УДК 519.632

ПРИМЕНЕНИЕ ЭРМИТОВОГО БИКВАДРАТНОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

В. В. Шайдуров[1, 3], С. В. Шуть[2]

[1] Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660014, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31
[2]Сибирский федеральный университет
Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79
E-mail: seshoot@mail.ru
[3]Институт вычислительного моделирования СО РАН
Российская Федерация, 660036, г. Красноярск, Академгородок, 50/44
E-mail: shaidurov04@mail.ru

Предложен новый тип эрмитового конечного элемента на прямоугольнике, промежуточный между билинейным и бикубическим конечными элементами. Применение этого биквадратного элемента дает меньшее число неизвестных и уравнений дискретных алгебраических систем по сравнению с лагранжевым элементом той же степени. Теоретическое заключение об эффективности проиллюстрировано его использованием при решении краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка, где достигнут второй порядок точности приближенного решения в энергетической норме и четвертый порядок в дискретной среднеквадратичной норме на равномерной сетке.

Ключевые слова: метод конечных элементов, эрмитовы и лагранжевы конечные элементы, число степеней свободы, порядок аппроксимации, порядок сходимости.

APPLICATION OF HERMITIAN BIQUADRATIC FINITE ELEMENT

V. V. Shaydurov[1, 3], S. V. Shut[2]

[1]Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev
31, Krasnoyarsky Rabochy Av., Krasnoyarsk, 660014, Russian Federation
[2]Siberian Federal University
79, Svobodny prosp., Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation
E-mail: seshoot@mail.ru
[1]Institute of Computational Modeling of Siberian Branch of Russian Academy of Science
50/44, Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation
E-mail: shaidurov04@mail.ru

A new type of Hermitian finite element on rectangle is presented which is intermediate between bilinear and bicubic finite elements. The use of this biquadratic element gives less number of unknowns and equations of discrete algebraic systems in comparison with the Lagrangian element of the same degree. The theoretical conclusion of its effectiveness is illustrated by using this finite element for solving boundary value problem for second-order elliptic equation where the second order of accuracy was achieved for approximate solution in the energy norm and the fourth order of accuracy in mean-value norm on uniform mesh.

Keywords: finite element method, Hermitian and Lagrangian finite elements, number of degrees of freedom, order of approximation, order of convergence.

Билинейные конечные элементы на прямоугольниках давно и успешно используются для решения двумерных стационарных и нестационарных задач [1–3]. С помощью аффинных, изопараметрических и других преобразований область их применения расширена до широкого круга двумерных областей, в том числе с криволинейной границей [1; 3–6]. Однако точность аппроксимации этими конечными элементами невысока: второй порядок в L_2-норме и только первый в H^1-норме. Поэтому интенсивно развились конечные элементы с базисными функциями-многочленами более высокой степени, обеспечивающими и более высокий порядок аппроксимации.

Причем развитие шло в направлении как лагранжевых, так и эрмитовых элементов. Сопоставление двух типов элементов дает основание утверждать о бóльшей эффективности эрмитовых элементов по сравнению с лагранжевыми элементами ввиду меньшей размерности порождаемых систем дискретных алгебраических уравнений при равных свойствах аппроксимации [7]. Более того, для некоторых эрмитовых элементов достигнута не только межэлементная непрерывность, но и межэлементная C^1-гладкость, включающая непрерывность первых (частных) производных [1; 8; 9].

Поэтому повышение интереса к эрмитовым конечным элементам остается актуальным. Вместе с тем описанная в литературе линейка эрмитовых элементов начинается с бикубических элементов и продолжается только по нечетным степеням.

В этой статье мы опишем двумерный эрмитов элемент второй степени на прямоугольнике, начинающий линейку эрмитовых конечных элементов.

Описание элемента. Сначала, используя терминологию работ [1; 2], построим референтный элемент $(\hat{e}, P_{\hat{e}}, \Sigma_{\hat{e}})$ как тройку, состоящую из ячейки $\hat{e}$, пространства функций $P_{\hat{e}}$ и множества степеней свободы $\Sigma_{\hat{e}}$. В качестве референтной ячейки возьмем единичный квадрат $\hat{e}=[0,1]\times[0,1]$ с четырьмя вершинами $\hat{a}_1=(1,1)$, $\hat{a}_2=(1,0)$, $\hat{a}_3=(0,0)$, $\hat{a}_4=(0,1)$ (рис. 1).

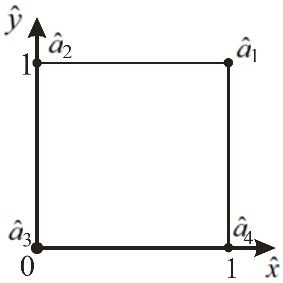

Рис. 1. Референтная ячейка

Мы определим пространство функций $P_{\hat{e}}$ как линейную оболочку восьми полиномиальных одночленов:

$$P_{\hat{e}}=\operatorname{span}\left\{1,\ \hat{x},\ \hat{y},\ \hat{x}^2,\ \hat{x}\hat{y},\ \hat{y}^2,\ \hat{x}^2\hat{y},\ \hat{x}\hat{y}^2\right\}, \qquad (1)$$

а множество степеней свободы $\Sigma_{\hat{e}}$ складывается из значения функции и одной из частных производных в каждой вершине квадрата:

$$\Sigma_{\hat{e}}=\Big\{\hat{\psi}_{i,1}(\hat{p})=\hat{p}(\hat{a}_i),\ i=1,\dots,4,$$
$$\hat{\psi}_{i,2}(\hat{p})=\partial\hat{p}(\hat{a}_i)/\partial\hat{x},\ i=1,3, \qquad (2)$$
$$\hat{\psi}_{i,2}(\hat{p})=\partial\hat{p}(\hat{a}_i)/\partial\hat{y},\ i=2,4,\ \hat{p}\in P_{\hat{e}}\Big\}.$$

Отметим, что каждой вершине соответствуют две степени свободы, но направления производных различны в вершинах с четными и нечетными номерами. Покажем, что этот набор действительно является корректным конечным элементом в смысле монографии [1].

Лемма 1 . Тройка $(\hat{e}, P_{\hat{e}}, \Sigma_{\hat{e}})$ представляет собой конечный элемент.

Доказательство. Размерность пространства $P_{\hat{e}}$ совпадает с количеством элементов множества $\Sigma_{\hat{e}}$. Поэтому для доказательства унисольвентности (однозначной разрешимости) пары $(P_{\hat{e}}, \Sigma_{\hat{e}})$ достаточно построить базис Лагранжа $\left\{\hat{\varphi}_{i,j}(\hat{x},\hat{y})\in P_{\hat{e}},\ j=1,2,\ i=1,\dots,4\right\}$ на $\hat{e}$, удовлетворяющий условию [1]

$$\hat{\psi}_{i,j}(\hat{\varphi}_{k,l})=\delta_{i,k}\delta_{j,l}, \qquad (3)$$

где $\delta_{i,k}$ – символ Кронекера.

Прямая проверка показывает, что базис Лагранжа имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\hat{\varphi}_{1,1}=\hat{x}\hat{y}(1-\hat{x}+\hat{y}), &&\hat{\varphi}_{1,2}=\hat{x}\hat{y}(\hat{x}-1),\\
&\hat{\varphi}_{2,1}=\hat{x}(1-\hat{y})(\hat{x}+\hat{y}), &&\hat{\varphi}_{2,2}=\hat{x}\hat{y}(1-\hat{y}),\\
&\hat{\varphi}_{3,1}=(1-\hat{x})(1-\hat{y})(1+\hat{x}-\hat{y}), &&\hat{\varphi}_{3,2}=\hat{x}(1-\hat{x})(1-\hat{y}),\\
&\hat{\varphi}_{4,1}=(1-\hat{x})\hat{y}(2-\hat{x}-\hat{y}), &&\hat{\varphi}_{4,2}=(1-\hat{x})\hat{y}(\hat{y}-1).
\end{aligned} \qquad (4)$$

Для проверки интерполяционных свойств этого элемента используем обычные обозначения для пространств Соболева. Пусть $L_2(\Omega)$ – гильбертово пространство функций, измеримых по Лебегу в области Ω, со скалярным произведением

$$(u,v)_\Omega=\int_\Omega u\,v\,d\Omega,\quad u,v\in L_2(\Omega)$$

и конечной нормой

$$\|u\|_{0,\Omega}=(u,u)_\Omega^{1/2},\quad u\in L_2(\Omega).$$

Для целого неотрицательного k обозначим через $H^k(\Omega)$ гильбертово пространство множества функций $u\in L_2(\Omega)$, слабые производные которых тоже принадлежат $L_2(\Omega)$ до порядка k включительно. Норма в этом пространстве определяется формулой

$$\|u\|_{k,\Omega}=\left(\sum_{0\le s+r\le k}\left|\frac{\partial^{s+r}u}{\partial x_1^s\,\partial x_2^r}\right|_{0,\Omega}^2\right)^{1/2}. \qquad (5)$$

Введем также полезную полунорму

$$|u|_{k,\Omega}=\left(\sum_{s+r=k}\left|\frac{\partial^{s+r}u}{\partial x_1^s\,\partial x_2^r}\right|_{0,\Omega}^2\right)^{1/2},\quad u\in H^k(\Omega).$$

Пусть $\hat{u}$ – произвольная функция из $H^3(\hat{e})$. По теореме вложения пространств Соболева $H^3(\hat{e})$ непрерывно вложено в $C^1(\hat{e})$ [10], поэтому $\hat{u}\in C^1(\hat{e})$. В итоге мы можем построить интерполянт $\hat{u}_I\in P_{\hat{e}}$:

$$\hat{u}_I(\hat{x}_1,\hat{x}_2)=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{2}\hat{\psi}_{i,j}(\hat{u})\hat{\varphi}_{i,j}(\hat{x}_1,\hat{x}_2).$$

Теорема 1. Пусть $\hat{u}\in H^3(\hat{e})$. Тогда для любого целого $m\le 3$ справедлива оценка

$$\left|\hat{u}-\hat{u}_I\right|_{m,\hat{e}}\le c_1\left|\hat{u}\right|_{3,\hat{e}} \qquad (6)$$

с константой c_1, не зависящей от $\hat{u}$.

Доказательство. Максимальный порядок частных производных в определении множества $\Sigma_{\hat{e}}$ равен единице. А как уже упоминалось, пространство $H^3(\hat{e})$ вложено в $C^1(\hat{e})$. Кроме того, из (1) следует, что $P_{\hat{e}} \supset P_2(\hat{e})$, где $P_2(\hat{e})$ – пространство многочленов суммарной степени не выше двух. Таким образом, выполнены все условия теоремы 3.1.5 в монографии [1], из которой и следует оценка (6).

К этому конечному элементу возможно применение аффинных и изопараметрических преобразований для аппроксимации границы области [1]. Поскольку вдоль границы ячейки базисные функции являются квадратичными, то они предоставляют возможность более точной аппроксимации границы, чем билинейные или линейные элементы.

Вместе с тем из-за неоднородности степеней свободы для этого элемента полезно использовать еще одно простое преобразование. Для иллюстрации его необходимости рассмотрим разбиение области $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ на элементарные квадратные ячейки (рис. 2), проведя два семейства параллельных прямых $x_i = ih$, $i = 1, ..., n-1$, и $y_j = jh$, $j = 1, ..., n-1$, с шагом $h = 1/n$.

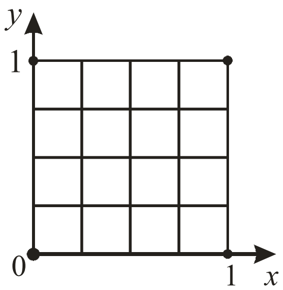

Рис. 2. Разбиение прямоугольника на элементарные ячейки

Обычное преобразование референтного элемента на элементарную ячейку выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x = x_i + h\hat{x}, \\ y = y_j + h\hat{y}. \end{cases} \quad (7)$$

Рассмотрим две соседние элементарные ячейки в разбиении исходной геометрической области (рис. 3). При использовании преобразования вида (7) (рис. 3, *а*) получается рассогласование степеней свободы в общих узлах соседних элементов. В принципе, можно ввести формулы пересчета производных из одного элемента в другой. Но это усложнит реализацию метода. Поэтому мы введем еще одно простое преобразование:

$$\begin{cases} x = x_i + h\hat{y}, \\ y = y_j + h\hat{x}. \end{cases} \quad (8)$$

Применяя его в одном из соседних элементов, мы получим совпадение степеней свободы в узлах сетки (рис. 3, *б*).

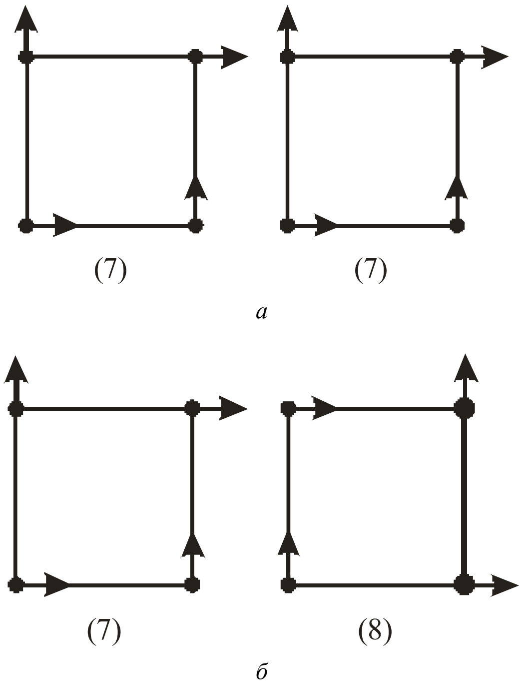

Рис. 3. Соседние ячейки с одинаковыми и разными преобразованиями: *а* – одинаковые преобразования; *б* – разные преобразования

Итак, предложенный эрмитов биквадратный конечный элемент имеет 8 степеней свободы в каждой элементарной ячейке, а каждому узлу (x_i, y_j) соответствует комбинация всего двух базисных функций $\varphi_{i,j}$ и $\psi_{i,j}$, которые строятся следующим образом.

Базисная функция $\varphi_{i,j}$ принимает значение 1 в узле (x_i, y_j) и 0 в других узлах сетки так же, как и ее производные $\partial\varphi_{i,j}(x_k, y_l)/\partial x = 0$ в узлах с четной комбинацией $k+l$ и $\partial\varphi_{i,j}(x_k, y_l)/\partial y = 0$ в узлах с нечетной комбинацией $k+l$.

Базисная функция $\psi_{i,j}$ равна нулю во всех узлах сетки. Но при четной сумме $i+j$ ее производная по x $\partial\psi_{i,j}(x_k, y_l)/\partial x$ принимает значение 1, если $k = i$ и $l = j$, и 0 во всех остальных узлах с четной суммой $k+l$, а ее производная по y $\partial\psi_{i,j}(x_k, y_l)/\partial y$ обращается в нуль во всех узлах с нечетной суммой $k+l$. А при нечетной сумме $i+j$ ее производная по y $\partial\psi_{i,j}(x_k, y_l)/\partial y$ принимает значение 1, если $k = i$ и $l = j$, и 0 во всех остальных узлах с нечетной суммой $k+l$, а ее производная по x $\partial\psi_{i,j}(x_k, y_l)/\partial x$ обращается в нуль во всех узлах с четной суммой $k+l$. В итоге базисные функции имеют следующий вид. Для узла с четной комбинацией индексов $i+j$

$$
\varphi_{i,j}^{sh}=\begin{cases}
\left(x_{i+1}-x\right)\left(y_{j+1}-y\right)\left(h_y\left(x-x_i\right)+h_x\left(y_{j+1}-y\right)\right)\Big/h_x^2h_y^2 & \text{при } (x,y)\in\left[x_i,x_{i+1}\right]\times\left[y_j,y_{j+1}\right],\\
\left(x-x_{i-1}\right)\left(y_{j+1}-y\right)\left(h_y(x_i-x)+h_x\left(y_{j+1}-y\right)\right)\Big/h_x^2h_y^2 & \text{при } (x,y)\in\left[x_{i-1},x_i\right]\times\left[y_j,y_{j+1}\right],\\
\left(x_{i+1}-x\right)\left(y-y_{j-1}\right)\left(h_y(x-x_i)+h_x\left(y-y_{j-1}\right)\right)\Big/h_x^2h_y^2 & \text{при } (x,y)\in\left[x_i,x_{i+1}\right]\times\left[y_{j-1},y_j\right],\\
\left(x-x_{i-1}\right)\left(y-y_{j-1}\right)\left(h_y\left(x_i-x\right)+h_x\left(y-y_{j-1}\right)\right)\Big/h_x^2h_y^2 & \text{при } (x,y)\in\left[x_{i-1},x_i\right]\times\left[y_{j-1},y_j\right],\\
0 & \text{иначе;}
\end{cases}\tag{9}
$$

$$
\psi_{i,j}^{sh}=\begin{cases}
(x-x_i)(x_{i+1}-x)(y_{j+1}-y)\big/h_xh_y & \text{при } (x,y)\in\left[x_i,x_{i+1}\right]\times\left[y_j,y_{j+1}\right],\\
(x-x_i)(x-x_{i-1})(y_{j+1}-y)\big/h_xh_y & \text{при } (x,y)\in\left[x_{i-1},x_i\right]\times\left[y_j,y_{j+1}\right],\\
(x-x_i)(x_{i+1}-x)(y-y_{j-1})\big/h_xh_y & \text{при } (x,y)\in\left[x_i,x_{i+1}\right]\times\left[y_{j-1},y_j\right],\\
(x-x_i)(x-x_{i-1})(y-y_{j-1})\big/h_xh_y & \text{при } (x,y)\in\left[x_{i-1},x_i\right]\times\left[y_{j-1},y_j\right],\\
0 & \text{иначе;}
\end{cases}\tag{10}
$$

а для узла с нечетной комбинацией индексов $i+j$

$$
\varphi_{i,j}^{sh}=\begin{cases}
(x_{i+1}-x)(y_{j+1}-y)(h_y(x_i-x)+h_x(y-y_{j-1}))\big/h_x^2h_y^2 & \text{при } (x,y)\in\left[x_i,x_{i+1}\right]\times\left[y_j,y_{j+1}\right],\\
(x-x_{i-1})(y_{j+1}-y)(h_y(x-x_i)+h_x(y-y_{j-1}))\big/h_x^2h_y^2 & \text{при } (x,y)\in\left[x_{i-1},x_i\right]\times\left[y_j,y_{j+1}\right],\\
(x_{i+1}-x)(y-y_{j-1})(h_y(x_i-x)+h_x(y_{j+1}-y))\big/h_x^2h_y^2 & \text{при } (x,y)\in\left[x_i,x_{i+1}\right]\times\left[y_{j-1},y_j\right],\\
(x-x_{i-1})(y-y_{j-1})(h_y(x-x_i)+h_x(y_{j+1}-y))\big/h_x^2h_y^2 & \text{при } (x,y)\in\left[x_{i-1},x_i\right]\times\left[y_{j-1},y_j\right],\\
0 & \text{иначе;}
\end{cases}\tag{11}
$$

$$
\psi_{ij}^{sh}=\begin{cases}
(y-y_j)(x_{i+1}-x)(y_{j+1}-y)\big/h_xh_y & \text{при } (x,y)\in\left[x_i,x_{i+1}\right]\times\left[y_j,y_{j+1}\right],\\
(y-y_j)(x-x_{i-1})(y_{j+1}-y)\big/h_xh_y & \text{при } (x,y)\in\left[x_{i-1},x_i\right]\times\left[y_j,y_{j+1}\right],\\
(y-y_j)(x_{i+1}-x)(y-y_{j-1})\big/h_xh_y & \text{при } (x,y)\in\left[x_i,x_{i+1}\right]\times\left[y_{j-1},y_j\right],\\
(y-y_j)(x-x_{i-1})(y-y_{j-1})\big/h_xh_y & \text{при } (x,y)\in\left[x_{i-1},x_i\right]\times\left[y_{j-1},y_j\right],\\
0 & \text{иначе.}
\end{cases}\tag{12}
$$

Численный пример. Проиллюстрируем свойства предлагаемого конечного элемента на следующем примере. Пусть $\Omega=(0,1)\times(0,1)$ – квадрат (см. рис. 2) с границей Г. Рассмотрим краевую задачу

$$
-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)=f \quad \text{в } \Omega,
$$

$$
u(x,y)=\begin{cases}
0 \ \text{при } x=0,\\
0 \ \text{при } y=0,\\
-y\sin y \ \text{ при } x=1,\\
-x\sin x \ \text{ при y} =1,
\end{cases} \quad \text{на } \Gamma
$$

с правой частью

$$
f(x,y)=2\left(x+x^2+y+3xy+y^2\right)\cos\left(1-x-y\right)+
$$
$$
+\left(-y+2x^2y+x\left(-1+2y+2y^2\right)\right)\sin\left(1-x-y\right)
$$

и коэффициентом $\mu(x,y)=x+y+1$. Точным решением этой задачи является функция

$$
u(x,y)=xy\sin\ (1-x-y).
$$

Разделим область Ω на элементарные квадраты, проведя два семейства параллельных прямых $x_i=ih$, $i=1,\ ...,\ n-1$, и $y_j=jh$, $j=1,\ ...,\ n-1$, с шагом $h=1/n$.

Для выяснения порядка точности при уменьшении размера сетки построим систему линейных алгебраических уравнений методом конечных элементов с использованием базисных функций (9)–(12) для $n=10,20,40$. Поскольку точное решение априори известно, то разность $u-u_h$ между точным и приближенным решением можно выразить в явном виде. Рассмотрим следующие нормы – дискретные аналоги норм в L_2 и H^1:

$$
\left\|u-u^h\right\|_{0,h}^2=\sum_{1\le i\le n-1,\ 1\le j\le n-1}\left(u(x_i,y_j)-u^h(x_i,y_j)\right)^2h^2,
$$

$$
\left\|u-u^h\right\|_{1,h}^2=\sum_{1\le i\le n-1,\ 1\le j\le n-1}\left(u(x_i,y_j)-u^h(x_i,y_j)\right)^2h^2+
$$
$$
+\sum_{\substack{1\le i\le n-1,\ 1\le j\le n-1\\ i+j-\text{четные}}}\left(\partial u/\partial x(x_i,y_j)-\partial u^h/\partial x(x_i,y_j)\right)^2 2h^2+
$$
$$
+\sum_{\substack{1\le i\le n-1,\ 1\le j\le n-1\\ i+j-\text{нечетные}}}\left(\partial u/\partial y(x_i,y_j)-\partial u^h/\partial y(x_i,y_j)\right)^2 2h^2.
$$

Напомним, что используемые в них значения производных совпадают со степенями свободы и не требуют дополнительных вычислений или аппроксимаций.

Точность приближенного решения

<table>
<tr><th>h</th><th>$\delta_h = \|u-u^h\|_{0,h}$</th><th>$\sigma_h = \|u-u^h\|_{1,h}$</th><th>$\delta_{2h}/\delta_h$</th><th>$\sigma_{2h}/\sigma_h$</th><th>$\log_2(\delta_{2h}/\delta_h)$</th><th>$\log_2(\sigma_{2h}/\sigma_h)$</th></tr>
<tr><td>0,1</td><td>$1{,}15\times10^{-6}$</td><td>0,00084</td><td rowspan="3">14,7
15,4</td><td rowspan="3">3,5
3,7</td><td rowspan="3">3,88
3,94</td><td rowspan="3">1,8
1,9</td></tr>
<tr><td>0,05</td><td>$7{,}8\times10^{-8}$</td><td>0,00024</td></tr>
<tr><td>0,025</td><td>$5{,}07\times10^{-9}$</td><td>$6{,}48\times10^{-5}$</td></tr>
</table>

Отметим, что с теоретической точки зрения для достаточно гладкого решения задачи гарантируются следующие порядки точности.

Теорема 2. Пусть $u \in H^3(\Omega)$. Тогда справедливы оценки

$$\|u-u^h\|_{1,\Omega} \le c_2 h^2 \|u\|_{3,\Omega} \tag{13}$$

и

$$\|u-u^h\|_{0,\Omega} \le c_3 h^3 \|u\|_{3,\Omega} \tag{14}$$

с константами c_2 и c_3, независящими от u и h.

Доказательство. Оценка (13) получается стандартным образом [1; 2; 6] из теоремы 1 путем масштабирования и применения к совокупности элементарных квадратов. А оценка (14) вытекает из нее на основании приема Нитше [1; 2].

То есть в нашем примере мы должны получить второй порядок сходимости в норме H^1 и третий порядок в норме L_2. А практически для дискретных аналогов получаем следующее (см. таблицу).

Что касается поведения погрешности $\sigma_h = \|u-u^h\|_{1,h}$, то ее порядок действительно близок к двум. А вот погрешность $\delta_h = \|u-u^h\|_{0,h}$ ведет себя гораздо лучше теоретически предсказанного третьего порядка, демонстрируя близость к четвертому порядку. Это объясняется следующим образом. Оценки (13) и (14) справедливы, вообще говоря, на неравномерных сетках. На неравномерной сетке погрешность в дискретной среднеквадратичной норме действительно будет лишь третьего порядка малости. Но что касается равномерной сетки, то получающаяся конечно-разностная схема имеет симметричный шаблон и потому не может быть нечетного порядка точности ввиду сокращения нечетных степеней в разложении Тейлора для погрешности аппроксимации. Поэтому после сокращения слагаемых третьего порядка аппроксимации остаются лишь слагаемые четвертого порядка малости, которые и определяют четвертый порядок сходимости для дискретного набора значений. Но при вычислении (недискретной) нормы $\|u-u^h\|_{0,\Omega}$ она оказывается лишь третьего порядка, как и предсказывается теоремой 2.

Итак, в статье представлен новый эрмитов биквадратный элемент на прямоугольнике. До сих пор эрмитовым конечным элементом наименьшей степени был бикубический элемент. Поскольку биквадратный элемент проще бикубического, то для решений класса $H^3(\Omega)$ он оказывается более экономичным.

Относительно неожиданным свойством оказался его повышенный порядок точности в дискретной среднеквадратичной норме *на равномерной сетке*. Вместо третьего получается четвертый порядок точности. Это объясняется симметрией шаблона получающейся конечно-разностной схемы. В итоге, в этой дискретной норме на равномерной сетке порядок точности биквадратного и бикубического элемента совпадают, что делает первый элемент более предпочтительным ввиду меньшего числа степеней свободы и более простой структуры дискретных уравнений.

Библиографические ссылки

1. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических краевых задач. М. : Мир, 1980.

2. Brenner S. C., Scott L. R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods. New York : Springer-Verlag, 1994.

3. Даутов Р. З., Карчевский М. М. Введение в теорию метода конечных элементов. Казань : Казанский государственный университет, 2004.

4. Ильин В. П. Методы и технологии конечных элементов. Новосибирск : ИВМиМГ СО РАН, 2007.

5. Шайдуров В. В. Многосеточные методы конечных элементов. М. : Наука, 1989.

6. Стренг Г., Фикс Дж. Теория методов конечных элементов. М. : Мир, 1977.

7. Gileva L., Shaydurov V., Dobronets B. The triangular Hermite finite element complementing the Bogner-Fox-Schmit rectangle // Applied Mathematics. 2013. Vol. 5, № 12A. P. 50–56.

8. Bogner F. K., Fox R. L., Schmit L. A. The generation of interelement compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas // Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics. Ohio : Wright-Patterson Air Force Base, 1965. P. 397–444.

9. Zhang S. On the full C_1-Q_k finite element spaces on rectangles and cuboids // Advances in Applied Mathematics and Mechanics. 2010. Vol. 2, No. 6. P. 701–721.

10. Adams R. A., Fournier J. J. F. Sobolev spaces. New York : Academic Press, 2003.

References

1. Ciarlet P. G. The Finite Element Method for Elliptic Problems. Amsterdam, North-Holland, 1978.

2. Brenner S. C., Scott L. R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods. New York, Springer-Verlag, 1994.

3. Dautov R. Z., Karchevskiy M. M. *Vvedeniye v teoriyu metoda konechnykh elementov* [Introduction into theory of finite element method]. Kazan, Kazan State University Publ., 2004.

4. Il'in V. P. *Metody i tekhnologii konechnykh elementov* [Methods and technologies of finite elements]. Novosibirsk, INM&MG SB RAS Publ., 2009.

5. Shaidurov V. V. *Mnogosetochnyye metody konechnykh elementov* [Multigrid methods for finite elements]. Moscow, Nauka Publ., 1989.

6. Streng G., Fix G. *Teoriya metodov konechnykh elementov* [Theory of finite element methods]. Moscow, Mir Publ., 1977.

7. Gileva L., Shaydurov V., Dobronets B. The triangular Hermite finite element complementing the Bogner-Fox-Schmit rectangle. *Applied Mathematics*. 2013. Vol. 5, no. 12A, p. 50–56.

8. Bogner F. K., Fox R. L., Schmit L. A. The generation of interelement compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas. *Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Ohio: Wright-Patterson Air Force Base, 1965, p. 397–444.

9. Zhang S. On the full C_1-Q_k finite element spaces on rectangles and cuboids. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics.* 2010. Vol. 2, no. 6, p. 701–721.

10. Adams R. A., Fournier J. J. F. Sobolev spaces. New York : Academic Press, 2003.

УДК 658.14+621.975

ОСОБЕННОСТИ РАБОТЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОГО МОЛОТА

И. Я. Шестаков[1], Е. Н. Фисенко[1], И. А. Ремизов[2]

[1] Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660014, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31
E-mail: info@sibsau.ru
[2] Красноярский государственный медицинский университет
имени профессора В. Ф. Войно-Ясенецкого
Российская Федерация, 660022, г. Красноярск, ул. Партизана Железняка, 1
E-mail: rector@krsk.info

Рассматривается способ работы молота, приводом которого является линейный электродинамический двигатель. Рассмотрена связь импульса тока в обмотке возбуждения ротора с энергией удара. При статическом режиме работы электродинамического молота в обмотку катушки-статора и в обмотку возбуждения ротора подают токи, величина которых достаточна для втягивания ротора в статор и удерживания его в верхнем положении. Затем в обмотку возбуждения подают импульс тока для обеспечения рабочего хода ротора. Направление импульса тока в обмотке возбуждения противоположно направлению тока в статическом режиме. Длительность импульса тока меньше, чем время перемагничивания магнитопровода статора, но превышает длительность рабочего хода ротора. Приведены результаты испытаний электродинамических молотов.

Ключевые слова: электродинамический молот, импульс тока, время перемагничивания, магнитопровод, ротор.

WORK FEATURES OF ELECTRODYNAMIC HAMMER

I. Y. Shestakov[1], E. N. Fisenko[1], I. A. Remizov[2]

[1]Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev
31, Krasnoyarsky Rabochy Av., Krasnoyarsk, 660014, Russian Federation
E-mail: info@sibsau.ru
[2]Krasnoyarsk State Medical University named after prof. V. F. Voino-Yasenetsky
1, Partizan Zheleznyak str., Krasnoyarsk, 660022, Russian Federation
E-mail: rector@krsk.info