечная группа $\langle D_n, s \rangle \subset K \subset G$ и $K \cong GL_2(p^n)$, где

$p \neq 2$. Более того, $\langle D_n, S \rangle \subset S_K \in \text{Syl}_2 K$. По предположению 1 S_K сплетенная 2-группа и $R_n \trianglelefteq S_K$ и $S \in N(R)$. Пусть $D_n^1 = S_K \cap S$. Возьмем $S_2 \in N_S(D_n^1)$. Повторяя проведенные выше рассуждения, показывают, что $S_2 \in N_S(R_n)$. Действуя подобным образом, получаем, что $N_S(R_n)$ бесконечная группа. Таким образом $\tilde{S} \subset N(R_n)$, а поскольку $S = \tilde{S}D_n$, то $S = N_S(R_n)$.

Пусть s такой элемент из $\tilde{S}$, что $s^2 \in R_n$. Тогда $\langle D_n, s, x \rangle$ конечная группа и по условию насыщенности $\langle D_n, s, x \rangle \subset K \cong GL_2(p^n)$, где $p \neq 2$. По предположению 3 $s \in C_k(R_n)$, т. е. $xs = sx$. Используя индукцию по $|S|$, получим что $\tilde{S} \subset C_G(x)$ и $\langle \tilde{S}, x \rangle$ абелева группа. Пусть теперь $|x| > 2$ и $\langle \tilde{S}_n^2, x^2 \rangle$ абелева группа. Рассмотрим конечную группу $\langle R_n, x, S \rangle$, где $s \in \langle R_n, x^2 \rangle$, тогда $\langle R_n, x, S \rangle$ – конечная группа. И по условию насыщенности получим, что $\langle R_n, x, S \rangle \subset K \cong GL_2(p^n)$, где $p \neq 2$. По предложению 3 $\langle R_n, x, S \rangle \subset C_k(R_n)$ и значит $\langle R_n, x, S \rangle$ – абелева группа. Далее, используя индукцию по $|S|$, получим, что $\langle \tilde{S}, R_n, x \rangle$ – абелева группа. Теперь перейдем к индукции по $|x|$ и получим, что $\langle \tilde{S}, R_n, x \rangle$ абелева 2-группа и значит, по предложению 4, $C_{G_2}(R_n) = \tilde{S}_1$ – абелева 2-подгруппа и $\tilde{S}K \subset \tilde{S}_1K$. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть S не содержит подгруппу $D_n = (\langle a_n \rangle \times \langle b_n \rangle) \lambda \langle w_n \rangle$ с условием $|a_n| = |b_n| > 2$. Тогда S типа 6.

Доказательство. Очевидно в этом случае полная часть $\tilde{S}$ группы S квазициклическая 2-группа. Положим $\tilde{S} = A$. Тогда S/A – конечная 2-группа, и пусть K – ее минимальный по порядку прообраз в S . Тогда $S = AK$ и K – конечная подгруппа из группы диэдра порядка 8. Лемма доказана.

Заключение. Пусть периодическая группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{M}$. Тогда силовская 2-подгруппа S группы G одна из следующих:

$$1. S = \langle a^{2^n} = v^2 = 1, a^v = a^{2^{n-1}-1} \rangle - \text{полуциклическая}$$

группа и $|S| = 2^{n+1}$.

$$2. S = \langle a, w \mid a^{2^n} = b^{2^n} = w^2 = e, a^w = b, ab = ba \rangle -$$

сплетенная 2-группа и $|S| = 2^{n+2}$.

3. S – конечная элементарная абелева 2-группа.

4. S – бесконечная элементарная абелева 2-группа.

5. $S = \tilde{S}K$, где $\tilde{S}$ – полная 2-группа 2 ранга не более 2, K – конечная 2-группа, изоморфная некоторой подгруппе группы диэдра порядка 8.

6. В G существует силовская 2-подгруппа $S = (A \times B)\lambda(w)$, где A – бесконечная локальноциклическая 2-группа, $w^2 = e$; $A^w = B$.

Библиографические ссылки

1. Шлепкин А. К. Сопряженно бипримитивно-конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы // сб. тез. 3-й Междунар. конф. по алгебре. Красноярск, 1993. С. 396.
2. Кузнецов А. А., Филиппов К. А. Группы, насыщенные заданным множеством групп // Сибирские электронные математические известия. 2011. Т. 8. С. 230–246.
3. Рубашкин А. Г., Филиппов К. А. О периодических группах, насыщенных группами $L_2(p^n)$ // Сиб. матем. журн. 2005. Т. 46, № 6. С. 1388–1392.
4. Адаян С. И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука. 1975.
5. Шлепкин А. А. О группах насыщенных $GL_2(p^n)$ // Вестник СибГАУ. 2013. Том 1. С. 100–108.
6. Шлепкин А. А. Периодические группы, насыщенные сплетенными группами // Сибирские электронные математические известия. 2013. Т. 10. С. 56–64.
7. Шлепкин А. А., Сабодих И. В. О группах Шункова, насыщенных $GL_2(p^n)$ // Сибирские электронные математические известия. 2014. № 11. С. 734–744.
8. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука. 1977.
9. Шунков В. П. M_p -группы. М.: Наука. 1990.
10. Шунков В. П. Об одном классе групп // Алгебра и логика. 1970. № 4. С. 484–496.
11. Шунков В. П. О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. № 4. С. 470–494.
12. Dichson L. Linear groups. Leipzig: B. C. Neubner, 1901.
13. Garter R. W. Simple groups of Lie type. London: John Wiley & Sons, 1972.
14. Группы с условием насыщенности / А. А. Кузнецов [и др.] / КрасГАУ. Красноярск. 2010. С. 254.
15. Дуж А. А., Шлепкин А. А. О группах Шункова, насыщенных прямыми произведениями групп // Владикавказский математический журнал. 2012. № 12. С. 123–126.

References

1. Shlepkin A. K. [Conjugate apimitive finite groups containing a finite insoluble subgroup] *Sb. tez. 3-ya mezhduunar. konf. po algebre* [Sat. mes. 3rd Intern. Conf. Algebra]. Krasnoyarsk, 1993, p. 396 (In Russ.).
2. Kuznetsov A. A., Filippov K. A. [Group, saturated specified set of groups]. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya*. 2011, vol. 8, p. 230–246. (In Russ.).
3. Rubashkin A., Filippov K. A. [On periodic groups saturated groups $L_2(p^n)$]. *Sib. matem. zhurn.* 2005, vol. 46, no. 6, p. 1388–1392 (In Russ.).

4. Adan S. I. *Problema Berncaida i togdestva v grup-pakh* [The Burnside problem and identities in groups]. Science, 1975.
5. Shlepkin A. A. [About the saturated groups $GL_2(p^n)$]. *Vestnik SibGAU*. 2013, no. 1 (47), p. 100–108 (In Russ.).
6. Shlepkin A. A. [Periodic groups saturated woven groups]. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya*. 2013, vol. 10, p. 56–64 (In Russ.).
7. Shlepkin A. A., Subodah I. V. [About groups Shunkov saturated $GL_2(p^n)$]. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya*. 2014, vol. 11, p. 734–744 (In Russ.).
8. Kargapolov M. I., Merzlyakov Y. I. *Osnov teorii grupp* [Fundamentals of group theory]. Moscow, Nauka Publ., 1977.
9. Shunkov V. P. M_p -*grupp* [M_p -group]. Moscow, Nauka Publ., 1990.
10. Shunkov V. P. [One class of groups]. *Algebra i logika*. 1970, vol. 4, p. 484–496 (In Russ.).
11. Shunkov V. P. [Of periodic groups with an almost regular involution]. *Algebra i logika*. 1972, vol. 4, p. 470–494 (In Russ.).
12. Dichson L. *Linear groups*. Leipzig B. C. Neubner. 1901.
13. Garter R. W. *Simple groups of Lie type*. London: John Wiley & Sons. 1972.
14. Kuznetsov A. A., Lytkina D. V., Tukhvatullin L. R., Filippov K. A. *Gruppy s usloviem nasyschennosti*. [Group with the condition of saturation]. Krasnoyarsk, 2010, 254 p.
15. Duzh A. A., Shlepkin A. A. [Groups Shunkov, saturated direct products of groups]. *Vladikavkazskii matematicheskii zhurnal*. 2012, vol. 12, p. 123–126 (In Russ.).