

но конечных групп совпадает с классом почти локально нормальных групп с силовскими подгруппами, удовлетворяющими условию минимальности.

Действительно, пусть группа G почти локально нормальна. Тогда в ней имеется локально нормальная подгруппа H конечного индекса. Если силовские подгруппы группы H удовлетворяют условию минимальности, то по предложению 4 H слойно конечна и в одну сторону. Утверждение доказано.

Пусть теперь группа G почти слойно конечна. Ее силовские подгруппы удовлетворяют условию минимальности по доказанному выше и ввиду того, что черниковские группы удовлетворяют условию минимальности. Слойно конечный радикал группы G имеет в G конечный индекс, как мы уже не раз отмечали, и является локально нормальной группой по предложению 4. Следовательно, G является почти локально нормальной группой.

В результате построения восьми примеров определены взаимоотношения класса почти слойно конечных групп с близкими по свойствам классами групп. Эти взаимоотношения уточнены при помощи доказанных свойств. Результаты статьи найдут применение при изучении бесконечных групп с условиями конечности.

Библиографические ссылки

1. Черников С. Н. К теории бесконечных специальных p -групп // Докл. АН СССР. 1945. Т. 50. С. 71–74.
2. Черников С. Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.: Наука, 1980. 384 с.
3. Сенашов В. И. Слойно конечные группы. Новосибирск: Наука, 1993. 158 с.
4. Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1977. Т. 1. 1152 с.

5. Черников С. Н. Бесконечные слойно конечные группы // Мат. сб. 1948. Т. 22(64). С. 101–133.

6. Сенашов В. И. О группах Шункова с сильно вложенной почти слойно конечной подгруппой // Труды ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16 (3). С. 234–239.

7. Сенашов В. И. О группах с сильно вложенной подгруппой, обладающей почти слойно конечной периодической частью // Украин. мат. журн. 2012. Т. 64(3). С. 384–391.

8. Сенашов В. И. Строение бесконечной силовой подгруппы в некоторых группах Шункова // Вестник СибГАУ. 2013. № 1 (47). С. 74–79.

9. Шунков В. П. О вложении примарных элементов в группе. Новосибирск: Наука, 1992. 132 с.

References

1. Chernikov S. N. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1945, vol. 50, p. 71–74.
2. Chernikov S. N. *Gruppy s zadannymi svoystvami sistemy podgrupp* (Group with the Given Properties of Subgroups Systems). Moscow, Nauka, 1980, 384 p.
3. Senashov V. I. *Sloyno konechnyye gruppy* (Layer Finite Groups). Novosibirsk, Nauka, 1993, 158 p.
4. *Matematicheskaya entsiklopediya*. Vol. 1. Moscow, Sovetskaya entsiklopediya Publ., 1977, 1152 p.
5. Chernikov S. N. *Math. Sbornik*. 1948, vol. 22 (64), p. 101–133.
6. Senashov V. I. *Trudy IMM UrO RAN*. 2010, vol. 16, № 3, p. 234–239.
7. Senashov V. I. *Ukrain. math. zhurn.* 2012, vol. 64, № 3, p. 384–391.
8. Senashov V. I. *Vestnik SibGAU*. 2013, № 1 (47), p. 74–79.
9. Shunkov V. P. *O vlozhenii primarnykh elementov v gruppe* (On an Embedding of Primary Elements in a Group). Novosibirsk, Nauka Publ., 1992, 132 p.

© Сенашов В. И., 2014

УДК 539.371

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ*

С. И. Сенашов, Е. В. Филюшина

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660014, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31
E-mail: sen@sibsau.ru, filyushina@sibsau.ru

В настоящее время для полноценного исследования дифференциальных уравнений кроме определения типа уравнений и правильной постановки граничных условий, выяснения существования и единственности решений необходимо знать симметрии, допускаемые системой, и законы сохранения. При этом оказывается, что кроме общеизвестных законов сохранения, следующих из общих методов построения уравнений, существуют и иные законы сохранения. Эти законы могут быть полезны для решения краевых задач и получения различных оценок решений. Построены новые законы сохранения для двумерных уравнений линейной упругости в стационарном случае. Сохраняющийся ток линеен по первым производным от искомым функций, но не зависит от

* Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, Б-180-14.

самих искомым функций. Построенные законы сохранения можно использовать для решения краевых задач теории упругости для конечных областей.

Ключевые слова: законы сохранения, теория упругости, сохраняющийся ток.

CONSERVATION LAWS EQUATIONS PLANE THEORY OF ELASTICITY

S. I. Senashov, E. V. Filyushina

Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev
31, Krasnoyarsky Rabochy Av., Krasnoyarsk, 660014, Russian Federation
E-mail: sen@sibsau.ru, filyushina@sibsau.ru

Today for a full study of differential equations in addition to defining the type of equations and the correct formulation of the boundary conditions, determine the existence and uniqueness of solutions it is necessary to know the symmetry allowed by the system and conservation laws. It turns out that in addition to well-known laws of conservation of the following general methods for constructing equations, there are other conservation laws. These laws can be useful for solving boundary value problems and get different estimates of the solutions. In the paper, we construct new conservation laws for the two-dimensional equations of linear elasticity in the stationary case. Conserved current is linear in the first derivatives of the unknown functions, but does not depend on the unknown functions themselves. Constructed conservation laws can be used for solving boundary value problems of elasticity theory for finite fields.

Keywords: laws of conservation, elasticity theory, the conserved current.

Теория упругости (линейная) – это очень хорошо разработанный раздел механики сплошных сред. Развивать в ней методы позднее использовались при решении уравнений гидродинамики, теории пластичности и других дисциплин.

Для уравнений теории упругости известны следующие законы сохранения: закон сохранения энергии, законы сохранения количества движения и момента импульса. В силу линейности уравнений, уравнения теории упругости допускают бесконечное количество законов сохранения. Некоторые из них используются в механике разрушения. Это инвариантные *J-интегралы* и *Г-интегралы*. В предлагаемой работе приведена бесконечная серия новых законов сохранения. Авторы надеются, что новые законы сохранения найдут применение при решении краевых задач теории упругости, особенно для тел конечных размеров. Решение таких задач является одной из наиболее актуальных проблем для уравнений теории упругости.

Дадим необходимые определения. Пусть

$$F_i(x, y, u, v, u_x, v_x, u_y, v_y, \dots, v_{yy}) = 0, \quad i = 1, 2$$

система двух дифференциальных уравнений второго порядка, x, y – независимые переменные, u, v – искомые функции, индексы внизу означают производные по соответствующим переменным.

Определение. Назовем вектор (A, B) сохраняющимся током, а величину $A_x + B_y = 0$ законом сохранения, если

$$A_x + B_y = \Delta_1 F_1 + \Delta_2 F_2 = 0, \quad (1)$$

где Δ_i – некоторые дифференциальные операторы, по крайней мере, один из которых является нетривиальным. Более подробно построение законов сохранения описано в [1; 2] и цитируемой там литературе.

Известны разные способы построения законов сохранения. Наиболее широко используется метод построения законов сохранения на основе нетеровских симметрий, допускаемых уравнением. Этот способ построения для уравнений пластичности изложен в [3].

В данной работе законы сохранения будут строиться исходя из соотношения (1). Этот способ наиболее прост и, самое главное, он позволяет строить такие законы сохранения, которые можно использовать для решения краевых задач [4].

Рассмотрим двумерные уравнения линейной стационарной теории упругости

$$\begin{aligned} F_1 &= (\lambda + 2\mu)u_{xx} + (\lambda + \mu)v_{xy} + \mu u_{yy} = 0, \\ F_2 &= \mu v_{xx} + (\lambda + \mu)u_{xy} + (\lambda + 2\mu)v_{yy} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где u, v – компоненты вектора деформации; λ, μ – постоянные Ламе.

Ищем сохраняющийся ток в виде

$$\begin{aligned} A &= \alpha^1(\lambda + 2\mu)u_x + \beta^1\mu u_y + \gamma^1\mu v_x + \delta^1(\lambda + 2\mu)v_y, \\ B &= \alpha^2u_x + \beta^2u_y + \gamma^2v_x + \delta^2v_y, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i, \delta^i$ – некоторые функции от x, y . Коэффициенты Ламе введены в коэффициенты компоненты A для удобства дальнейших выкладок.

В силу (1) имеем

$$\begin{aligned} &\alpha^1(\lambda + 2\mu)u_{xx} + \alpha_x^1(\lambda + 2\mu)u_x + \beta^1\mu u_{yx} + \\ &+ \beta_x^1\mu u_y + \gamma^1\mu v_{xx} + \gamma_x^1\mu v_x + \delta^1(\lambda + 2\mu)v_{xy} + \\ &+ \delta_x^1(\lambda + 2\mu)v_y + \alpha^2u_{xy} + \alpha_y^2u_x + \beta^2u_{yy} + \\ &+ \beta_y^2u_y + \gamma^2v_{xy} + \gamma_y^2v_x + \delta^2v_{yy} + \delta_y^2v_y = \alpha^1F_1 + \gamma^1F_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Из соотношений (4) получаем

$$\begin{aligned}
-(\lambda + \mu)\alpha^1 + \delta^1 + \gamma^2 &= 0, \quad -\mu\alpha^1 + \beta^2 = 0, \\
-(\lambda + \mu)\gamma^1 + \delta^1 + \alpha^2 &= 0, \quad -(\lambda + \mu)\gamma^1 + \delta^2 = 0, \\
(\lambda + 2\mu)\alpha_x^1 + \alpha_y^2 &= 0, \quad \beta_x^1 + \beta_y^2 = 0, \quad \mu\gamma_x^1 + \gamma_y^2 = 0, \\
\delta_x^1 + \delta_y^2 &= 0.
\end{aligned} \quad (5)$$

Из (5) следует

$$\begin{aligned}
\alpha^2 &= -\beta_1 + (\lambda + \mu)\gamma^1, \quad \beta^2 = \mu\alpha^1, \\
\gamma^2 &= -\delta_1 + (\lambda + \mu)\alpha^1, \quad \delta^2 = (\lambda + 2\mu)\gamma^1.
\end{aligned}$$

Подставим эти соотношения в последние четыре уравнения (5). Имеем

$$\begin{aligned}
(\lambda + 2\mu)\alpha_x^1 + (\lambda + \mu)\gamma_y^1 - \beta_y^1 &= 0, \\
\mu\gamma_x^1 + (\lambda + \mu)\alpha_y^1 - \delta_y^1 &= 0,
\end{aligned} \quad (6)$$

и

$$\beta_x^1 + \mu\alpha_y^1 = 0, \quad \delta_x^1 + (\lambda + 2\mu)\gamma_y^1 = 0. \quad (7)$$

Дифференцируем первое уравнение (6) по x , а второе – по y , с учетом (7) получаем

$$\begin{aligned}
(\lambda + 2\mu)\alpha_{xx}^1 + (\lambda + \mu)\gamma_{xy}^1 + \mu\alpha_{yy}^1 &= 0, \\
\mu\gamma_{xx}^1 + (\lambda + \mu)\alpha_{xy}^1 + (\lambda + 2\mu)\gamma_{yy}^1 &= 0.
\end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) следует, что (α^1, γ^1) – произвольное решение системы (2), а (β^1, δ^1) восстанавливаются по формулам (7) и, в свою очередь, тоже являются решением уравнений (2). Последнее нетрудно проверить. Для этого достаточно продифференцировать первое уравнение (7) по x , а второе – по y и воспользоваться соотношениями (6).

Известно, что любые решения уравнений (2) можно записать с помощью трех гармонических функций Φ^0, Φ^1, Φ^2 .

Имеем

$$\begin{aligned}
\alpha^1 &= \Phi^1 - \frac{1}{4(1-\nu)}(x\Phi_x^1 + y\Phi_y^2 + \Phi_x^0), \\
\gamma^1 &= \Phi^2 - \frac{1}{4(1-\nu)}(x\Phi_y^1 + y\Phi_y^2 + \Phi_y^0),
\end{aligned} \quad (9)$$

где ν – коэффициент Пуассона; $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$;

E – модуль упругости при растяжении и сжатии.

Задавая гармонические функции Φ^0, Φ^1, Φ^2 и решая соответствующие уравнения (7), получим явный вид законов сохранения.

В частности, если $\Phi^1 = \Phi^2 = 0$, без труда получаем бесконечную серию законов сохранения:

$$\alpha^1 = \Phi_x^0, \quad \gamma^1 = \Phi_y^0,$$

$$\beta^1 = -\mu\gamma^1, \quad \delta^1 = (\lambda + 2\mu)\alpha^1,$$

$$\alpha^2 = (\lambda + 2\mu)\gamma^1, \quad \beta^2 = \mu\alpha^1,$$

$$\gamma^2 = -\mu\alpha^1, \quad \delta^2 = (\lambda + 2\mu)\gamma^1.$$

В этом случае сохраняющийся ток имеет вид

$$A = (\alpha + 2\mu)\alpha^1(u_x + v_y) + \mu\gamma^1(-u_x + v_x),$$

$$B = (\alpha + 2\mu)\gamma^1(u_x + v_y) + \mu\alpha^1(u_x - v_x).$$

Замечание 1. Аналогичным образом законы сохранения могут быть построены и в трехмерном случае.

Замечание 2. Законы сохранения, построенные в работе, могут быть использованы для решения краевых задач, так же как в статьях [3; 4]. Это будет сделано в следующих статьях.

Библиографические ссылки

1. Предельное состояние деформированных тел и горных пород / Д. Д. Ивлев [и др.]. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. 831 с.
2. Сенашов С. И., Гомонова О. В., Яхно А. Н. Математические вопросы двумерных уравнений идеальной пластичности / Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. Красноярск, 2012. 137 с.
3. Сенашов С. И., Яхно А. Н. Законы сохранения уравнений пластичности среды Мизеса // Вестник ЧГПУ. 2013. № 2 (16). С. 107–115.
4. Сенашов С. И., Черепанова О. И., Кондрин А. В. Об упругопластическом кручении стержня // Вестник СибГАУ. 2013. 3(49). С. 100–103.

References

1. Ivlev D. D., Maksimova L. A., Nepershin L. I. et al. *Predel'noe sostojanie deformirovannyh tel i gornyh porod* (Limit state of deformed bodies and rocks). Moscow, FIZMATLIT, 2008, p. 831.
2. Senashov S. I., Gomonoova O. V., Jahno A. N. *Matematicheskie voprosy dvumernyh uravnenij ideal'noj plastichnosti* (Mathematical questions of two-dimensional equations of ideal plasticity). Krasnoyarsk, SibGAU, 2012, p. 137.
3. Senashov S. I. Jahno A. N. *Vestnik ChGPU*. 2013, no. 2(16), p. 107–115.
4. Senashov S. I., Cherepanova O. I., Kondrin A. V. *Vestnik SibGAU*. 2013, no. 3(49), p. 100–103.

© Сенашов С. И., Филюшина Е. В, 2014