

**РАЗРЕШИМОСТЬ РАЗНОСТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ
ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ НЕЯВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ**

М. С. Рогозина

Сибирский федеральный университет
Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, просп. Свободный, 79
E-mail: rogozina.marina@mail.ru

Дискретизация дифференциальной задачи приводит к разностным уравнениям, и в случае неявных разностных схем вопрос о разрешимости является нетривиальным. Так как задача сводится к разрешимости систем линейных уравнений, то в работе используются методы линейной алгебры. Даны необходимые и достаточные условия разрешимости и простое достаточное условие через коэффициенты полиномиального разностного оператора. Указана связь этих результатов с методом прогонки для систем алгебраических уравнений с ленточными матрицами. Результаты могут быть использованы как для исследования устойчивости разностных схем, так и для построения мономиальных базисов факторов в кольце полиномов.

Ключевые слова: полиномиальный разностный оператор, задача Коши.

Vestnik SibGAU
2014, No. 3(55), P. 126–130**SOLVABILITY OF A DIFFERENCE CAUCHY PROBLEM
FOR MULTI-LAYER IMPLICIT DIFFERENCE SCHEMES**

M. S. Rogozina

Siberian Federal University
79, Svobodnyy prosp., Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation
E-mail: rogozina.marina@mail.ru

Difference equations arise in different areas of mathematics. Difference equations in conjunction with a method of generation functions give a efficient technique for studying the enumerative problems in the combinatorial analyses. Another source of difference equations is discretization of differential equations. Methods of discretization a differential equation is an important part of the theory of difference schemes, and also lead to difference equations [1]. In the case of implicit difference schemes its solvability presents a non-trivial question. In [2] investigated the stability of a two-layer homogeneous linear difference scheme with constant coefficients. In [3] to study the stability of multilayer homogeneous difference schemes applied theory of amoebas of algebraic hypersurfaces and a formula for the solution of the Cauchy problem in terms of its fundamental solution. In [4] for the two-dimensional case is investigated difference analog of the boundary value problem for Hormander polynomial differential operator. We investigate the solvability of difference equations with initial-boundary conditions of Riquier and consider them as implicit multi-layer difference schemes. Since this question reduces to solvability of systems of linear equations, we use linear algebra to give necessary and sufficient conditions and a simple sufficient condition for solvability in terms of coefficients of a polynomial difference operator. We show the relation of these results to the elimination algorithm for systems of algebraic equations with band matrices. The results can be applied for studying solvability of difference schemes and construction of monomial bases in quotients of the polynomial ring.

Keywords: polynomial difference operator, Cauchy problem.

Введение. Разностные уравнения возникают в различных областях математики. В комбинаторном анализе разностные уравнения в сочетании с методом производящих функций дают мощный аппарат исследования перечислительных задач. Другой источник появления разностных уравнений – дискретизация

дифференциальных. Методы дискретизации дифференциальной задачи являются важной составной частью теории разностных схем и также приводят к разностным уравнениям [1].

В монографии [2] исследована устойчивость однородной двухслойной линейной разностной схемы

с постоянными коэффициентами. В работе [3] к исследованию устойчивости многослойных однородных разностных схем применяется теория амёб алгебраических гиперповерхностей и получена формула для решения задачи Коши через ее фундаментальное решение.

В [4] для двумерного случая исследован разностный аналог краевой задачи Хермандера для полиномиального дифференциального оператора. В данной работе исследуется разрешимость разностных уравнений с начально-краевыми условиями типа Рикье. С точки зрения теории разностных схем это многослойные неявные разностные схемы. Дан критерий (теорема 2) разрешимости и простое достаточное условие (теорема 1). В теореме 3 отражена связь полученных результатов с известным методом исследования разностных схем – методом прогонки для систем линейных уравнений с ленточными матрицами (см., например, [5]).

Введем необходимые обозначения и определения.

\mathbb{Z}^2 – целочисленная решетка и \mathbb{Z}_+ – подмножество этой решетки, состоящее из точек с целыми неотрицательными координатами. Пусть δ_1 – оператор сдвига по переменной x , т. е. $\delta_1 f(x,y) = f(x+1,y)$, а δ_2 – оператор сдвига по переменной y , т. е. $\delta_2 f(x,y) = f(x,y+1)$. Зададим «полосу» $\Pi = \{(x,y) \in \mathbb{Z}_+^2, 0 \leq x \leq B, y > 0\}$ в положительном октанте целочисленной решетки, число $B+1$ будем называть шириной «полосы» Π . Рассмотрим разностный полиномиальный оператор с постоянными коэффициентами вида

$$P(\delta_1, \delta_2) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^b c_{ij} \delta_1^i \delta_2^j = \sum_{j=0}^m P_j(\delta_1) \delta_2^j, \quad (1)$$

где $P_j(\delta_1) = \sum_{i=0}^b c_{ij} \delta_1^i, j = 0, 1, \dots, m$.

Многочлен $P(z,w) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^b c_{ij} z^i w^j$ называется ха-

рактеристическим. Степень m многочлена $P(z,w)$ будем называть порядком разностного оператора $P(\delta_1, \delta_2)$ и предполагать, что $b < B$.

Зафиксируем β такое, что $c_{\beta m} \neq 0$, и рассмотрим множество $\Pi_\beta = \{(x,y) \in \mathbb{Z}_+^2: 0 \leq x - \beta \leq B - \beta, y > m - 1\}$. Обозначим $L_\beta = \Pi \Pi_\beta$ и сформулируем следующую задачу:

найти решение разностного уравнения

$$P(\delta_1, \delta_2) f(x,y) = g(x,y), (x,y) \in \Pi, \quad (2)$$

удовлетворяющее условию

$$f(x,y) = \varphi(x,y), (x,y) \in L_\beta, \quad (3)$$

где $g(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ – заданные функции целочисленных аргументов.

Задачу (2)–(3) назовем задачей Коши для полиномиального разностного оператора (1) и приведем легко проверяемое условие ее разрешимости.

Теорема 1. Если для коэффициентов полиномиального разностного оператора $P(\delta_1, \delta_2)$ выполнено условие

$$|c_{\beta m}| \geq \sum_{\substack{|\alpha|=0, \\ \alpha \neq \beta}}^b |c_{\alpha m}|, \quad (4)$$

то задача (2)–(3) имеет единственное решение.

Система уравнений (2)–(3) представляет собой бесконечную систему уравнений относительно переменных $f(x,y), (x,y) \in \Pi$. Важной особенностью этой системы является то, что каждое уравнение в ней зависит от конечного числа неизвестных. Известно (см. [6, лемма 6.3.7]), что такая система совместна тогда и только тогда, когда любая система из конечного числа этих уравнений совместна. Для исследования вопроса об условиях на оператор $P(\delta_1, \delta_2)$, при выполнении которых задача (2)–(3) разрешима, прежде всего упорядочим уравнения этой системы так, чтобы число неизвестных в каждом следующем уравнении было больше или равно числу неизвестных в предыдущем.

Зафиксируем p такое, что $p \geq m$, и будем рассматривать прямоугольник $\Pi^p = \{(x,y): 0 \leq x \leq B, 0 \leq y \leq p\}$. Неизвестные будем нумеровать элементами множества Π^p и упорядочим это множество лексикографически. Уравнения будем нумеровать элементами двух множеств $\Pi_\beta^p = \{(x,y): 0 \leq x \leq B - \beta, 0 \leq y \leq p - m\}$ и $L_\beta^p = \Pi^p \setminus \{\beta, m\} + \Pi_\beta^p$. Так как $L_\beta^p \cup \{\beta, m\} + \Pi_\beta^p = \Pi^p$, то элементам множества L_β^p присвоим те же «номера», с которыми они входят в множество Π^p , а элементам β, m множества Π_β^p – те «номера», с которыми $(\beta, m) + (x,y)$ входят в Π^p .

Получим систему уравнений относительно неизвестных $f(x,y), (x,y) \in \Pi^p$ вида

$$P(\delta_1, \delta_2) f(x,y) = g(x,y), (x,y) \in \Pi_\beta^p, \quad (5)$$

$$f(x,y) = \varphi(x,y), (x,y) \in L_\beta^p. \quad (6)$$

Число уравнений $\#(L_\beta^p \sqcup \Pi_\beta^p)$ этой системы равно числу неизвестных $\#\Pi^p$. Символ « \sqcup » означает дизъюнктное объединение.

Пример 1. Рассмотрим разностный оператор $P(\delta_1, \delta_2) = c_{21} \delta_1^2 \delta_2 + c_{11} \delta_1 \delta_2 + c_{01} \delta_2 + c_{20} \delta_1^2 + c_{10} \delta_1 + c_{00}$, где $m = 1, \beta = 1, b = 2$. Пусть $B = 3, p = 2$, тогда система уравнений (5)–(6) примет вид

$$c_{21} f(x+2, y+1) + c_{11} f(x+1, y+1) + c_{01} f(x, y+1) + c_{20} f(x+2, y) + c_{10} f(x+1, y) + c_{00} f(x, y) = g(x, y), (x, y) \in \Pi_1^2, \quad (5a)$$

$$f(x, y) = \varphi(x, y), (x, y) \in L_1^2, \quad (6a)$$

относительно неизвестных $f(y_1, y_2), (y_1, y_2) \in \Pi^2 = \{(0,0), (1,0), (2,0), (3,0), (0,1), (1,1), (2,1), (3,1), (0,2), (1,2), (2,2), (3,2)\}$. Уравнения (5a) нумеруются элементами множества $\Pi_1^2 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{1})\}$, а уравнения (6a) – элементами множества $L_1^2 = \{(0,0), (1,0), (2,0), (3,0), (0,1), (3,1), (0,2), (3,2)\}$. Так как объединение $L_\beta^p \sqcup \Pi_\beta^p$ дизъюнктное, то точки с координатами (x,y) и (\bar{x}, \bar{y}) считаются различными.

Получим систему уравнений с ленточной матрицей, определитель (порядка $(m+1)(B+1)$) которой имеет вид

$$\Delta_{m,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & c_{\beta-1m} & c_{\beta m} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & c_{\beta m} & c_{\beta+1m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидным условием разрешимости этой системы является $\Delta_{m,\beta} \neq 0$.

На втором шаге берем $p = m + 1$. Точки с координатами $(0,0), (1,0), \dots, (B-b,0), (0,1), (1,1), \dots, (B-b,1)$ подставляем в уравнение (5), а точки с координатами $(x,y) \in L^{m+1}_\beta$ – в уравнение (6). Получим систему уравнений с определителем $\Delta_{m+1,\beta}$ порядка $(m+2)(B+1)$. Очевидным условием разрешимости системы является $\Delta_{m+1,\beta} \neq 0$.

Продолжая процесс, на $(p+1)$ -м шаге подставим в уравнение (5) точки с координатами $(0,0), (1,0), \dots, (B-b,0), \dots, (0,p-m), (1,p-m), \dots, (B-b,p-m)$, а точки с координатами $(x,y) \in L^p_\beta$ – в уравнение (6). Получим систему уравнений с определителем $\Delta_{p,\beta}$ порядка $(p+1)(B+1)$. Очевидным условием разрешимости системы является $\Delta_{p,\beta} \neq 0$.

Таким образом, условие «для всех $p \leq m$ определители $\Delta_{p,\beta} \neq 0$ » обеспечивает существование и единственность решения задачи (2)–(3) при произвольном выборе правой части $g(x,y)$ и начальных данных $\varphi(x,y)$.

Покажем справедливость обратного утверждения.

Возьмем $g(x,y) \equiv 0, \varphi(x,y) \equiv 0$. По условию единственным решением может быть только тождественный нуль: $f(x,y) \equiv 0$ для $(x,y) \in P_p$.

Далее действуем по схеме доказательства первой части.

На первом шаге ($p = m$) точки с координатами $(0,0), (1,0), \dots, (B-b,0)$ подставляем в уравнение (5), а точки с координатами $(x,y) \in L^m_\beta$ – в уравнение (6). Получим однородную систему линейных уравнений. Так как эта система имеет только тривиальное решение $f(x,y) = 0$, то определитель этой системы $\Delta_{m,\beta}$ не равен нулю.

Продолжая процесс и подставляя в уравнения (5), (6) все точки $(x,y) \in P_p$, на p -м шаге получим однородную систему линейных уравнений с определителем $\Delta_{p,\beta}$. Эта система имеет по условию только тривиальное решение, поэтому $\Delta_{p,\beta} \neq 0$.

Из теоремы 2 и леммы 1 сразу следует теорема 3.

Теорема 3. Задача (2)–(3) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\Delta_{p,\beta} \neq 0$ для всех $p = 0, 1, \dots$

Доказательство теоремы 1. У определителя $\Delta_{p,\beta}$ на главной диагонали стоят единицы и выделенный коэффициент $c_{\beta m}$. Согласно лемме 1 имеем $\Delta_{p,\beta} = D_{0,\beta} \cdot D_{1,\beta} \cdot \dots \cdot D_{p,\beta}$, где $D_{j,\beta}$ – главные миноры определителя $\Delta_{p,\beta}$ порядка $B+1$. Определители $D_{j,\beta}$ зависят только от коэффициентов многочлена

$$P_m(z) = \sum_{i=0}^b c_{im} z^i.$$

Если выполнено условие (4), то $D_{j,\beta}$ являются определителями матриц с диагональным преобладанием (говорят, что квадратная матрица $A = |a_{ij}|$ обладает свойством диагонального преобладания, если $|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots$, причем хотя бы одно неравенство является строгим), поэтому $D_{j,\beta} \neq 0$ (см., например, [8]). По теореме 3 задача (6)–(7) имеет единственное решение.

В качестве примера применения полученных результатов рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности [9]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t > 0, 0 < x < l, \\ u(0,t) = u_1(t), u(l,t) = u_2(t), \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

и ее аппроксимацию разностной шеститочечной параметрической схемой вида

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\tau} &= \sigma \frac{u_{i+1}^{m+1} - 2u_i^{m+1} + u_{i-1}^{m+1}}{h^2} + \\ &+ (1 - \sigma) \frac{u_{i+1}^m - 2u_i^m + u_{i-1}^m}{h^2}, i = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \tag{9}$$

$$u^m_0 = u_1(t_m), u^m_N = u_2(t_m), u^0_i = u_0(x_i), m = 0, 1, \dots, \tag{10}$$

где $0 \leq \sigma \leq 1$ – произвольный вещественный параметр схемы.

Рассмотрим чисто неявную схему, т. е. $\sigma = 1$. Тогда (9) запишется в виде

$$\frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\tau} = \frac{u_{i+1}^{m+1} - 2u_i^{m+1} + u_{i-1}^{m+1}}{h^2}.$$

Обозначим $\gamma = \frac{\tau}{h^2}$, тогда

$$u_i^{m+1} - \frac{1}{1+2\gamma} u_i^m - \frac{\gamma}{1+2\gamma} u_{i+1}^{m+1} - \frac{\gamma}{1+2\gamma} u_{i-1}^{m+1} = 0.$$

Если обозначить $a = -\frac{\gamma}{1+2\gamma}$, то в обозначениях данной работы разностный оператор будет иметь вид $P(\delta_1, \delta_2) = a\delta_2 + \delta_1\delta_2 + a\delta_1^2\delta_2 + (2a-1)\delta_1$, где $c_{01} = c_{21} = a, c_{11} = 1$.

Если переобозначить $u^m_i = f(i,m)$, то задача (9)–(10) для этой схемы примет вид

$$P(\delta_1, \delta_2)f(x,y) = 0, 0 < x < N-1, y = 0, 1, \dots,$$

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} f(0,y), y = 0, 1, \dots, \\ f(N,y), y = 0, 1, \dots, \\ f(x,0), x = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

Так как $2|a| < 1$, то выполнено условие диагонального преобладания (4) теоремы 1, следовательно, задача (10)–(11) имеет единственное решение.

Библиографические ссылки

1. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М. : Наука, 1971. 552 с.
2. Федорюк М. В. Асимптотика: интегралы и ряды. М. : Наука, 1987. 544 с.
3. Рогозина М. С. Устойчивость многослойных неоднородных разностных схем и амёбы алгебраических гиперповерхностей // Вестник СибГАУ. 2013. № 3 (49). С. 95–99.
4. Рогозина М. С. Разностный аналог одной теоремы Хермандера // Четвертое российско-армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам : тезисы докладов. Красноярск : Сиб. федер. ун-т. 2012. С. 60–62.
5. Ильин В. П., Лиснянский И. М. О решении алгебраических уравнений с ленточными теплицевыми матрицами // Сибирский математический журнал. 1978. Т. 19. Вып. 1. С. 44–48.
6. Хермандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М. : Мир, 1968. 280 с.
7. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. М. : Физматлит, 2005. 280 с.
8. Шарый С. П. Курс вычислительных методов. Новосибирск : Новосиб. гос. ун-т, 2010. 279 с.
9. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М. : Наука, 1973. 416 с.

References

1. Samarskiy A. A. *Vvedenie v teoriyu raznostnykh skhem* [Introduction to the theory of difference schemes]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 552 p.
2. Fedorjuk M. V. *Asimptotika: integraly i rjady* [Asymptotics: integrals and series]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 544 p.
3. Rogozina M. S. [Stability of multilayer inhomogeneous difference schemes and amoebas of algebraic hypersurfaces]. *Vestnik SibGAU*. 2013, no. 3 (49), p. 95–99. (In Russ.).
4. Rogozina M. S. [The difference analog of Hörmander's theorem]. *4th Russian-Armenian workshop on mathematical physics, complex analysis and related topics*. Krasnoyarsk, 2012, p. 60–62. (In Russ.).
5. Il'in V. P., Lisnjanskij I. M. [On the solution of algebraic equations with banded Toeplitz matrices]. *Sibirskij matematicheskij zhurnal*. 1978, vol. 19, no. 1, p. 44–48. (In Russ.).
6. Hermander L. *Vvedenie v teoriju funkcij neskol'kih kompleksnyh peremennyh* [Introduction to the theory of functions of several complex variables]. Moscow, Mir Publ., 1968, 280 p.
7. Il'in V. A., Poznjak Je. G. *Linejnaja algebra* [Linear Algebra]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 280 p.
8. Sharyj S. P. *Kurs vychislitel'nyh metodov* [Rate of computational methods]. Novosibirsk, Novosibirsk St. Univ. Publ., 2010, 279 p.
9. Samarskiy A. A., Gulin A. V. *Ustoychivost' raznostnykh skhem* [Stability of difference schemes]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 416 p.