6. De Lima Bicho A. [et al.] Simulating crowds based on a space colonization algorithm // *Computers and Graphics*. 2012, № 36, p. 70–79.

7. Runions A., Lane P. Modeling trees with a space colonization algorithm *// Eurographics Workshop on Natural Phenomena*. 2007, p. 63–70.

References

1. Yakubailik O. Vestnik SibGAU. 2012, no. 3 (43), p. 96-102.

2. Prusinkiewicz P., Lindenmayer A. NewYork, *Springer-Verlag*, 1990. 256 p.

3. Longay S., Runions A., Boudon F., Prusinkiewicz P. Proceedings of the Eurographics Symposium on Sketch-Based Interfaces and Modeling. 2012, p. 107–120.

4. Favorskaya M., Tkacheva A. Procedia Computer Scienes. 2013, vol. 22, p. 1229–1238.

5. Boudon F., Pradal C., Cokelaer T., Prusinkiewicz P., Godin C. *Frontiers in technical advances in plant science*. 2012, p. 1–20.

6. de Lima Bicho A., Rodrigues R., Musse S., Jung C., Paravisi M. Computers and Graphics. 2012, № 36, p. 70–79.

7. Runions A., Lane P. Eurographics Workshop on Natural Phenomena. 2007, p. 63–70.

© Ткачева А. А., 2014

УДК 539.3+539.4

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПЛОСКИХ КОНСТРУКЦИЙ, АРМИРОВАННЫХ ВДОЛЬ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Н.А. Федорова

Сибирский федеральный университет, Российская Федерация, 660074, г. Красноярск, ул. Киренского, 26 E-mail: ran@akadem.ru

На основе структурной модели в рамках плоской неоднородной линейной задачи упругости решена задача рационального армирования криволинейными волокнами. Рассмотрено растяжение трехслойного армированного диска под действием центробежной силы в полярной системе координат. Получена разрешающая система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно радиальной и окружной компонент перемещений в осесимметрической постановке задачи. Изучено влияние структурных параметров на предельное нагружение конструкции. Показано, что за счет выбора структуры армирования возможно увеличение предельной скорости вращения диска почти в два раза.

Ключевые слова: армирование, структурная модель, криволинейные траектории.

MATHEMATICAL MODELLING FOR EXTREME DEFORMATIONS OF PLANAR CONSTRUCTIONS REINFORCED WITH CURVILINEAR TRAJECTORIES

N. A. Feodorova

Siberian Federal University 26, Kirenskogo Av., Krasnoyarsk, 660074, Russian Federation E-mail: ran@akadem.ru

The problem of curvilinear fibers rational reinforcement is solved by reference to the structural model within the heterogeneous liner elasticity problem. Traction of a three-layered reinforced disc under the centrifugal force action in the polar coordinate system is considered. The resolving system of ordinary differential equations in radial and peripheral movement components for the axisymmetric problem definition is obtained. The effect of structural parameters for a construction limit stressing is studied. It is approved that by reinforcement structure choosing the extreme speed of a disc rotation can be increases twofold.

Keywords: reinforcement, structural model, curvilinear trajectories.

В современной промышленности широко используются тонкостенные элементы из волокнистых композитных материалов. Волокнистое армирование устанавливает анизотропию свойств материала [1] и позволяет применять новые принципы проектирования и изготовления изделий, основанные на том, что материал и изделие создаются одновременно в рамках единого технологического процесса. В результате получается изделие с новыми уникальными эксплуатационными качествами. До недавнего времени армирование осуществлялось преимущественно прямолинейными волокнами. Такие структуры армирования не могут быть эффективны для конструкций с большими градиентами полей напряжений и деформаций в зоне отверстий и переходных элементов. В этом случае необходимо создавать конструкции со специальными криволинейными структурами армирования. Работы [2–6] и настоящая статья посвящены методам поиска таких структур армирования.

Предлагается армирование конструкции по криволинейным траекториям проводить на основе трех подходов: по сетке координатных линий ортогональной системы координат, определяемой заданным конформным отображением [2; 3]; по изогональным траекториям, построенным к данным кривым [4]; по спиралевидным траекториям в осесимметрической постановке задачи [5].

В настоящей работе в качестве примера армированной конструкции рассматривается растяжение трехслойного диска под действием центробежной силы в полярной системе координат (r, θ) . В диске учитываются усилия $N_r, N_{\theta}, N_{r\theta}$ как сумма усилий в изотропном слое $(N_{r1}, N_{\theta1}, N_{r\theta1})$ и армированном слое $(N_{r2}, N_{\theta2}, N_{r\theta2})$, рассматриваются окружные и радиальные перемещения.

Пусть диск насажен на вал радиуса r_0 , внешний контур диска r_1 . С диском жестко соединены лопатки, наружный контур лопаток r_2 . Диск и лопатки вращаются внутри кожуха турбинного аппарата радиуса r_3 , $r_3 > r_2 > r_1 > r_0$.

Сформулируем уравнения равновесия конструкции в усилиях $N_r, N_{\theta}, N_{r\theta}$:

$$\frac{dN_r}{dr} + \frac{N_r - N_{\theta}}{r} = \Phi_1, \quad \frac{dN_{r\theta}}{dr} + \frac{2N_{r\theta}}{r} = \Phi_2.$$
(1)

В (1) усилия записываются как суммы усилий в слоях:

 $N_r = N_{r1} + N_{r2}; \ N_{\theta} = N_{\theta 1} + N_{\theta 2}; \ N_{r\theta} = N_{r\theta 1} + N_{r\theta 2}.$

Массовые силы Φ_1, Φ_2 вычисляются по формулам $\Phi_1 = \Phi_r \omega^2 r, \ \Phi_2 = m^{\nu} \frac{d\omega}{dt} r, \ где \ \omega - угловая скорость.$ В настоящей работе считаем, что угловая скорость ω не зависит от времени, $\Phi_2 = 0$ (установившийся режим). Находим $\Phi_r = \Phi_{r1} + \Phi_{r2}, \ где \ \Phi_{r1} = m_1^{\nu} h_1,$ $<math>\Phi_{r2} = m_2^{\nu} h_2, \ m^{\nu} = m_1^{\nu} + m_2^{\nu}, \ m_1^{\nu}, \ m_2^{\nu} -$ удельные массы изотропного и армированного слоев, m_1^{ν} совпадает с плотностью материала ρ_{01} . Для армированного *m* семействами волокон слоя имеем

$$m_2^{\nu} = \rho_{02}(1 - \sum_k \omega_k) + \sum_k \omega_k \rho_k, \ k = 1, \ ..., m,$$
 (2)

где ρ_{02} – плотность материала связующего армированного слоя; ρ_k – плотность материала *k*-го семейства армирующих волокон; ω_k – интенсивность армирования *k*-м семейством волокон.

Исходя из введенных выше предположений, связь между усилиями и напряжениями $\sigma_r, \sigma_{\theta}, \sigma_{r\theta}$ в рассматриваемых слоях примет вид

$$N_{r1} = \sigma_{r1}h_1, N_{r2} = \sigma_{r2}h_2, N_{\theta 1} = \sigma_{\theta 1}h_1, N_{\theta 2} = = \sigma_{\theta 2}h_2, N_{r\theta 1} = \sigma_{r\theta 1}h_1, N_{r\theta 2} = \sigma_{r\theta 2}h_2.$$
(3)

В (3) $h_1(r), h_2(r)$ – заданные толщины защитного слоя и армированного слоя как функции радиуса. Ввиду жесткого соединения слоев деформирование в слоях диска происходит совместно:

$$U_r = U_{r1} = U_{r2}; U_{\theta} = U_{\theta 1} = U_{\theta 2}.$$

Соотношения Коши имеют вид
 $\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\theta 1} = \varepsilon_{\theta 2} = \frac{U_r}{r}; \varepsilon_r = \varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2} = \frac{dU_r}{dr};$
 $\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{r\theta 1} = \varepsilon_{r\theta 2} = \frac{dU_{\theta}}{dr} - \frac{U_{\theta}}{r}.$

Сформулированная задача (1) является статически неопределенной, необходимо привлечь связь напряжений с деформациями.

Для армированного слоя диска связь между напряжениями и деформациями с криволинейными траекториями армирования установлена на основе структурной модели в виде

$$\sigma_{r2} = a_{11}\varepsilon_r + a_{12}\varepsilon_{\theta} + a_{13}\varepsilon_{r\theta},$$

$$\sigma_{\theta 2} = a_{21}\varepsilon_r + a_{22}\varepsilon_{\theta} + a_{23}\varepsilon_{r\theta},$$

$$\sigma_{r02} = a_{21}\varepsilon_r + a_{22}\varepsilon_{\theta} + a_{23}\varepsilon_{r\theta}.$$

 $o_{r\theta 2} = a_{31}\varepsilon_r + a_{32}\varepsilon_{\theta} + a_{33}\varepsilon_{r\theta}$. Полученные в работах [5; 6] коэффициенты $a_{ij}(r) = a_{ji}(r)$ учитывают все структурные характеристики материалов связующего и армирующих волокон: число семейств армирующих волокон, механические характеристики материалов связующего и волокон, интенсивность и тригонометрические функции углов армирования, входные данные технологического процесса. Здесь они не приводятся ввиду громоздкости математических выражений.

Для построения замкнутой системы разрешающих уравнений сформулируем задачу в перемещениях U_r , U_{θ} . В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенную относительно производных от радиального и окружного перемещений, моделирующую растяжение трехслойного диска под действием центробежной силы:

$$A_{1} \frac{d^{2}U_{r}}{dr^{2}} + B_{1} \frac{d^{2}U_{\theta}}{dr^{2}} + C_{1} \frac{dU_{r}}{dr} + \\ + D_{1} \frac{dU_{\theta}}{dr} + EE_{1}U_{r} + Z_{1}U_{\theta} = \Phi_{r}, \\ A_{2} \frac{d^{2}U_{r}}{dr^{2}} + B_{2} \frac{d^{2}U_{\theta}}{dr^{2}} + C_{2} \frac{dU_{r}}{dr} + \\ + D_{2} \frac{dU_{\theta}}{dr} + EE_{2}U_{r} + Z_{2}U_{\theta} = \Phi_{\theta}.$$
(4)

К системе (4) присоединим краевые условия:

а) на внутреннем контуре $r = r_0$ предполагаем, что диск жестко закреплен, смещения отсутствуют, $U_r(r_0) = U_{\theta}(r_0) = 0;$

б) на внешнем контуре заданы усилия $N_r(r_1) = K_1 \omega^2$, $N_{r\theta}(r_1) = K_1 \omega^2$, где K_1 , K_2 – экспериментально определяемые значения.

При проектировании диска необходимо установить предельную угловую скорость вращения. Введем понятие предельного упругого состояния в некоторой точке рассматриваемой конструкции, по достижении которого хотя бы в одной точке либо в связующем, либо в волокне происходит выход за пределы упругости (напряжение превышает предел текучести).

Будем рассматривать диски различных структур: спиралевидные, радиально-окружные, «спицы велоколеса» и их комбинации. Выполним обезразмеривание системы (4) и краевых условий: линейный размер отнесем к величине внутреннего радиуса r_0 , напряжение отнесем к модулю Юнга материала одного из семейств волокон $E_m(m = 1, 2)$.

Для численного решения обезразмеренная система сводится к системе четырех дифференциальных уравнений первого порядка, затем строится разностная схема, аппроксимирующая систему дифференциальных уравнений и краевые условия со вторым порядком точности. Полученная при этом система линейных уравнений с трехдиагональной матрицей решается методом ортогональной прогонки. В работе численные результаты получены для дисков постоянной толщины. Наиболее важной рабочей характеристикой турбинного диска, определяющей его несущую способность, является максимальная допустимая угловая скорость вращения. Исследуем влияние структуры армирования на данный параметр.



Рис. 1

Для диска газовой турбины касательные усилия в осесимметрической постановке не существенны, поэтому примем $N_{r0} = 0$. Предельные скорости вращения дисков газовых турбин рассмотрены на примере титанового диска массой 9,8 кг, ограниченного контурами с радиусами $r_1 = 0,05$ м, $r_2 = 0,1$ м с защитными керамическими покрытиями толщиной 0,03 мм.





В таблице приведены предельные скорости вращения армированного диска для трех типов структур армирования керамическими волокнами. Для первой структуры траекториями армирования являются семейства спиралей Архимеда и логарифмических спиралей. Обозначим эту структуру как (A+L), ее иллюстрация приведена на рис. 1. Вторая структура – семейство спиралей Архимеда и «спицы велоколеса», обозначим структуру как (A+V). Третья структура – семейство логарифмических спиралей и «спицы велоколеса». Обозначим эту структуру (L+V), иллюстрация на рис. 2.

Зависимость предельных значений числа оборотов в минуту *n* от структуры армирования

Структура армирования	n
Однородный титановый диск	10000
Армированный титановый	18500
диск, структура (A+L)	
Армированный титановый	19000
диск, структура (A+V)	
Армированный титановый	18500
диск, структура (L+V)	

Из таблицы видно, что может быть достигнуто существенное увеличение предельной скорости вращения армированного диска газовой турбины за счет выбора способа армирования вдоль криволинейных траекторий.

Библиографические ссылки

1. Федорова Н. А., Шкутин Л. И. Асимптотика осесимметричной задачи упругости для анизотропной цилиндрической оболочки // Журн. прикл. механ. и техн. физики. 1981. № 5. С. 156–162.

2. Немировский Ю. В., Федорова Н. А. Математическое моделирование плоских конструкций из армированных волокнистых материалов. Красноярск : СФУ, 2010. 136 с.

3. Немировский Ю. В., Федорова Н. А. Армирование плоских конструкций по криволинейным траекториям // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. «Физ.-мат. науки». 2010. Вып. 5 (21). С. 96–104. 4. Федорова Н. А. Моделирование изогонально армированных кольцевых пластин в полярной системе координат // Журн. СФУ. Сер. «Матем. и физ.». 2011. Т. 4, № 3. С. 400–405.

5. Федорова Н. А. Моделирование деформирования плоских конструкций со сложными криволинейными структурами армирования // Вестник СибГАУ. 2011. № 3 (36). С. 92–98.

6. Немировский Ю. В., Федорова Н. А. Исследование рациональных структур криволинейного армирования в полярной системе координат // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. «Физ.-мат. науки». 2013. Вып. 1 (30). С. 233–245.

References

1. Feodorova N. A., Skutin L. I. Asymptotic form of the axisymmetric elasticity problem for anisotropic cylin-

drical shell. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1981, vol. 22, p. 725–730.

2. Nemirovsiy Yu.V, Feodorova N.A. *Mate-maticheskoe modelirovanie ploskikh konstruktsii iz armi-rovann ykh voloknist ykh materialov* (Mathematical modeling of flat structures made of reinforced fiber materials). Krasnoyarsk, Sib. Fed. Univ., 2010. 136 p.

3. Nemirovsiy Yu. V, Feodorova N. A. Vestn. Samar. Gos. Techn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki, 2010, no 5 (21), p. 96–104.

4. Feodorova N. A. J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 2011, vol. 4, no. 3, p. 400-405.

5. Feodorova N. A. Vestnik SibGAU. 2011, no. 3 (36), p. 92–98.

6. Nemirovsiy Yu. V., Feodorova N. A. Vestn. Samar. Gos. Techn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki, 2013, no. 1 (30), p. 233–244.

© Федорова Н. А., 2014

УДК 621.355: 519.713

ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОЙ ЕМКОСТИ ЛИТИЙ-ИОННОГО АККУМУЛЯТОРА НА ОСНОВЕ ЭТАЛОННОЙ МОДЕЛИ

М. М. Хандорин¹, В. Г. Букреев²

¹ОАО «Научно-производственный центр «Полюс»

Российская Федерация, 634050, г. Томск, просп. Кирова, 56в. E-mail: m.khandorin@gmail.com ²Национальный исследовательский Томский политехнический университет Российская Федерация, 634050, г. Томск, просп. Ленина, 30. E-mail: bukreev@tpu.ru

Представлен метод оценки остаточной емкости литий-ионного аккумулятора. Приведен краткий обзор существующих подходов к решению данной проблемы. Предложен способ подстройки интегрирующего счетчика ампер-часов аккумулятора на основе модели Тевенина. Параметры модели, которые зависят от степени заряженности аккумуляторной батареи, заданы дискретными значениями. Интерполяция этих параметров производится при помощи кубического сплайна, при этом их значения принимаются за его узлы. Для снижения вычислительной сложности алгоритма сплайн-интерполяция выполняется по равномерной сетке. Приведены сравнительные результаты моделирования в среде Matlab Simulink. Они показывают, что относительная погрешность определения остаточной емкости по данному алгоритму не превышает 6 %. Также приведена оценка потребления ресурсов микроконтроллера при использовании данного алгоритма.

Ключевые слова: литий-ионный аккумулятор, модель Тевенина, интегрирующий счетчик ампер-часов, сплайн-интерполяция.

EVALUATION OF LITHIUM-ION BATTERY DISCHARGE CAPACITY BASED ON THE REFERENCE MODEL

M. M. Khandorin¹, V. G. Bukreev²

 ¹Joint Stock Company "Research and Production Center "Polus" 56v, Kirov Av., Tomsk, 634050, Russian Federation E-mail: m.khandorin@gmail.com
 ²National Research Tomsk Polytechnic University 30, Lenin Av., Tomsk, 634050, Russian Federation E-mail: bukreev@tpu.ru

The method of lithium-ion battery remaining capacity has been developed. The short overview of approaches to solving this problem is provided in this paper. The integrating ampere-hour counter adjustment method based on the