

**ОСОБЕННОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ И ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНОЙ
ФОРМУЛИРОВОК ЗАДАЧИ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОГО ИЗГИБА СТЕРЖНЯ
ОТ СИЛ ИНЕРЦИИ**

Р. А. Сабиров

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660014, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31
E-mail: aaa@mail.sibsau.ru; rashidsab@mail.ru

Разработан вариационно-разностный метод расчета устойчивости прямолинейных стержней на осевые инерционные нагрузки. Рассмотрена дифференциальная с конечно-разностной аппроксимацией разрешающих уравнений и вариационно-разностная формулировка краевой задачи продольно-поперечного изгиба в перемещениях. Задача приводится к обобщенной проблеме собственных чисел $Ax = \lambda Bx$ – для нетривиального вектора x требуется подобрать собственное число λ (здесь A – матрица жесткости, B – матрица внутренних сил инерции). При рассмотрении дифференциальной формулировки задачи особенностью инерционных нагрузок является то, что дискретная матрица B приобретает нулевые значения на главной диагонали (могут вырождаться и строки матрицы). Другая особенность связана с аппроксимацией дифференциальных уравнений методом сеток, что образует матрицу B несимметричной относительно главной диагонали. Обобщенная проблема не имеет решения, также не имеет решения ее обратная форма $Bx = \lambda^ Ax$, где $\lambda^* = 1/\lambda$. Приведение к проблеме собственных значений $AB^{-1}x = \lambda Ex$ и $BA^{-1}x = \lambda^* Ex$, где A^{-1} , B^{-1} – обратные матрицы, E – единичная матрица, не дает результата. Поэтому выполнен переход от дифференциальной формулировки задачи к вариационной формулировке с дискретизацией вариационно-разностным методом. Для данного подхода разработан алгоритм формирования матриц A и B , основанный на единичных свойствах вариаций функционала. Здесь матрица B всегда симметрична относительно главной диагонали и положительно определена. Нули на главной диагонали присутствуют (это особенность нагрузки); однако строки не вырождаются.*

Показана методика решения задачи. Приведены примеры вычисления собственных значений и форм потери устойчивости. Найдены критические осевые ускорения, при которых закрепленный с обеих сторон стержень теряет устойчивость, и критические угловые скорости для стержней, вращающихся в барабане центрифуги. Исследована сходимость решений от сгущения конечно-разностной сетки. Цель: разработать метод расчета стержней на инерционные нагрузки.

Ключевые слова: расчет стержней, устойчивость, вариационно-разностный метод.

Vestnik SibGAU
2014, No. 3(55), P. 131–138

**FEATURES OF DIFFERENTIAL AND VARIATIONAL-DIFFERENTIAL FORMULATIONS
OF THE PROBLEM OF THE LONGITUDINALLY CROSS BEND
OF THE CORE FROM INERTIA FORCES**

R. A. Sabirov

Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev
31, Krasnoyarsky Rabochy Av., Krasnoyarsk, 660014, Russian Federation
E-mail: aaa@mail.sibsau.ru; rashidsab@mail.ru

The variational-differential method of calculation of rectilinear cores stability on axial inertial loadings is developed. The formulations of the boundary value problem of longitudinal cross bending movements are calculated: differential formulation with a final and differential approximation of the allowing equations and variational-differential one. The task is reduced to the generalized problem of own numbers $Ax = \lambda Bx$ – for a non-trivial vector x it is required to identify its own number λ , here A is a matrix rigidity, B is a matrix of internal forces of inertia. In considering the differential formulation of the task the main particularity of the inertial loads is that the discrete matrix B gets null values on the main diagonal (the rows of matrix can degenerate). Another feature is associated with the approximation of the differential equations by the method of grids, which forms the matrix B asymmetrical about the main diagonal. The

generalized problem has no decision like its feedback form $Bx = \lambda^* Ax$ where $\lambda^* = 1/\lambda$. Bringing to the problem of eigenvalues $AB^{-1}x = \lambda Ex$ and $BA^{-1}x = \lambda^* Ex$ where A^{-1} and B^{-1} are the inverse matrix, E is the identity matrix, doesn't give any result. Therefore transition from the differential formulation of a task to the variation formulation with sampling by a variational and differential method is executed. The algorithm of formation of matrixes A and B is developed for this approach, which is based on uniform properties of variations of functional. Here the matrix B is always symmetric to the main diagonal and is positively defined. Zeros on the main diagonal were presented because it is a feature of loading, however rows don't degenerate.

The technique of the solution of a task is shown. Examples of calculation of own values and forms of stability loss are given. The critical axial accelerations lose their stability and critical angular speeds for the cores rotating in a drum of the centrifuge when the core is fixed from both sides. Investigated the convergence of solutions from condensation of a finite-difference grid. Purpose: to develop a method of calculation of cores on inertial loadings.

Keywords: calculation of cores, stability, variational and differential method.

Совершенство конструкций техники космического назначения с позиции механики деформируемых сред связано с уменьшением массы, обеспечением прочности и жесткости в связи с активными воздействиями управления и космического пространства. В качестве конструкций, создающих ускорения в наземных условиях, можно назвать центрифугу для тренировки космонавтов, создающую центростремительное ускорение порядка $30g$ [1]; многофункциональные высокоскоростные центрифуги для решения медико-биологических проблем [2], развивающие скорость вращения до 500 об/с; в атомной промышленности [3] известные центрифуги имели скорость 2000 об/с.

Основоположниками расчета устойчивости конструкций являются Я. Бернулли, Л. Эйлер, Ж. Л. Лагранж, С. Д. Пуассон [4]. По проблемам устойчивости пластин, оболочек, стержневых систем назовем имена С. П. Тимошенко, А. В. Александрова, И. А. Биргера, А. С. Вольмира, Г. С. Писаренко, В. И. Феодосьева, П. М. Варвака, Я. Г. Пановко, Е. П. Попова, Ю. В. Захарова, В. А. Светлицкого, А. Ф. Смирнова, В. В. Кабанова, Л. П. Железнова, В. В. Новожилова, В. З. Власова, Х. М. Муштари, Э. И. Григолюка, В. В. Болотина, В. И. Мяченкова, Ю. В. Немировского, Н. П. Абовского, Я. М. Григоренко, Н. В. Пустового, А. Н. Андреева, Л. И. Шкутина, Н. А. Алфутова, С. Н. Кана.

Литература по расчету устойчивости стержней обширна. Ее обзор, начиная с книг [5; 6], до работ более современных исследователей, из которых назовем [7; 8], показал, что для заземленных по торцам стержней на действие изменяющихся инерционных осевых нагрузок аналитические решения неизвестны. Поэтому разработанную вариационно-разностную методику численного анализа устойчивости стержней от инерционных воздействий можно считать актуальной.

Рассмотрим дифференциальную формулировку задачи. При продольно-поперечном изгибе известно уравнение равновесия в системе координат $Oxyz$ [9]

$$EJw_{xxxx} - q_z = -N(x)w_{xx}, \quad (1)$$

где E – модуль Юнга материала стержня; J – осевой момент инерции поперечного сечения, ориентированного

в осях Oyz ; $w = w(x)$ – функция прогиба стержня по направлению минимальной жесткости; $N(x)$ – функция продольного внутреннего усилия. При решении задачи на собственные значения поперечная распределенная нагрузка $q_z = 0$.

Выполним численный расчет продольно-поперечного изгиба стержня (рис. 1) методом конечных разностей. Для этого нанесем на область стержня длиной l (рис. 2) конечно-разностную сетку $1 \leq i \leq n+3$ с шагом $\lambda = l/n$. Здесь n – число шагов сетки в области стержня (число целое). Тогда $i=1$ и $i=i+3$ – законтурные узлы, а $i=2$ и $i=n+2$ – номера контурных узлов. Дифференциальные операторы в (1) для дискретной области стержня заменим конечно-разностными аналогами [10], что приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2} = \\ = -N_i \lambda^2 (w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}) / (EJ), \end{aligned} \quad (2)$$

$$1 \leq i \leq n+3.$$

Если прогибы и углы поворота торцов балки равны нулю

$$w(0) = 0, \quad w(l) = 0 \quad \text{и} \quad \vartheta(0) = dw(x)/dx|_{x=0} = 0,$$

$$\vartheta(l) = dw(x)/dx|_{x=l} = 0, \quad (3)$$

тогда в (2) принимается

$$3 \leq i \leq n+1 \quad (4)$$

и добавляются граничные условия:

$$w(0) = w_2 = 0, \quad w(l) = w_{n+2} = 0, \quad w_1 = w_3, \quad w_{n+3} = w_{n+1}. \quad (5)$$

Система тождеств (2) представляет обобщенную проблему собственных значений [11]

$$[A]\{\bar{w}\} = s[B]\{\bar{w}\}, \quad (6)$$

где $[A]$ – матрица жесткости стержня; матрицу $[B]$ назовем матрицей внутренних инерционных сил; $\{\bar{w}\} = \{w_3, w_4, w_5, \dots, w_{n-1}, w_n, w_{n+1}\}$ – собственный вектор; s – набор собственных чисел для

соответствующих форм потери устойчивости. Первой форме потери устойчивости соответствует минимальное собственное число s . Поясним прием (6) на модели балки с редкой сеткой $n=8$. В этом случае зависимости (2)–(5) примут вид

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \end{Bmatrix} = \\
 & = \frac{\lambda^2}{EJ} \begin{bmatrix} 2N_3 & -N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -N_4 & 2N_4 & -N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -N_5 & 2N_5 & -N_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_6 & 2N_6 & -N_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_7 & 2N_7 & -N_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -N_8 & 2N_8 & -N_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_9 & 2N_9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \end{Bmatrix}. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Отметим особенность (7). Здесь матрица B в общем виде не является симметричной матрицей относительно её главной диагонали.

Можно переформулировать прием вычисления (6) к виду

$$[B]\{\bar{w}\} = s^* [A]\{\bar{w}\}, \quad (8)$$

тогда первой форме потери устойчивости будет соответствовать максимальное собственное число s^* ; причем $s = 1/s^*$.

Введем параметр q_x , имеющий смысл равномерно распределенной нагрузки, приложенной вдоль оси стержня (рис. 1, а). Тогда функция продольной силы (стержень является однажды статически неопределимой системой) равна

$$N(x) = q_x(l/2 - x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (9)$$

График (эпюру) функции (9) изобразим на рис. 1, б. Подставив (9) в (1), получим дифференциальное уравнение

$$EJw_{xxxx} = -q_x(l/2 - x)w_{xx}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (10)$$

которое дает уравнения (7) в следующем виде

$$\frac{EJ}{\lambda^4} \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{q_x l}{8\lambda^2} \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

Действительно, в (11) матрица внутренних инерционных сил B оказалась несимметричной относительно главной диагонали, также выродилось одно уравнение, что является еще одной особенностью дифференциальной формулировки задачи. Можно уйти от нулевого коэффициента на главной диагонали, добавив или убрав один узел конечно-разностной сетки или подобрав ненулевую нагрузку в узле. Однако несимметричность матрицы внутренних сил остается. Собственные значения и собственные векторы в (11) не могут быть вычислены, даже если задача будет приведена к виду (8).

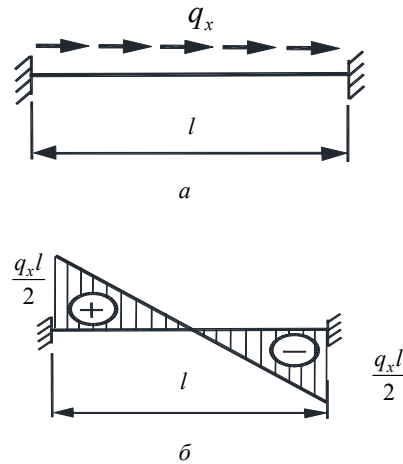


Рис. 1. Стержень, жестко закрепленный по краям: а – нагрузка, действующая на стержень; б – эпюра продольной силы

Для классической задачи устойчивости Эйлера с действующей на торец стержня силой P дифференциальная формулировка (1)–(2) проблемы собственных чисел дает решение. Внутренние силы: $N_i = -P$, $i = 3-9$; матрица B в (6) становится симметричной, причем

$$s = P\lambda^2 / EJ = Pl^2 / (64EJ). \quad (12)$$

Решение (6) даёт минимальное собственное число $s = 0,586$, подставив которое в (12), получаем минимальное значение силы P (значение критической силы), равное

$$P = 64 EJ s / l^2 = 37,49 EJ / l^2. \quad (13)$$

Представим возможную форму потери устойчивости в виде функции $w(x) = (1 - \cos 2\pi x / l) / 2$ на интервале $0 \leq x \leq l$. Подставив производные этой функции

в уравнение (1), приняв $N(x) = -P$, получаем значение критической силы $P = 4EJ\pi^2 / l^2 = 39,48EJ / l^2$, практически не отличающееся от результата (13). Для уточнения величины P в численном расчете, следует сгустить конечно-разностную сетку.

Заключаем, что при дифференциальной формулировке задачи об ускорении, при переменном внутреннем усилии $N(x)$, решения нет.

Переформулируем краевую задачу (1) в интегральную формулировку [12; 13] в перемещениях. Левую часть (1), последовательным интегрированием по частям переведем в функционал Лагранжа:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_l(w) = & -1/2 \int_0^l EJ(x) (w_{xx})^2 dx + \int_0^l q_z w(x) dx + Q_z(l)w(l) - \\ & - Q_z(0)w(0) - M_x(l)\vartheta(l) + M_x(0)\vartheta(0), \end{aligned} \quad (14)$$

где $0 \leq x \leq l$; dx – длина бесконечно малого элемента; $Q(l)$, $Q(0)$, $M_x(l)$, $M_x(0)$ – поперечные силы и изгибающие моменты на торцах балки.

Преобразуем в (1) правую часть, которая представляет в уравнении равновесия проекцию внутренней силы на вертикальную ось. Запишем выражение возможной работы этой силы на возможном перемещении $\delta w(x)$. Дальнейшее интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{x=l} N(x)w_{xx}\delta w(x) dx = & - \int_{x=0}^{x=l} N(x)w_x\delta w_x dx + \\ & + N(l)\vartheta(l)\delta w(l) - N(0)\vartheta(0)\delta w(0). \end{aligned} \quad (15)$$

В (15) усилие $N(x)$ не варьируем, потому как оно является известной функцией. Присоединив выражение (15) к вариации функционала (14), получаем

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{x=l} EJ(x)w_{xx}\delta w_{xx} dx - \int_{x=0}^{x=l} q_z \delta w(x) dx - Q_z(l)\delta w(l) + \\ + Q_z(0)\delta w(0) + M_x(l)\delta\vartheta(l) - M_x(0)\delta\vartheta(0) = \\ = \int_{x=0}^{x=l} N(x)w_x\delta w_x dx - N(l)\vartheta(l)\delta w(l) - N(0)\vartheta(0)\delta w(0), \end{aligned} \quad (16)$$

добавив к которому главные граничные условия задачи (3), имеем вариационное уравнение

$$\int_0^l EJ(x)w_{xx}\delta w_{xx} dx = \int_{x=0}^{x=l} N(x)w_x\delta w_x dx. \quad (17)$$

Сформируем коэффициенты матриц A и B в (6) выполнив варьирование (17), применив операторы варьирования δ_1 и δ_2 :

$$\int_0^l EJ(x)\delta_1 w_{xx}\delta_2 w_{xx} dx = \int_{x=0}^{x=l} N(x)\delta_1 w_x\delta_2 w_x dx. \quad (18)$$

Для вариационно-разностной реализации (18) введем на области стержня равномерную сетку $\omega_i = \{(x_i = i\lambda, i = 0, 1, \dots, n)\}$ на отрезке $[0, l]$, где $x = x_i$ – узлы сетки; $\lambda = l/n$ – шаг сетки по направлению оси координат x . Введем вспомогательную сетку с узлами ξ : $\omega_\xi = \{x_\xi = \lambda/2 + i\lambda, i = 0, 1, \dots, n-1\}$. Континуальную область в (18) заменим дискретной, а дифференциальные операторы заменим конечно-разностными аналогами:

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{n+2} EJ_i \frac{\delta_1 w_{i+1} - 2\delta_1 w_i + \delta_1 w_{i-1}}{\lambda^2} \frac{\delta_2 w_{i+1} - 2\delta_2 w_i + \delta_2 w_{i-1}}{\lambda^2} S_i = \\ = \sum_{\xi=1}^{\xi=n} N_\xi \frac{\delta_1 w_{i+1} - \delta_1 w_i}{\lambda} \frac{\delta_2 w_{i+1} - \delta_2 w_i}{\lambda} S_\xi, \end{aligned} \quad (19)$$

где S_i и S_ξ – площадки интегрирования: $S_\xi = \lambda$; $S_i = \lambda$ – во внутренних узлах i области; $S_i = \lambda/2$ – в узлах, расположенных на контуре; индексами $i=1$ и $i=n+3$ обозначены законтурные номера узлов конечно-разностной сетки, а индексами $i=2$ и $i=n+2$ – номера узлов, расположенных на торцах балки.

Тождество (19) содержит произведения вариаций $\delta_1 w_\alpha$ и $\delta_2 w_\alpha$, для $\alpha = 1, 2, \dots, n+3$, в котором учтем граничные условия (5), принимающие вид:

$$\begin{aligned} \delta_1 w(0) = \delta_1 w_2 = 0, \quad \delta_1 w(l) = \delta_1 w_{n+2} = 0, \\ \delta_1 w_1 = \delta_1 w_3, \quad \delta_1 w_{n+3} = \delta_1 w_{n+1}; \\ \delta_2 w(0) = \delta_2 w_2 = 0, \quad \delta_2 w(l) = \delta_2 w_{n+2} = 0, \\ \delta_2 w_1 = \delta_2 w_3, \quad \delta_2 w_{n+3} = \delta_2 w_{n+1}. \end{aligned}$$

Применив к выражению (19) циклы

$$\begin{aligned} \alpha = 3, 4, \dots, n+1, \quad j = 3, 4, \dots, n+1, \\ k = 3, 4, \dots, n+1, \end{aligned} \quad (20)$$

принимая

$$\delta_1 w_\alpha = \begin{cases} 1, & \text{при } \alpha = j, \\ 0, & \text{при } \alpha \neq j, \end{cases} \quad \delta_2 w_\alpha = \begin{cases} 1, & \text{при } \alpha = k, \\ 0, & \text{при } \alpha \neq k, \end{cases}$$

получаем коэффициенты матриц A и B тождества (6).

Пусть $n = 4$, тогда тождество (6), с учетом (19)–(20) представится так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^4} \begin{bmatrix} 2EJ_2 + 4EJ_3 + EJ_4 & -2EJ_3 - 2EJ_4 & EJ_4 \\ -2EJ_3 - 2EJ_4 & EJ_3 + 4EJ_4 + EJ_5 & -2EJ_4 - 2EJ_5 \\ EJ_4 & -2EJ_4 - 2EJ_5 & EJ_4 + 4EJ_5 + 2EJ_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{Bmatrix} = \\ = \frac{1}{\lambda^2} \begin{bmatrix} N_a + N_b & -N_b & 0 \\ -N_b & N_b + N_c & -N_c \\ 0 & -N_c & N_c + N_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь: N_a – внутреннее усилие в балке между узлами $i = 2$ и $i = 3$; N_b – внутреннее усилие между узлами $i = 3$ и $i = 4$, и т. д.

Таким образом, правая и левая части тождества (21) сформированы с использованием вариаций функционала Лагранжа, поэтому матрица жесткости и матрица внутренних сил инерции формируются по единой схеме. В левой части системы (21) матрица жесткости симметричная и содержит суммы параметров жесткости, что позволяет выполнять расчеты стержней переменной жесткости, как и должно, быть при интегральном подходе. В правой части (21) матрица внутренних инерционных сил по сравнению с матрицей правой части в (7) симметричная относительно главной диагонали, нули на главной диагонали не исключаются – последнее не препятствует решению проблемы собственных значений матриц.

Продемонстрируем методику расчета на примере действия на стержень (рис. 1) осевого ускорения; для наглядности процедуры вычисления нанесем на область стержня конечно-разностную сетку всего с четырьмя внутренними узлами. Согласно (9) внутренние усилия равны: $N_a = 3q_x l / 4$, $N_b = q_x l / 8$, $N_c = -q_x l / 8$, $N_d = -3q_x l / 4$. Пусть $EJ = \text{const}$, тогда из (21) получим

$$\frac{EJ}{\lambda^4} \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{Bmatrix} = \frac{q_x l}{\lambda^2} \begin{bmatrix} 7/8 & -1/8 & 0 \\ -1/8 & 0 & 1/8 \\ 0 & 1/8 & -7/8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{Bmatrix}. \quad (22)$$

В правой части (22) матрица B содержит нуль на диагонали, и определитель матрицы B равен нулю – обратной матрицы не существует. Покажем поиск решения системы (22). Для этого приведем план решения проблемы собственных значений (22) приемами (6) и (8) ниже.

Формируем системы тождеств:

$$[A]\{\bar{w}\} = s[B]\{\bar{w}\},$$

$$[B]\{\bar{w}\} = s^*[A]\{\bar{w}\}.$$

Здесь:

$$s = \frac{q_x l}{EJ} \lambda^2 = \frac{q_x}{EJ} 4\lambda^3 = \frac{q_x l^3}{16EJ},$$

$$s^* = \frac{EJ}{q_x l \lambda^2} = \frac{16EJ}{q_x l^3} = \frac{EJ}{q_x 4\lambda^3}.$$

Запишем операторы в программе Maple [14]:

$$s := \text{evalf}(\text{Eigenvals}(A, B, ve)),$$

$$s^* := \text{evalf}(\text{Eigenvals}(B, A, ve)),$$

и получим:

$$s := [\text{Float}(\infty) 5,570484985 - 5,570484986],$$

$$s^* := [0,1795175826 - 2,910^{-11} - 0,1795175830].$$

Собственные числа равны:

$$s = -5,57 \text{ (минимальное)},$$

$$s^* = 0,179 \text{ (максимальное)}.$$

Вычислим критическую нагрузку:

$$q_x = \frac{16EJ}{l^3} s = \frac{16EJ}{l^3} (-5,57) = -89,12 \frac{EJ}{l^3},$$

$$q_x = \frac{16EJ}{l^3 s^*} = \frac{16EJ}{l^3 0,179} = 89,12 \frac{EJ}{l^3}.$$

Распечатаем ve – матрицы векторов, соответствующих собственным значениям:

$$\begin{bmatrix} 0.1428571423 & 1.000000000 & -0.1934378348 \\ 1.000000000 & 0.7020222581 & -0.7020222576 \\ 0.1428571428 & 0.1934378353 & -1.000000000 \end{bmatrix},$$

здесь третий столбец матрицы

$$\{-0,19; -0,7; -1\}$$

соответствует минимальному собственному числу,

$$\begin{bmatrix} 1.000000000 & 0.1428571437 & 0.1934378363 \\ 0.7020222554 & 1.000000000 & 0.7020222581 \\ 0.1934378345 & 0.1428571431 & 1.000000000 \end{bmatrix},$$

здесь первый столбец матрицы

$$\{1; 0,7; 0,19\}$$

соответствует максимальному собственному числу.

При перестановке матриц программа Maple изменила знаки собственных значений и собственных векторов. Матрицу $[B]$ удобнее представлять безразмерной, выражая произведение ql в качестве параметра, что дает $s = ql\lambda^2 / EJ = ql^3 n^2 / EJ$. Отсюда $q = n^2 EJ s / l^3$. Обозначим через M – массу всего стержня, a_x – ускорение, действующее в продольном направлении стержня. Тогда $q_x l = M a_x$ и $M = \rho S l$, где ρ – плотность материала, S – площадь поперечного сечения стержня. Теперь по значению найденной критической нагрузки q_x вычисляется искомое критическое ускорение $a_x = q_x l / M = n^2 EJ s / (l^2 \rho S) = n^2 EJ / (l^2 \rho S s^*)$. Продолжим поиск критического ускорения стержня (рис. 2), задав: $l = 18$ м; $E = 10^6$ Па; $\rho = 1$ кг/м³; диаметр сечения трубки 1 см; толщина стенки 1 мм.

С целью исследования сходимости решения [14] выполним расчеты на различных сетках, начиная с $n = 8$ (рис. 2, а). Результаты приведем в табл. 1. На сетке $n = 64$ сходимости практически обеспечивается, что видно из графика сходимости ускорения a_x .

Низшую форму потери устойчивости покажем на рис. 2, б. Для конечно-разностных сеток $n = 8, 16, 32, 64, 128$ соответствующие значения s^* , q_x и a_x приведены в табл. 1. График сходимости ускорения a_x приведен на рис. 3. В этой задаче достаточно назначать $n = 32$.

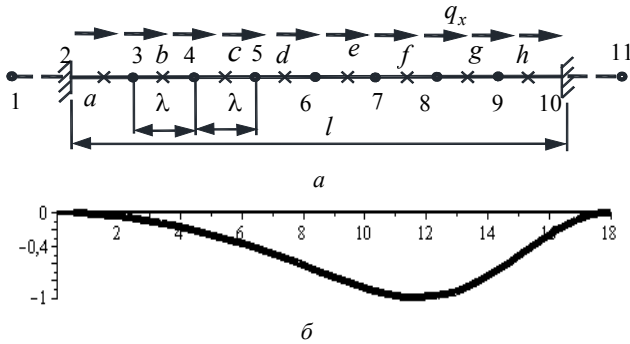


Рис. 2. Модель стержня, заделанного по обоим торцам:
 а – конечно-разностная модель, сетка $n = 8$;
 б – низшая (первая) собственная форма

Таблица 1

n	s^*	q_x	a_x
8	0,202	$6,76 \cdot 10^6 \pi$	12,18
16	0,74	$7,38 \cdot 10^6 \pi$	13,28
32	-2,92	$-7,53 \cdot 10^6 \pi$	13,55
64	11,61	$7,56 \cdot 10^6 \pi$	13,609
128	46,39	$7,6 \cdot 10^6 \pi$	13,625

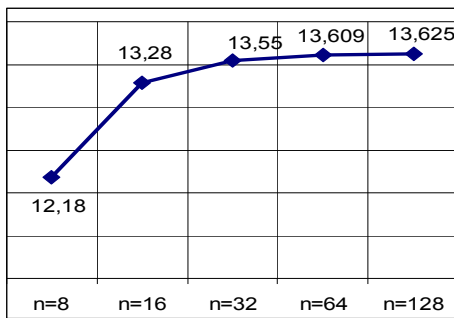


Рис. 3. График сходимости ускорения a_x

Рассмотрим вторую задачу. В барабане центрифуги (рис. 4), вращающемся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω , расположены стержни, прикрепленные к стенкам барабана, направленные в радиальном направлении. Радиус барабана $R_2 = 0,6$ м; стержни трубчатые, длиной $l = 0,2$ м, радиусом по центру стенки $r = 2 \cdot 10^{-3}$ м, толщиной стенки $t = 1 \cdot 10^{-3}$ м. Радиус $R_1 = R_2 - l = 0,2$ м. Модуль Юнга материала стержня $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, а плотность

материала $\rho = 780$ кг/м³. Требуется определить критические скорости вращения ω барабана центрифуги с позиции устойчивости стержней. Площадь каждого стержня $S = 2\pi r t = 4\pi \cdot 10^{-6}$ м²; осевой момент инерции $J_x = \pi r^3 t = 8 \cdot 10^{-12} \pi$ м⁴; радиус инерции $r_i = \sqrt{J_x/S} = 0,00141$ м. Гибкость стержня $\Lambda = l/r_i = 141,4$ – с возрания сопротивления материалов – стержень гибкий.

Выберем начало системы координат Ox в центре барабана (рис. 4, а). Тогда продольное инерционное внутреннее усилие $N(x)$ в стержне равно

$$N(x) = (\rho S \omega^2 / 2)(R_1^2 - x^2), \quad R_1 \leq x \leq R_2. \quad (23)$$

На торце стержня $x = R_1$ известны силовые факторы: $Q(R_1) = 0$, $M_x(R_1) = 0$, $N(R_1) = 0$. На торце $x = R_1$ известны геометрические зависимости – линейные смещения и угол поворота отсутствуют. Приведем матрицу $[B]$ к безразмерному виду. Для этого (23) запишем так: $\hat{N}(x) = (R_1^2 - x^2)/(R_2^2 - R_1^2)$, $R_1 \leq x \leq R_2$. Теперь, к примеру для $n = 5$ (рис. 4, б), получим интегральное тождество (6) в виде

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{Bmatrix} = \\
 & = s \begin{bmatrix} 0,12 & -0,12 & 0 & 0 & 0 \\ -0,12 & 0,4 & -0,28 & 0 & 0 \\ 0 & -0,28 & 0,76 & -0,48 & 0 \\ 0 & 0 & -0,48 & 1,2 & -0,72 \\ 0 & 0 & 0 & -0,72 & 1,72 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{Bmatrix}. \quad (24)
 \end{aligned}$$

Здесь при безразмерных матрицах A и B имеем собственное число, равное

$$s = \lambda^2 \omega^2 \rho S / (R_2^2 - R_1^2). \quad (25)$$

Учитывая $\lambda = l/n = (R_2 - R_1)/n$, из (25) получаем искомые значения угловой скорости в зависимости от n :

$$\begin{aligned}
 \omega &= n / (R_2 - R_1) \sqrt{(2R_2^2 - R_1^2) s / (\rho S)} = \\
 &= n / (R_2 - R_1) \sqrt{(2R_2^2 - R_1^2) / (\rho S s^*)}. \quad (26)
 \end{aligned}$$

Выполним расчеты на сетках $n = 8, 16, 32, 64, 128$. На сетке $n = 128$ формы потери устойчивости для первых трех низших собственных чисел покажем на рис. 4, в. Первую, вторую и третью угловые скорости обозначим, соответственно, символами $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$,

$\omega^{(3)}$; их значения, полученные для различных сеток, приведем в табл. 2.

Таблица 2

n	$\omega^{(1)}$	$\omega^{(2)}$	$\omega^{(3)}$
8	11,64	29,58	45,36
16	11,04	28,56	45,80
32	10,75	27,92	45,16
64	10,62	27,59	44,69
128	10,64	27,41	44,44

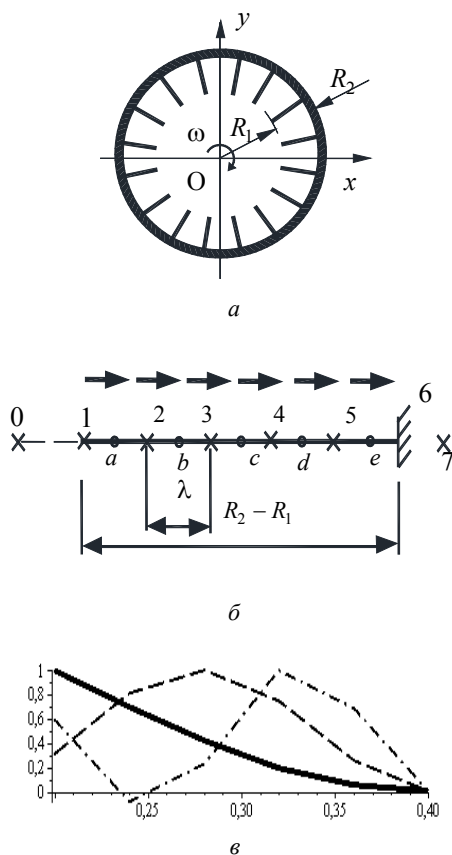


Рис. 4. Стержни, вращающиеся в центрифуге: a – барабан, вращающийся вокруг вертикальной оси; b – конечно-разностная модель стержня; v – формы потери устойчивости соответствующие критическим угловым скоростям: $\omega^{(1)} = 11,64$ об/с – сплошная линия; $\omega^{(2)} = 27,41$ об/с – штриховая линия; $\omega^{(3)} = 44,44$ об/с – штрихпунктирная линия

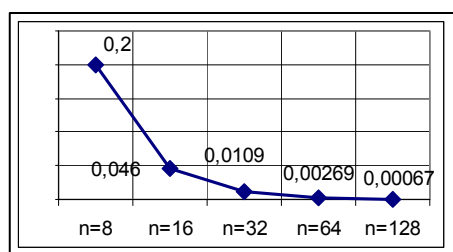


Рис. 5. График сходимости s

На графике сходимости (рис. 5) собственного числа s (25) от густоты сетки, видим достаточность сетки $n = 64$.

Таким образом, в задачах устойчивости стержней приложение вариационно-разностной формулировки краевой задачи исключает особенности, проявляющиеся при действии инерционных нагрузок – несимметричность матриц внутренних сил с вырождением отдельных строк в сравнении с конечно-разностной аппроксимацией дифференциальной формулировки. Примеры показали быструю сходимость решений в зависимости от густоты конечно-разностной сетки. Приложение вариационно-разностной формулировки позволит выполнять расчеты композитных стержней переменной жесткости.

Библиографические ссылки

1. Центрифуги. Технические характеристики центрифуги ЦФ-18 / Научно-исследовательский испытательный центр подготовки космонавтов им. Ю. А. Гагарина [Электронный ресурс]. URL: gtc.ru>print.php?id=131/ (дата обращения: 20.08.14).
2. Центрифуга высокоскоростная Avanti J-30I [Электронный ресурс]. URL: promix.ru>catalog.htm?catalogID=1538 (дата обращения: 2.08.14).
3. Ядерный волчок [Электронный ресурс]. URL: http://dn66.ru/fromnet/id/823-YAderniy-volchok.html/ (accessed 2012-10-01).
4. Тимошенко С. П. История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений. М. : Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1957. 536 с.
5. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М. ; Л. : ОГИЗ-ГОСТЕХИЗДАТ, 1946. 532 с.
6. Попов Е. П. Нелинейные задачи статики тонких стержней. Л. ; М. : ОГИЗ, 1948. 170 с.
7. Светлицкий В. А. Механика стержней. Ч. 1. Статика. М. : Высш. шк. 1987. 320 с.
8. Захаров Ю. В., Охоткин К. Г. Нелинейный изгиб тонких упругих стержней // ПМТФ, 2002. Т.43, № 5. С. 124–131.
9. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М. : Наука, 1975. 576 с.
10. Самарский А. А. Теория разностных схем. М. : Наука, 1977. 656 с.
11. Молчанов И. Н. Машинные методы решения прикладных задач. Алгебра, приближение функций. Киев : Наук. думка, 1987. 288 с.
12. Ланцош К. Вариационные принципы механики : пер. с англ. М. : Мир, 1965. 408 с.
13. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности : пер. с англ. М. : Мир, 1987. 542 с.
14. Матросов А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. СПб. : БХВ-Петербург, 2001, 528 с.
15. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М. : Наука, 1978. 592 с.

References

1. *Centrifugi. Tehnicheskie karakteristiki centrifugi CF-18. "Nauchno-issledovatel'skij ispytatel'nyj centr podgotovki kosmonavtov im. Ju.A. Gagarina"* [Centrifuge. Specifications centrifuge CF-18. "Research and Testing Cosmonaut Training Center. Yury Gagarin"] (In Russ.) Available at: getc.ru/print.php?id=131/ (accessed 20.08.14).
2. *Centrifuga vysokoskorostnaja Avanti J-30I* [High Speed Centrifuge Avanti J-30I] (In Russ.) Available at: promix.ru/catalog.htm?catalogID=1538 (accessed 2.08.14).
3. *Jadernyj volchok* [Nuclear dreidel] (In Russ.) Available at: URL: <http://dn66.ru/fromnet/id/823-YAderniy-volchok.html/> (accessed 2012-10-01).
4. Timoshenko S. P. *Istorija nauki o soprotivlenii materialov s kratkimi svedenijami iz istorii teorii uprugosti i teorii sooruzhenij* [Science history about resistance of materials with short data from history of the theory of elasticity and the theory of constructions]. Moscow, Gos. izd-vo Tehniko-teoreticheskoy literatury, 1957, 536 p.
5. Timoshenko S. P. *Ustojchivost' uprugih sistem* [Stability of elastic systems]. Moscow – Leningrad, OGIz GOSTEHIZDAT, 1946, 532 p.
6. Popov E. P. *Nelinejnye zadachi statiki tonkih sterzhnej* [Nonlinear problems of a statics of thin cores]. Leningrad – Moscow, OGIz, 1948, 170 p.
7. Svetlickij V. A. *Mehanika sterzhnej. Ch. 1. Statika* [Mechanics of cores]. Moscow, Vyssh. Shk. Publ., 1987, 320 p.
8. Zaharov Ju. V., Ohotkin K. G. *Nelinejnyj izgib tonkih uprugih sterzhnej* [Nonlinear bend of thin elastic cores]. *PMTF*, 2002, Vol. 43, № 5, p. 124–131.
9. Timoshenko S. P., Gud'er Dzh. *Teorija uprugosti* [Elasticity theory]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 576 p.
10. Samarskij A. A. *Teorija raznostnyh shem* [Theory of differential schemes]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 656 p.
11. Molchanov I. N. *Mashinnye metody reshenija prikladnyh zadach. Algebra, priblizhenie funktsij* [Machine methods of the solution of applied tasks. Algebra, approach of functions]. Kiev, Nauk. dumka Publ., 1987, 288 p.
12. Lancosh K. *Variacionnye principy mehaniki* [Variation principles of mechanics]. Moscow, Mir Publ., 1965, 408 p.
13. Vasilidzu K. *Variacionnye metody v teorii uprugosti i plastichnosti* [Variation methods in the elasticity and plasticity theory]. Moscow, Mir Publ., 1987, 542 p.
14. Matrosov A. V. *Maple 6. Reshenie zadach vysshej matematiki i mehaniki* [Solution of problems of the higher mathematics and mechanics]. St. Petersburg, BHV-Peterburg Publ., 2001, 528 p.
15. Samarskij A. A., Nikolaev E. S. *Metody reshenija setochnyh uravnenij* [Methods of the solution of the net equations]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 592 p.